第四冊
第四章
積分

習作與自我評量

【C4 習作 4-1】

1. 試判斷下列數列為收斂或發散：

(1)$\left\langle \left(\frac{99}{100}\right)^n \right\rangle$ (2)$\left\langle \left(\frac{100}{99}\right)^n \right\rangle$ (3)$\langle 100n-99 \rangle$

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{99}{100}\right)^n = 0 \rightarrow \left\langle \left(\frac{99}{100}\right)^n \right\rangle$ 收斂

(2)、(3)為發散數列

2. 試求下列各式之極限值：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-5n}{n^2+n+1}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-5n-1}{3n^2-n+10}$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n+6}{n^2-4n+3}$

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-5n}{1n^2+n+1}=\dfrac{2}{1}=2$ ※ (分子分母次方一樣)

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-5n-1}{3n^2-n+10}\xrightarrow{3>2}$ 不存在 (分子次方大)

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^1+6}{n^2-4n+3}=0$ $(1<2)$ (分母次方大)

3. 試求下列各式之極限值：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2}{n^2-4n+9}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n}{n+5}+\dfrac{100}{n+1}\right)$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{2n+1}-\dfrac{n^2}{2n-1}\right)$

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+4n+1}{1n^2-4n+9}=\dfrac{4}{1}=4$ (分子分母次方一樣)

(2) $\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{1n+5}}_{\text{次方一樣}}+\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10}{n+1}}_{\text{分母次方大}}=\dfrac{3}{1}+0=3$

(3) $\because \dfrac{n^2}{2n+1}-\dfrac{n^2}{2n-1}=\dfrac{n^2(2n-1)-n^2(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)}$

$=\dfrac{-2n^2}{4n^2-1}$

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-2n^2}{4n^2-1}=\dfrac{-2}{4}$

$=-\dfrac{1}{2}$ #

4. 試求 $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$ 之值。(提示：先求分子之級數和)

$\because 1+2+3+\cdots+n=\underline{\frac{(1+n)\times n}{2}}=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$

口訣：$\frac{(上底+下底)\times 高}{2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\underline{\frac{\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n}{1n^2}}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$ ※

分子分母次方一樣

5. 試求 $\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+3^n}{4^n+2^n}$ 之值。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{4}\right)^n}=\frac{1}{1}=1 \quad ※$$

分子分母同除以 4^n

6. 已知數列$\langle a_n \rangle$滿足$2n+3 \le (n+1)a_n \le 2n+5$（對所有的 n 均成立），試求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$。（提示：利用夾擠定理）

$$\frac{2n+3}{n+1} \le a_n \le \frac{2n+5}{n+1}$$

$$\because \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{1n+1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+5}{1n+1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = 2 \#$$

7. 試求無窮等比級數$1+\frac{2}{7}+\frac{4}{49}+\frac{8}{343}+\cdots$之值。

$\because a_1=1, r=\frac{2}{7}$ (滿足$-1<r<1$)

$\therefore S=\frac{a_1}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{2}{7}}=\frac{7}{7-2}=\frac{7}{5}$ #

分子分母同乘以7

8. 試將下列循環小數化成分數：

(1) $0.\overline{56}$ (2) $0.5\overline{6}$

(1) $x = 0.\overline{56}$

$100x = 56.\overline{56}$ 相減消去循環節

$99x = 56 \rightarrow x = \frac{56}{99}$ ※

(2) $x = 0.5\overline{6}$

$10x = 5.\overline{6}$

$100x = 56.\overline{6}$ 相減消去循環節

$90x = 56 - 5 \rightarrow 90x = 51$

$\rightarrow x = \frac{51}{90}$ (可約分得 $\frac{17}{30}$)

※

9. 已知 a、b 是實數，若 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+3n}{bn+18}=\frac{1}{2}$，試求 a、b。

① $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+3n}{bn+18}=\frac{1}{2}$ 存在

代表此時分子分母的次方一樣

故 $a=0$

② $\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{bn+18}=\frac{3}{b}=\frac{1}{2}\rightarrow b=6$

10. 古老神話故事中，一隻大神龜背上背負著 2 隻中烏龜，每隻中烏龜的體重是大神龜的$\frac{1}{8}$，而每隻中烏龜又背負著 2 隻小烏龜，小烏龜體重也是中烏龜的$\frac{1}{8}$，依此規律，每隻小烏龜又背負著更小的烏龜，如此一層層無止盡地向上堆疊。假設傳說中大神龜的重量是三千石，試問所有大大小小烏龜全部的總重量是多少石？（註：石是古代重量單位，1 石＝120 斤）

大 $\rightarrow a_1 = 3000$ (石)

中×2 $\rightarrow 3000 \times \frac{1}{8} \times 2 = 750$ (石)

小×2 $\rightarrow 750 \times \frac{1}{8} \times 2 = \frac{375}{2}$ (石)

$\vdots$

全部加起來

$$S = 3000 + 3000 \times \frac{1}{4} + 3000 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots$$

$$= \frac{3000}{1-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{12000}{4-1}$$

$$= \frac{12000}{3} = 4000 \text{ (石)}$$ ＃

【C4 習作 4-2】

1. 已知 $f(x)$ 為多項式函數且 $\int_0^5 f(x)dx = 5$，$\int_5^8 f(x)dx = 3$，

$\int_5^{10} f(x)dx = -2$，

試求下列各值：

(1) $\int_0^{10} f(x)dx$　(2) $\int_0^8 f(x)dx$　(3) $\int_8^{10} f(x)dx$

(1) $\int_0^{10} f(x)dx = \int_0^5 f(x)dx + \int_5^{10} f(x)dx$

$= 5 + (-2)$

$= 3$ ※

(2) $\int_0^8 f(x)dx = \int_0^5 f(x)dx + \int_5^8 f(x)dx$

$= 5 + 3$

$= 8$ ※

(3) $\int_8^{10} f(x)dx = \int_0^{10} f(x)dx - \int_0^8 f(x)dx$

$= 3 - 8$

$= -5$ ※

2. 兩多項式函數 $f(x)$ 與 $g(x)$，已知 $\int_1^3 f(x)dx=6$，$\int_1^3 g(x)dx=-1$，

試求 $\int_1^3[4f(x)-5g(x)]dx$。

$$\int_1^3[4f(x)-5g(x)]dx$$

$$=4\int_1^3 f(x)dx-5\int_1^3 g(x)dx$$

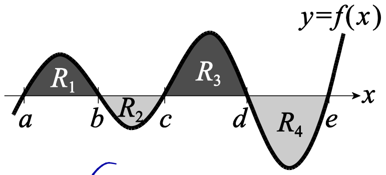
$$=4\times6-5\times(-1)$$

$$=24+5$$

$$=29$$

#

3. 如圖，四個鋪色區域面積分別為 $R_1=5$、$R_2=4$、$R_3=6$、$R_4=8$，試求定積分 $\int_a^e f(x)dx$。



$$\int_a^e f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx+\int_c^d f(x)dx+\int_d^e f(x)dx$$

$$=R_1+(-R_2)+R_3+(-R_4)$$

$$=5+(-4)+6+(-8)$$

$$=-1$$ #

4. 已知多項式函數 $F(x)$ 之導函數 $F'(x)=-x^2+4x-1$，試求 $F(x)$。

$$F'(x)=-x^2+4x-1$$

$$\downarrow$$

$$F(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-x+C$$

\#

5. 試求下列反導函數：

(1) $\int(x^2-12x+11)dx$　　(2) $\int(\sqrt{x}+1)^2 dx$

(1) $\int(x^2-12x+11)dx=\frac{1}{3}x^3-6x^2+11x+C$ #

(2) $\int(\sqrt{x}+1)^2dx=\int(x+2\sqrt{x}+1)dx$

$=\int(x+2\cdot x^{\frac{1}{2}}+1)dx$

$=\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+x+C$ #

$$\boxed{\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C\ (n\neq-1)}$$

6. 試求 $\int (3x+1)(x-1)\,dx$ 。

$$\int (3x+1)(x-1)\,dx$$

$$= \int (3x^2-2x-1)\,dx$$

$$= x^3 - x^2 - x + C \quad \#$$

7. 試求$\int (x-1)(x^2+x+1)dx$。

$$\int (x-1)(x^2+x+1)\,dx$$

$$= \int (x^3-1)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - x + C \quad \#$$

8. 試求$\int (9x+1)^3\,dx$。

令 $u = 9x+1$

則 $\frac{du}{dx} = 9 \rightarrow dx = \frac{1}{9}du$

原式 $= \int u^3 \cdot \frac{1}{9}du$

$= \frac{1}{36}u^4 + C$

$= \frac{1}{36}(9x+1)^4 + C$ ※

9. 試求$\int \frac{2x}{(x^2+1)^3}dx$。

令 $u=x^2+1$

則 $\frac{du}{dx}=2x \to 2x\,dx=du$

原式 $=\int \frac{1}{u^3}du$

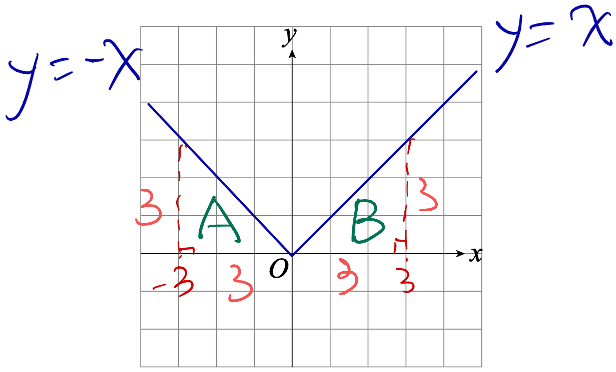
$=\int u^{-3}du$

$=\frac{1}{-2}u^{-2}+C$

$=-\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+1)^2}+C$ #

$$\boxed{\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \ (n\neq -1)}$$

10. 絕對值函數 $y=|x|$ 為連續函數，請畫出其函數圖形，並利用圖形求定積分 $\int_{-3}^{3}|x|dx$。



$$\int_{-3}^{3}|x|dx = A+B$$

$$= \frac{1}{2}\times 3\times 3+\frac{1}{2}\times 3\times 3$$

$$= \frac{9}{2}+\frac{9}{2}$$

$$= \frac{18}{2}$$

$$= 9 \text{ ※}$$

【C4 習作 4-3】

1. 試求下列定積分之值：

(1) $\int_0^2 (x+1)\,dx$ (2) $\int_0^1 x\sqrt{x}\,dx$

$$(1)\ \int_0^2 (x+1)\,dx = \left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\Big|_0^2$$

$$= (2+2)-(0+0)$$

$$= 4 \ \#$$

$$(2)\ \int_0^1 x\sqrt{x}\,dx = \int_0^1 x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

次方相加 $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$$= \int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$\boxed{\begin{aligned}\int_a^b x^n\,dx &= \frac{1}{n+1}x^{n+1}\Big|_a^b \\ &= \frac{1}{n+1}\left(b^{n+1}-a^{n+1}\right)\end{aligned}}$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{5} \ \#$$

2. 試求下列定積分之值：

(1) $\int_{-1}^{1}(3x^2-x+1)dx$ (2) $\int_{1}^{3}(1-x)^2dx$

(1) $\int_{-1}^{1}(3x^2-x+1)dx=\left(x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right)\Big|_{-1}^{1}$

$=\left(1-\frac{1}{2}+1\right)-\left(-1-\frac{1}{2}-1\right)$

$=2-\cancel{\frac{1}{2}}+2+\cancel{\frac{1}{2}}$

$=4$ #

(2) $\int_{1}^{3}(1-x)^2dx=\int_{1}^{3}(1-2x+x^2)dx$

$=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right)\Big|_{1}^{3}$

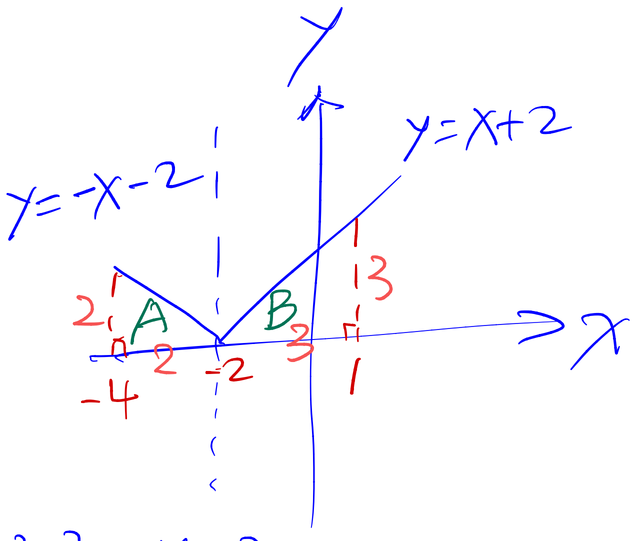
$=(9-9+3)-\left(\frac{1}{3}-1+1\right)$

$=3-\frac{1}{3}$

$=\frac{8}{3}$ #

3. 試求定積分 $\int_{-4}^{1}|x+2|\,dx$。

$$\int_{-4}^{1}|x+2|\,dx = A+B$$



$$=\frac{1}{2}\times2\times2+\frac{1}{2}\times3\times3$$

$$=\frac{4}{2}+\frac{9}{2}$$

$$=\frac{13}{2}$$

✗✗

4. 設分段函數 $f(x)=\begin{cases} 2x-1，當 x<1 \\ x^2 \quad，當 x\geq 1 \end{cases}$，試求定積分 $\int_{-2}^{3} f(x)dx$。

$$\int_{-2}^{3} f(x)dx = \int_{-2}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{3} f(x)dx$$

$$= \int_{-2}^{1} (2x-1)dx + \int_{1}^{3} x^2 dx$$

$$= (x^2-x)\Big|_{-2}^{1} + \frac{1}{3}x^3\Big|_{1}^{3}$$

$$= (1-1)-(4+2)+9-\frac{1}{3}$$

$$= 0-6+9-\frac{1}{3}$$

$$= \frac{8}{3} \text{ ※}$$

5. 試求定積分 $\int_0^1 \left[x\left(x^2+1\right)^3\right]dx$。

令 $\overset{2}{\underset{1}{u}} = \overset{1}{\underset{0}{x}}^2 + 1$

則 $\frac{du}{dx} = 2x \rightarrow x\,dx = \frac{1}{2}du$

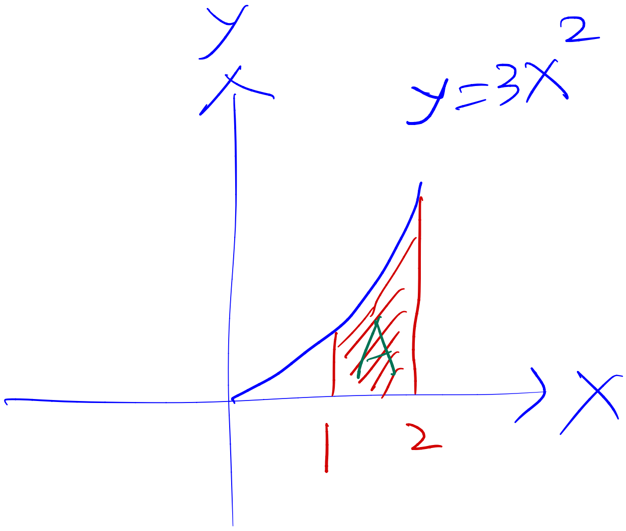
原式 $= \int_1^2 u^3 \cdot \frac{1}{2}du$

$= \frac{1}{8}u^4 \Big|_1^2$

$= \frac{1}{8}(16-1)$

$= \frac{15}{8}$ #

6. 試求函數 $y=3x^2$ 圖形在 $x=1$、$x=2$ 與 x 軸所圍區域面積。



$$A=\int_1^2 3x^2\,dx$$

$$=x^3\Big|_1^2$$

$$=2^3-1^3$$

$$=8-1$$

$$=7$$

//

7. 試求直線 $y = x - 1$ 與拋物線 $y = x^2 + x - 5$ 所圍區域面積。

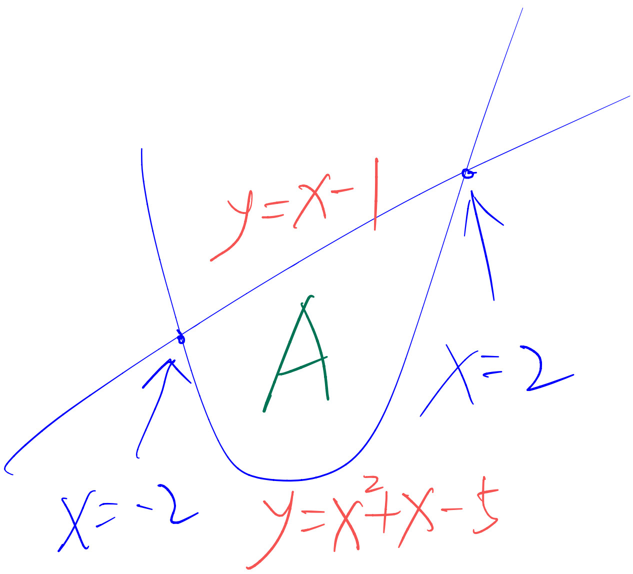
解 $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = x^2 + x - 5 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x - 5 = x - 1$

$\Rightarrow x^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow x = \pm 2$

$$A = \int_{-2}^{2} [(x-1) - (x^2 + x - 5)]\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2} (-x^2 + 4)\,dx$$



$$= \left(-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right)\Big|_{-2}^{2}$$

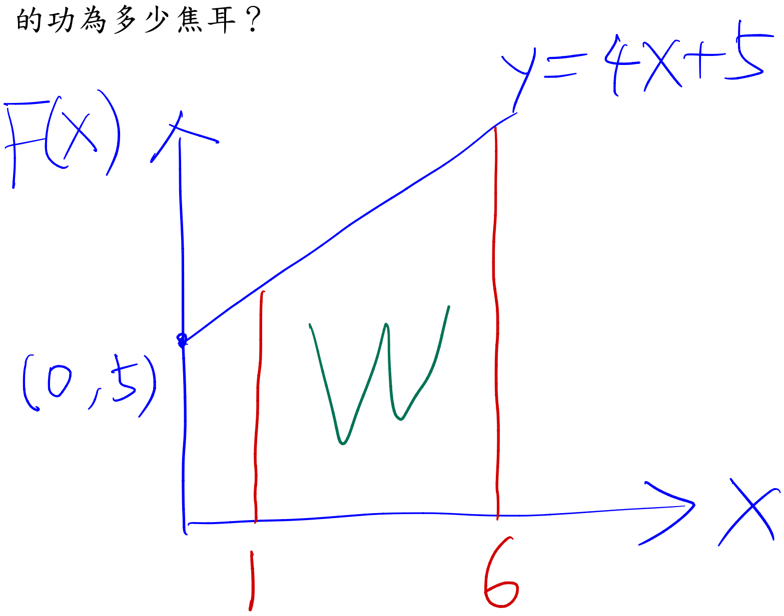
$$= \left(-\frac{8}{3} + 8\right) - \left(\frac{8}{3} - 8\right)$$

$$= -\frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8$$

$$= 16 - \frac{16}{3}$$

$$= \frac{32}{3} \#$$

8. 假設一物體受外力 $F(x)=4x+5$（x 單位：公尺，F 單位：牛頓）的作用下，沿著與力 $F(x)$ 相同方向從 $x=1$ 移動到 $x=6$ 處，試求外力 $F(x)$ 所作的功為多少焦耳？



$$W=\int_1^6 (4x+5)\,dx$$

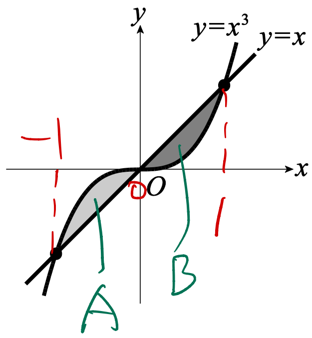
$$=\left(2x^2+5x\right)\Big|_1^6$$

$$=(72+30)-(2+5)$$

$$=102-7$$

$$=95\,(\mathrm{J})$$ #

9. 已知 $y=x^3$ 與 $y=x$ 所圍之區域如右圖之鋪色區塊，試求此區塊之面積和。



解 $\begin{cases} y=x^3 \\ y=x \end{cases}$ 得

$$x^3=x \Rightarrow x^3-x=0$$
$$\Rightarrow x(x^2-1)=0$$
$$\Rightarrow x(x+1)(x-1)=0$$
$$\Rightarrow x=-1,0,1$$

$$A=\int_{-1}^{0}(x^3-x)\,dx=\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^{0}$$
$$=(0-0)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)$$
$$=0-\left(-\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{4}$$

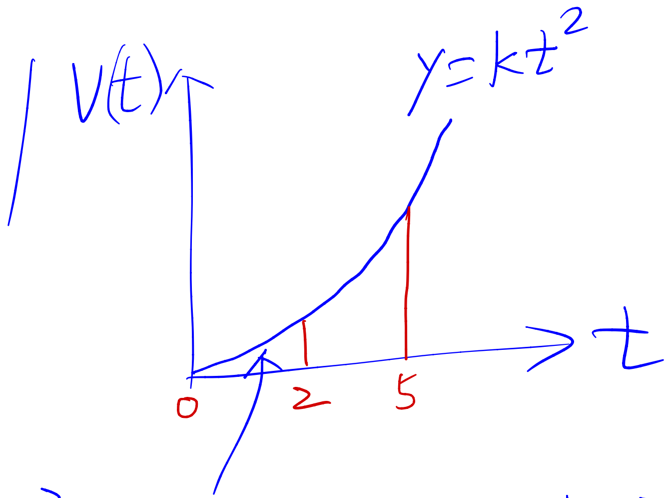
$$B=\int_{0}^{1}(x-x^3)\,dx=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_{0}^{1}$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)-(0-0)$$
$$=\frac{1}{4}$$

$$A+B=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\#$$

10. 已知一物體作直線運動其速度與時間的平方成正比，從時間 $t=0$ 開始 2 秒後物體移動 8 公尺，試求自開始經 5 秒鐘後物體移動的距離。

設 $V(t)=kt^2$

則



$$\int_0^2 kt^2\,dt=8 \rightarrow \frac{k}{3}t^3\Big|_0^2=8$$

$$\rightarrow \frac{8}{3}k=8$$

$$\rightarrow k=3$$

$\therefore V(t)=3t^2$

所求 $=\int_0^5 3t^2\,dt$

$=t^3\Big|_0^5$

$=5^3-0$

$=125$ (公尺) ※

【C4 自我評量 ch4】

(　C　) 1. 試判斷下列數列何者為發散數列？

(A)$\left\langle \frac{100}{n} \right\rangle$　(B)$\left\langle \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\rangle$　(C)$\left\langle (-1)^n \right\rangle$　(D)$\left\langle \frac{2n+5}{n+1} \right\rangle$。

(A) 2. 極限值 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-5}{2n+1}+\frac{2n-11}{4n+3}\right)=$ (A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 2 (D)不存在。

原式 $=\lim_{n\to\infty}\frac{1n-5}{2n+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{2n-11}{4n+3}$

$=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}$

$=1$ ※

(B) 3. 極限值 $\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2n^2}=$ (A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) 0。

$1+3+5+\cdots+(2n-1)$

$=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$

$=2\times\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1$

$=\cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{2}}n(n+1)-n\times 1$

$=n^2$

$\boxed{\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)\\ \sum_{k=1}^{n}c=n\times c\end{array}}$

原式 $=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}}{2\cancel{n^2}}=\frac{1}{2}$ #

(　D　) 4. 無窮等比級數之和：$\frac{2}{3}-1+\frac{3}{2}-\frac{9}{4}+\cdots=$

(A) $\frac{4}{15}$　(B) $\frac{15}{4}$　(C) $-\frac{4}{3}$　(D)不存在。

$\because r=-\frac{3}{2}<-1$

$\therefore S=\frac{2}{3}-1+\frac{3}{2}-\frac{9}{4}+\cdots$ 不存在

$$\boxed{-1<r<1 \rightarrow S=\frac{a_1}{1-r}}$$

(　B　) 5. 若無窮數列$\left\langle \left(\frac{1-2x}{5}\right)^n \right\rangle$收斂，則實數 x 的範圍為

(A) $-2 \le x \le 3$　　(B) $-2 \le x < 3$

(C) $-2 < x \le 3$　　(D) $x > 3$ 或 $x < -2$。

$\boxed{\text{無窮等比數列收斂} \leftrightarrow -1 < r \le 1}$

$$-1 < \frac{1-2x}{5} \le 1$$

$$-5 < 1-2x \le 5$$

$$-6 < -2x \le 4$$

$$\frac{-6}{-2} > x \ge \frac{4}{-2}$$

即 $-2 \le x < 3$ #

(A) 6. 若無窮等比級數$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a}{2}\right)^k$之極限值為 3，則 $a=$

(A)$\frac{3}{2}$ (B)$\frac{2}{3}$ (C)$-\frac{3}{2}$ (D)$-\frac{2}{3}$。

$$\boxed{-1<r<1 \leftrightarrow S=\frac{a_1}{1-r}}$$

$k=1 \to$ 首項 $=\frac{a}{2}$

公比為 $\frac{a}{2}$

故 $\frac{\frac{a}{2}}{1-\frac{a}{2}}=3 \to \frac{a}{2-a}=3$

$\to a=6-3a$

$\to 4a=6$

$\to a=\frac{3}{2}$ ※

(　C　) 7. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin n\theta$ 之值為　(A) -1　(B) 1　(C) 0　(D)不存在。

（提示：$-1\le\sin n\theta\le 1$）

$\because -1 \le \sin n\theta \le 1$

介於-1和1之間

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\sin n\theta}{n} = 0$ #

∞

(　B　) 8. 將 $0.7\overline{41}$ 化成分數為　(A) $\frac{741}{999}$　(B) $\frac{734}{990}$　(C) $\frac{734}{999}$　(D) $\frac{714}{990}$。

$x = 0.7\overline{41}$

$10x = 7.\overline{41}$

$1000x = 741.\overline{41}$

相減消去循環節

$990x = 741 - 7$

$990x = 734$

$x = \frac{734}{990}$ #

(A) 9. 已知 $f(x)$ 為多項式函數且 $\int_{-1}^{0} 2f(x)\,dx = -4$，$\int_{0}^{5} 3f(x)\,dx = 9$，則

$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{5} f(x)\,dx =$ (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{5} f(x)\,dx = \int_{-1}^{5} f(x)\,dx$$

而 $$\int_{-1}^{5} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{5} f(x)\,dx$$

$$= \frac{-4}{2} + \frac{9}{3}$$

$$= (-2) + 3$$

$$= 1$$ ※

(B) 10. 若 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 15$ 且 $\int_{-1}^{8} f(x)\,dx = 5$，則 $\int_{1}^{8} f(x)\,dx =$

(A) 10 (B) -10 (C) 20 (D) -20。

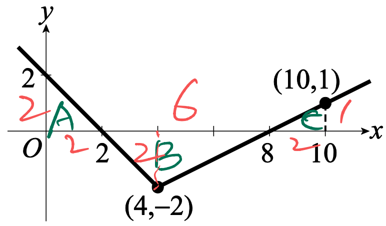
$$\int_{-1}^{8} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{8} f(x)dx$$

$$5 = 15 + \int_{1}^{8} f(x)dx$$

$$\int_{1}^{8} f(x)dx = -10$$

\#

(C) 11. 如右圖，設連續函數 $f(x)$ 圖形包含兩線段，定積分 $\int_0^{10} f(x)dx$ 之值為 (A) 9 (B) 3 (C) -3 (D) 6。



$$\int_0^{10} f(x)dx = \int_0^{2} f(x)dx + \int_2^{8} f(x)dx + \int_8^{10} f(x)dx$$

$$= A + (-B) + C$$

而 $A = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$

$B = \frac{1}{2} \times 6 \times 2 = 6$

$C = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$

故 $\int_0^{10} f(x)\,dx = 2 + (-6) + 1$

$= -3$ #

(B) 12. 試求$\int \frac{x^3-1}{x^2}dx=$

(A) $x^2+\frac{1}{x}+c$ (B) $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+c$ (C) $\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}+c$ (D) $x^2-\frac{1}{x}+c$ 。

$$\int \frac{x^3-1}{x^2}dx = \int (x-x^{-2})dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{-1}x^{-1} + C$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + C \quad \#$$

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)}$$

(C) 13. 試求 $\int(x+3)(x-3)\,dx=$

(A) $\frac{x^4}{4}-9x^2+c$ (B) x^2-9x+c (C) $\frac{x^3}{3}-9x+c$ (D) x^3-9x+c 。

$$\int(x+3)(x-3)\,dx$$

$$=\int(x^2-9)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3-9x+C$$ #

（ C ）14. 下列何者是 x^2+x 之反導函數？

(A) $2x+1$ (B) $\frac{1}{2}(x^2+x)^2$ (C) $\frac{1}{3}(x+1)^3-\frac{1}{2}(x+1)^2$

(D) $(x+1)(x^2+1)$ 。

(A) $\frac{d}{dx}(2x+1)=2\neq x^2+x$

(B) $\frac{d}{dx}\frac{1}{2}(x^2+x)^2=(x^2+x)^1\cdot(2x+1)$

$=2x^3+3x^2+x$

$\neq x^2+x$

(C) $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}(x+1)^3-\frac{1}{2}(x+1)^2\right]$

$=(x+1)^2-(x+1)$

$=(x^2+2x+1)-(x+1)$

$=x^2+x$ (合)

(D) $\frac{d}{dx}\left[(x+1)(x^2+1)\right]=(x^2+1)+(x+1)\cdot(2x)$

$=x^2+1+2x^2+2x$

$=3x^2+2x+1$

$\neq x^2+x$

(C) 15. 試求$\int (4x-3)^3\,dx =$

(A) $\frac{1}{4}(4x-3)^4+c$ (B) $(4x-3)^4+c$ (C) $\frac{1}{16}(4x-3)^4+c$

(D) $(4x-3)^3+c$ 。

令 $u=4x-3$

則 $\frac{du}{dx}=4 \rightarrow dx=\frac{1}{4}du$

原式 $=\int u^3\cdot\frac{1}{4}du$

$=\frac{1}{16}u^4+C$

$=\frac{1}{16}(4x-3)^4+C$ #

(　B　) 16. 已知多項式函數 $F(x)$ 之導函數 $F'(x)=1-3x^2$ 且 $F(0)=2$，試求

$F(x)=$

(A) $1-3x^2$　(B) $x-x^3+2$　(C) $x-3x^3+2$

(D) $x-x^3+c$，c 為常數。

$$F(x)=\int(1-3x^2)\,dx$$

$$=x-x^3+C$$

$\because F(0)=2$

$\therefore C=2$

故 $F(x)=x-x^3+2$ #

（ B ）17. 定積分$\int_1^4\left(\frac{x-1}{\sqrt{x}}\right)dx=$ (A)$\frac{4}{3}$ (B)$\frac{8}{3}$ (C)$\frac{16}{3}$ (D)$\frac{13}{3}$ 。

$$(a^m)^n=a^{m\times n}$$

$$4^{\frac{3}{2}}=(2^2)^{\frac{3}{2}}=2^3=8$$

$$4^{\frac{1}{2}}=(2^2)^{\frac{1}{2}}=2$$

$$\int_1^4\left(\frac{x-1}{\sqrt{x}}\right)dx$$

$$=\int_1^4\left(\frac{x}{x^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)dx$$

$$=\int_1^4\left(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^4$$

$$=\left(\frac{2}{3}\times 8-2\times 2\right)-\left(\frac{2}{3}-2\right)$$

$$=\frac{16}{3}-4-\frac{2}{3}+2$$

$$=\frac{8}{3}$$

(A) 18. 定積分 $\int_0^1 (1-2x)^3\, dx =$ (A) 0 (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1。

令 $u = 1-2x$

則 $\frac{du}{dx} = -2 \rightarrow dx = -\frac{1}{2}du$

原式 $= \int_{1}^{-1} u^3 \left(-\frac{1}{2}\right) du$

負號拿掉時，上下限要倒過來

$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} u^3\, du$

$= \frac{1}{8} u^4 \Big|_{-1}^{1}$

$= \frac{1}{8}(1-1)$

$= 0$ ※

(　B　) 19. 定積分 $\int_0^2 x(1-x^2)^2\,dx =$　(A) 7　(B) $\frac{14}{3}$　(C) $\frac{13}{3}$　(D) $\frac{7}{3}$ 。

令 $u = 1 - x^2$

x: $0 \to 2$, u: $1 \to -3$

則 $\frac{du}{dx} = -2x \rightarrow x\,dx = -\frac{1}{2}du$

原式 $= \int_1^{-3} u^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du$

負號拿掉時，上下限要倒過來

$= \int_{-3}^{1} \frac{1}{2} u^2\,du$

$= \frac{1}{6} u^3 \Big|_{-3}^{1}$

$= \frac{1}{6}(1 + 27)$

$= \frac{28}{6}$

$= \frac{14}{3}$ #

(　C　) 20. 已知 $\int_{-2}^{2}(ax+b)dx=-4$，$\int_{0}^{4}(bx+a)dx=20$，則 $a+b=$

(A) 8　(B) 7　(C) 6　(D) 5。

$$\int_{-2}^{2}(ax+b)dx=\left(\frac{a}{2}x^2+bx\right)\Big|_{-2}^{2}$$

$$=(2a+2b)-(2a-2b)$$

$$=4b$$

$$=-4 \Rightarrow b=-1$$

$$\int_{0}^{4}(-x+a)dx=\left(-\frac{1}{2}x^2+ax\right)\Big|_{0}^{4}$$

$$=-8+4a$$

$$=20 \Rightarrow 4a=28$$

$$\Rightarrow a=7$$

故 $a+b=7+(-1)=6$ ※

(B) 21. $y=3-2x-x^2$ 的圖形與 x 軸所圍成之區域面積為

$y=0$

(A) 16 (B) $\frac{32}{3}$ (C) 28 (D) $\frac{28}{3}$ 平方單位。

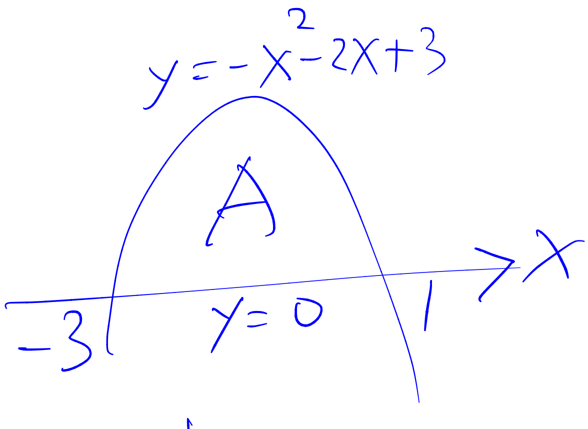
解 $\begin{cases} y=0 \\ y=3-2x-x^2 \end{cases}$

$3-2x-x^2=0 \rightarrow x^2+2x-3=0$

$\begin{array}{ccc} 1 & & -1 \\ & \times & \\ 1 & & +3 \end{array}$

$\rightarrow (x-1)(x+3)=0$

$\rightarrow x=1$ or -3



$$A=\int_{-3}^{1}(-x^2-2x+3)\,dx$$

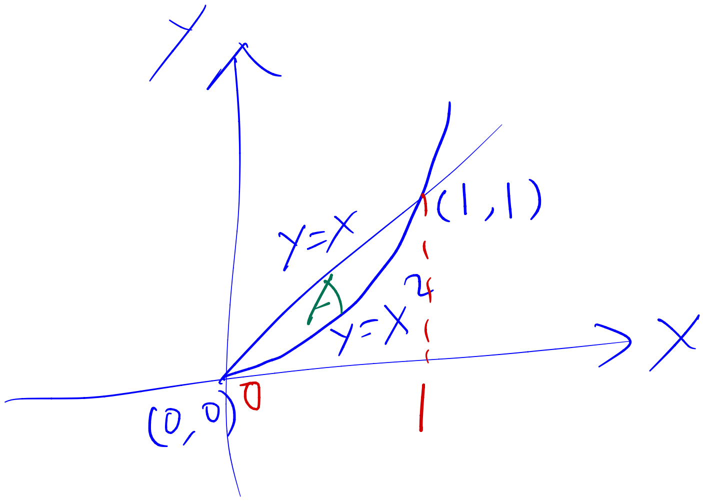
$$=\left(-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right)\Big|_{-3}^{1}$$

$$=\left(-\frac{1}{3}-1+3\right)-(9-9-9)$$

$$=\frac{5}{3}+9=\frac{32}{3}$$ ※

(　C　) 22. 拋物線 $y=x^2$ 與直線 $y=x$ 所圍之區域面積為

(A) $\frac{1}{2}$　(B) $\frac{1}{3}$　(C) $\frac{1}{6}$　(D) 1　平方單位。



$x^2=x$

$x^2-x=0$

$x(x-1)=0$

$x=0,1$

$$A=\int_0^1 (x-x^2)\,dx$$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{6}$$ #

(A) 23. 兩曲線 $y=x^2-4x-1$ 與 $y=-x^2+5$ 所圍之區域面積為

(A) $\frac{64}{3}$ (B) $\frac{32}{3}$ (C) 18 (D) 27 平方單位。

解 $\begin{cases} y=x^2-4x-1 \\ y=-x^2+5 \end{cases}$ 得

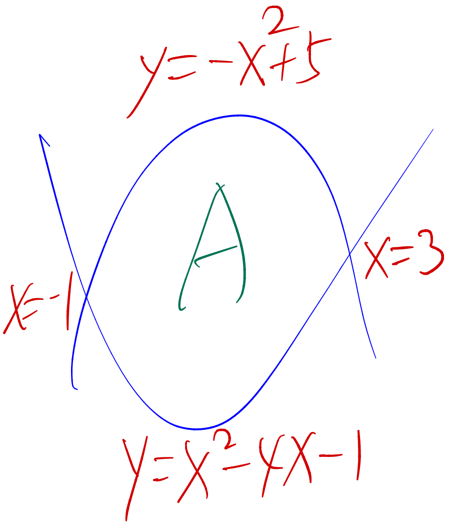
$x^2-4x-1=-x^2+5$

$2x^2-4x-6=0$

$x^2-2x-3=0$

$\begin{matrix} 1 & & +1 \\ & \times & \\ 1 & & -3 \end{matrix}$

$(x+1)(x-3)=0 \rightarrow x=-1, 3$



$A=\int_{-1}^{3}[(-x^2+5)-(x^2-4x-1)]dx$

$=\int_{-1}^{3}(-2x^2+4x+6)dx$

$=\left(-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x\right)\Big|_{-1}^{3}$

$=(-18+18+18)-\left(\frac{2}{3}+2-6\right)$

$=18+4-\frac{2}{3}$

$=\frac{64}{3}$ ※

(　B　) 24. 已知某一地區 t 年內的人口成長變化率為 $f(t)=24t+180t^2$（$0\le t\le 3$），試求此地區 3 年內的人口數共增加多少人？

(A) 1800 人　(B) 1728 人　(C) 1886 人　(D) 2016 人。

$$\int_0^3 (24t+180t^2)\,dt$$

$$=\left(12t^2+60t^3\right)\Big|_0^3$$

$$=108+1620$$

$$=1728\text{(人)}$$

\#

(　B　) 25. 設某遙控器製造廠在開工 t 小時的生產效率為 $f(t)=-3t^2+24t+25$（$0\le t\le 5$），則此製造廠在第 1 個小時所生產的遙控器數量為　(A) 35　(B) 36　(C) 38　(D) 40　個。

$$\int_0^1 (-3t^2+24t+25)\,dt$$

$$=\left(-t^3+12t^2+25t\right)\Big|_0^1$$

$$=-1+12+25$$

$$=36 \ \#$$