

【C4 習作 4-1】

1. 試判斷下列數列為收斂或發散：

$$(1) \left\langle \left(\frac{99}{100} \right)^n \right\rangle \quad (2) \left\langle \left(\frac{100}{99} \right)^n \right\rangle \quad (3) \langle 100n - 99 \rangle$$

2. 試求下列各式之極限值：

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 5n}{n^2 + n + 1}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 5n - 1}{3n^2 - n + 10}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n + 6}{n^2 - 4n + 3}$$

3. 試求下列各式之極限值：

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2}{n^2 - 4n + 9}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{n+5} + \frac{100}{n+1} \right)$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{2n+1} - \frac{n^2}{2n-1} \right)$$

4. 試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$ 之值。(提示：先求分子之級數和)

5. 試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 3^n}{4^n + 2^n}$ 之值。

6. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $2n+3 \leq (n+1)a_n \leq 2n+5$ (對所有的 n 均成立), 試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 。(提示: 利用夾擠定理)

7. 試求無窮等比級數 $1 + \frac{2}{7} + \frac{4}{49} + \frac{8}{343} + \dots$ 之值。

8. 試將下列循環小數化成分數：

(1) $0.\overline{56}$ (2) $0.5\overline{6}$

9. 已知 a 、 b 是實數，若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + 3n}{bn + 18} = \frac{1}{2}$ ，試求 a 、 b 。

10. 古老神話故事中，一隻大神龜背上背負著 2 隻中烏龜，每隻中烏龜的體重是大神龜的 $\frac{1}{8}$ ，而每隻中烏龜又背負著 2 隻小烏龜，小烏龜體重也是中烏龜的 $\frac{1}{8}$ ，依此規律，每隻小烏龜又背負著更小的烏龜，如此一層層無止盡地向上堆疊。假設傳說中大神龜的重量是三千石，試問所有大大小小烏龜全部的總重量是多少石？（註：石是古代重量單位，1 石 = 120 斤）

【C4 習作 4-2】

1. 已知 $f(x)$ 為多項式函數且 $\int_0^5 f(x)dx = 5$, $\int_5^8 f(x)dx = 3$,

$$\int_5^{10} f(x)dx = -2 ,$$

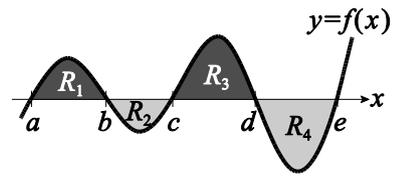
試求下列各值：

$$(1) \int_0^{10} f(x)dx \quad (2) \int_0^8 f(x)dx \quad (3) \int_8^{10} f(x)dx$$

2. 兩多項式函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ ，已知 $\int_1^3 f(x)dx = 6$ ， $\int_1^3 g(x)dx = -1$ ，

試求 $\int_1^3 [4f(x) - 5g(x)]dx$ 。

3. 如圖，四個鋪色區域面積分別為 $R_1 = 5$ 、 $R_2 = 4$ 、 $R_3 = 6$ 、 $R_4 = 8$ ，試求定積分 $\int_a^e f(x) dx$ 。



4. 已知多項式函數 $F(x)$ 之導函數 $F'(x) = -x^2 + 4x - 1$ ，試求 $F(x)$ 。

5. 試求下列反導函數：

$$(1) \int (x^2 - 12x + 11) dx$$

$$(2) \int (\sqrt{x} + 1)^2 dx$$

6. 試求 $\int (3x+1)(x-1)dx$ 。

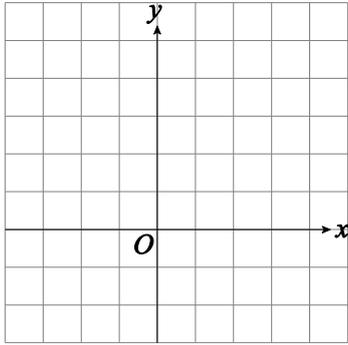
7. 試求 $\int (x-1)(x^2+x+1)dx$ 。

8. 試求 $\int (9x+1)^3 dx$ 。

9. 試求 $\int \frac{2x}{(x^2+1)^3} dx$ 。

10. 絕對值函數 $y = |x|$ 為連續函數，請畫出其函數圖形，並利用圖形求定積分

$$\int_{-3}^3 |x| dx \circ$$



【C4 習作 4-3】

1. 試求下列定積分之值：

$$(1) \int_0^2 (x+1) dx \quad (2) \int_0^1 x\sqrt{x} dx$$

2. 試求下列定積分之值：

$$(1) \int_{-1}^1 (3x^2 - x + 1) dx$$

$$(2) \int_1^3 (1-x)^2 dx$$

3. 試求定積分 $\int_{-4}^1 |x+2| dx$ 。

4. 設分段函數 $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{當 } x < 1 \\ x^2, & \text{當 } x \geq 1 \end{cases}$ ，試求定積分 $\int_{-2}^3 f(x) dx$ 。

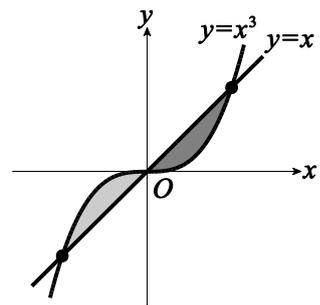
5. 試求定積分 $\int_0^1 [x(x^2+1)^3] dx$ 。

6. 試求函數 $y = 3x^2$ 圖形在 $x = 1$ 、 $x = 2$ 與 x 軸所圍區域面積。

7. 試求直線 $y = x - 1$ 與拋物線 $y = x^2 + x - 5$ 所圍區域面積。

8. 假設一物體受外力 $F(x) = 4x + 5$ (x 單位：公尺， F 單位：牛頓) 的作用下，沿著與力 $F(x)$ 相同方向從 $x = 1$ 移動到 $x = 6$ 處，試求外力 $F(x)$ 所作的功為多少焦耳？

9. 已知 $y = x^3$ 與 $y = x$ 所圍之區域如右圖之鋪色區塊，試求此區塊之面積和。



10. 已知一物體作直線運動其速度與時間的平方成正比，從時間 $t=0$ 開始 2 秒後物體移動 8 公尺，試求自開始經 5 秒鐘後物體移動的距離。

【C4 自我評量 ch4】

(C) 1. 試判斷下列數列何者為發散數列？

(A) $\left\langle \frac{100}{n} \right\rangle$ (B) $\left\langle \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\rangle$ (C) $\langle (-1)^n \rangle$ (D) $\left\langle \frac{2n+5}{n+1} \right\rangle$ 。

(A) 2. 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-5}{2n+1} + \frac{2n-11}{4n+3} \right) =$ (A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) 不存在。

(B) 3. 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2n^2} =$ (A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) 0。

(D) 4. 無窮等比級數之和： $\frac{2}{3}-1+\frac{3}{2}-\frac{9}{4}+\cdots=$

(A) $\frac{4}{15}$ (B) $\frac{15}{4}$ (C) $-\frac{4}{3}$ (D) 不存在。

(B) 5. 若無窮數列 $\left\langle \left(\frac{1-2x}{5} \right)^n \right\rangle$ 收斂，則實數 x 的範圍為

(A) $-2 \leq x \leq 3$ (B) $-2 \leq x < 3$

(C) $-2 < x \leq 3$ (D) $x > 3$ 或 $x < -2$ 。

(A) 6. 若無窮等比級數 $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a}{2}\right)^k$ 之極限值為 3，則 $a =$

- (A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $-\frac{3}{2}$ (D) $-\frac{2}{3}$ 。

(C) 7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin n\theta$ 之值為 (A) -1 (B) 1 (C) 0 (D) 不存在。

(提示： $-1 \leq \sin n\theta \leq 1$)

(B) 8. 將 $0.\overline{741}$ 化成分數為 (A) $\frac{741}{999}$ (B) $\frac{734}{990}$ (C) $\frac{734}{999}$ (D) $\frac{714}{990}$ 。

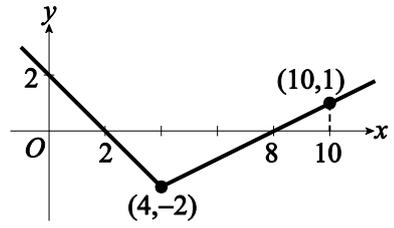
(A) 9. 已知 $f(x)$ 為多項式函數且 $\int_{-1}^0 2f(x)dx = -4$, $\int_0^5 3f(x)dx = 9$, 則

$$\int_{-1}^2 f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx = \quad (\text{A}) 1 \quad (\text{B}) 2 \quad (\text{C}) 3 \quad (\text{D}) 4 \circ$$

(B) 10. 若 $\int_{-1}^1 f(x) dx = 15$ 且 $\int_{-1}^8 f(x) dx = 5$, 則 $\int_1^8 f(x) dx =$

(A) 10 (B) -10 (C) 20 (D) -20 .

- (C) 11. 如右圖，設連續函數 $f(x)$ 圖形包含兩線段，定積分 $\int_0^{10} f(x)dx$ 之值為 (A) 9 (B) 3 (C) -3 (D) 6。



(B) 12. 試求 $\int \frac{x^3-1}{x^2} dx =$

(A) $x^2 + \frac{1}{x} + c$ (B) $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + c$ (C) $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + c$ (D) $x^2 - \frac{1}{x} + c$ °

(C) 13. 試求 $\int(x+3)(x-3)dx =$

(A) $\frac{x^4}{4} - 9x^2 + c$ (B) $x^2 - 9x + c$ (C) $\frac{x^3}{3} - 9x + c$ (D) $x^3 - 9x + c$.

(C) 14. 下列何者是 $x^2 + x$ 之反導函數？

(A) $2x+1$ (B) $\frac{1}{2}(x^2+x)^2$ (C) $\frac{1}{3}(x+1)^3 - \frac{1}{2}(x+1)^2$

(D) $(x+1)(x^2+1)$ 。

(C) 15. 試求 $\int(4x-3)^3 dx =$

(A) $\frac{1}{4}(4x-3)^4 + c$ (B) $(4x-3)^4 + c$ (C) $\frac{1}{16}(4x-3)^4 + c$

(D) $(4x-3)^3 + c$.

(B) 16. 已知多項式函數 $F(x)$ 之導函數 $F'(x)=1-3x^2$ 且 $F(0)=2$ ，試求

$$F(x)=$$

(A) $1-3x^2$ (B) $x-x^3+2$ (C) $x-3x^3+2$

(D) $x-x^3+c$ ， c 為常數。

(B) 17. 定積分 $\int_1^4 \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}} \right) dx =$ (A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{8}{3}$ (C) $\frac{16}{3}$ (D) $\frac{13}{3}$ 。

(A) 18. 定積分 $\int_0^1 (1-2x)^3 dx =$ (A) 0 (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1。

(B) 19. 定積分 $\int_0^2 x(1-x^2)^2 dx =$ (A) 7 (B) $\frac{14}{3}$ (C) $\frac{13}{3}$ (D) $\frac{7}{3}$ 。

(C) 20. 已知 $\int_{-2}^2 (ax+b)dx = -4$, $\int_0^4 (bx+a)dx = 20$, 則 $a+b =$

(A) 8 (B) 7 (C) 6 (D) 5 .

(B) 21. $y=3-2x-x^2$ 的圖形與 x 軸所圍成之區域面積為

(A) 16 (B) $\frac{32}{3}$ (C) 28 (D) $\frac{28}{3}$ 平方單位。

(C) 22. 拋物線 $y = x^2$ 與直線 $y = x$ 所圍之區域面積為

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) 1 平方單位。

(A) 23. 兩曲線 $y = x^2 - 4x - 1$ 與 $y = -x^2 + 5$ 所圍之區域面積為

(A) $\frac{64}{3}$ (B) $\frac{32}{3}$ (C) 18 (D) 27 平方單位。

(B) 24. 已知某一地區 t 年內的人口成長變化率為 $f(t) = 24t + 180t^2$

($0 \leq t \leq 3$)，試求此地區 3 年內的人口數共增加多少人？

(A) 1800 人 (B) 1728 人 (C) 1886 人 (D) 2016 人。

(B) 25. 設某遙控器製造廠在開工 t 小時的生產效率為

$f(t) = -3t^2 + 24t + 25$ ($0 \leq t \leq 5$)，則此製造廠在第 1 個小時所

生產的遙控器數量為 (A) 35 (B) 36 (C) 38 (D) 40 個。