

【C3 習作 3-1】

1. 在空間中，下列敘述何者正確？

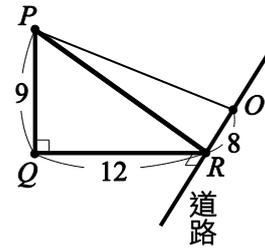
(A)過已知直線外一點 A ，恰有一平面與此直線平行

(B)過已知直線外一點 A ，恰有一平面與此直線垂直

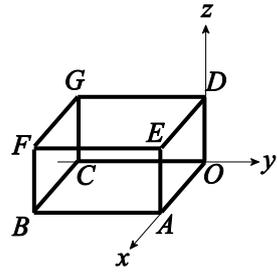
(C)空間中三直線 L_1, L_2, L_3 ，若 $L_1 \perp L_2$ 且 $L_1 \perp L_3$ ，則 $L_2 \parallel L_3$

(D)若直線 L 平行平面 E ，則包含 L 之平面必平行 E

2. 如圖所示，阿倫爬上 9 公尺高的建物頂端 P 點俯看筆直道路上一物體 O ，已知建物底部 Q 與道路上 R 點相距 12 公尺，且 \overline{OR} 為 8 公尺，試求 P 、 O 之間的距離。



3. 右圖是空間中的長方體，已知 $B(3, -4, 0)$ 、 $G(0, -4, 2)$ ，試求 E 點與 F 點坐標。

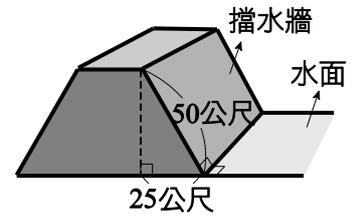


4. 為了計算某結構體的安全係數，技師需測量其中兩個受力點 P 、 Q 之間的距離，已知 $P(2,3,5)$ 、 $Q(4,-3,2)$ ，試求 \overline{PQ} 。

5. 已知 $A(1,2,-1)$ 、 $B(2,1,3)$ 且 P 點在 z 軸上，若 $\overline{AP} = \overline{BP}$ ，試求 P 點坐標。

6. 空間中一三角形之頂點分別為 $A(5,4,7)$ 、 $B(-1,1,9)$ 、 $C(2,6,1)$ ，試求此三角形之周長。

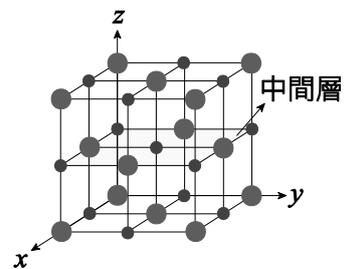
7. 修築水壩時，由於顧慮到水壩的堅固性，故需測量水壩擋水牆與水面之夾角，已知水壩結構體的側面是一個等腰梯形，如圖所示，試求水壩擋水牆與水面所夾的兩面角。



8. 已知空間中一點 $P(-1,4,3)$ ，試求 P 點到 x 軸的距離與到 yz 平面的距離之和。

9. 空間中，已知 P 點在第一卦限且到 x 軸、 y 軸、 z 軸之距離分別為 $\sqrt{10}$ 、 5 、 $\sqrt{17}$ ，試求 P 點坐標。

10. 右圖是食鹽 (NaCl) 晶格示意圖，其中小點是鈉離子，大點是氯離子。假設它是由 8 個鍵長為 1 個單位的小正立方體所構成，今建立空間坐標系後，試求中間層 4 個氯離子的坐標。



【C3 習作 3-2】

1. 空間中兩點 $P(-1,4,5)$ 、 $Q(2,2,-1)$ ，試求 \overrightarrow{PQ} 與其長度。

2. 空間中，已知 $A(1,1,1)$ 、 $B(3,2,4)$ 、 $C(4,2,3)$ 、 $D(5,4,2)$ ，試求：

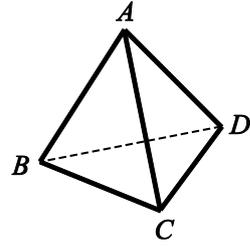
(1) $\vec{AB} + \vec{CD}$ (2) $2\vec{AB} - 3\vec{CD}$ 。

3. 已知平行四邊形 $ABCD$ 的三頂點坐標 $A(1,2,3)$ 、 $B(4,3,-1)$ 、 $C(2,-1,5)$ ，
試求 D 點坐標。

4. 若空間中三點 $A(3,1,-1)$ 、 $B(2,a,3)$ 、 $C(4,-3,-5)$ 共線，試求 a 值。

5. 如右圖，正四面體（四個面皆為正三角形） $ABCD$ 中，若 $\overline{AB} = 4$ ，
試求：

(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ (2) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD}$



6. 已知空間中三點 $A(4,1,1)$ 、 $B(0,6,0)$ 、 $C(-1,1,2)$ ，試求 $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$ 。

7. 若 $\vec{a} = (1, -1, \sqrt{2})$, $\vec{b} = (0, 1, 0)$, 試求 \vec{a} 與 \vec{b} 之夾角。

8. 已知三角形 ABC 的頂點坐標為 $A(1, 2, 0)$ 、 $B(3, 3, -1)$ 、 $C(-2, 4, 2)$ ，試求 \vec{AC} 在 \vec{AB} 上之正射影。

9. 在空間中，已知 $B(1,2,3)$ 、 $C(0,-3,2)$ ，且 A 為 x 軸上一點，若 \overrightarrow{AB} 垂直 \overrightarrow{AC} ，試求 A 點坐標。

10 若 $\vec{a} = (1, 2, -1)$ ， $\vec{b} = (5, 1, 4)$ ，試求 $\vec{a} + \vec{b}$ 與 $2\vec{a} - \vec{b}$ 之夾角。

【C3 習作 3-3】

1. 已知 $\vec{a} = (1, 2, 3)$ ， $\vec{b} = (3, -1, 2)$ ，試求 $\vec{a} \times \vec{b}$ 與 $\vec{b} \times \vec{a}$ 。

2. 阿成使用扳手機緊螺帽，若以支點（螺帽重心）作為空間坐標系的原點，測得支點到施力點的向量 $\vec{r} = (1, 2, -2)$ ，作用力 $\vec{F} = (0, -1, 5)$ ，試求阿成使用扳手產生的力矩。（提示：力矩 $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ ）

3. 已知 \vec{c} 同時與 $\vec{a} = (1, 2, 3)$ 和 $\vec{b} = (2, 3, 5)$ 垂直，且 $|\vec{c}| = 2\sqrt{3}$ ，試求 \vec{c} 。

4. 試求下列各三階行列式的值：

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

5. 已知 $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$ ，試求 $\begin{vmatrix} 4-x & 2 & 1 \\ -5 & 3+x & 2 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 之值。

6. 試利用降階法求下列各三階行列式的值：

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} \qquad (2) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

7. 已知 $\vec{a} = (3, 1, 2)$ ， $\vec{b} = (2, -1, 3)$ ，試求由 \vec{a} 與 \vec{b} 為鄰邊所圍成的平行四邊形面積。

8. 設 $A(1, -1, 0)$ 、 $B(0, 1, 0)$ 、 $C(2, 3, 4)$ 、 $D(-1, 1, 3)$ 為空間中四點，試求由 \vec{AB} 、 \vec{AC} 、 \vec{AD} 所展成的平行六面體體積。

9. 已知 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 8$ ，試求 $\begin{vmatrix} a_1 + 2a_2 & a_3 & 2a_3 + a_2 \\ b_1 + 2b_2 & b_3 & 2b_3 + b_2 \\ c_1 + 2c_2 & c_3 & 2c_3 + c_2 \end{vmatrix}$ 之值。

10. 若空間中四點 $A(1,1,1)$ 、 $B(2,1,0)$ 、 $C(1,2,1)$ 、 $D(a,a,3)$ 共平面，試求 a 值。

(提示： A 、 B 、 C 、 D 四點共平面，則 \overrightarrow{AB} 、 \overrightarrow{AC} 、 \overrightarrow{AD} 無法展成一個平行六面體)

【C3 習作 3-4】

1. 已知平面 E 上一點 $A(1,2,3)$ ，且 $(2,-1,1)$ 為平面 E 的一個法向量，試求平面 E 的方程式。

2. 自原點 $(0,0,0)$ 向平面 E 作垂線，已知其垂足為 $(1,3,-2)$ ，試求平面 E 的方程式。

3. 試求通過 $A(5,4,3)$ 且與 yz 平面平行的平面方程式。

4. 空間中有一 $\triangle ABC$ ，其三頂點為 $A(-1,1,2)$ 、 $B(2,0,-3)$ 、 $C(5,1,-2)$ ，試求包含 $\triangle ABC$ 的平面方程式。

5. 阿志擅長木工，從簡單的小玩具到生活用品都喜歡自己動手做。今為實現童年夢想，阿志嘗試自己蓋樹屋，其中屋頂的部分是利用兩片長木板相互交接而成，已知樹屋為鈍角屋頂，且兩片木板的平面方程式分別為 $2x + y + z = 15$ 與 $x - y + 2z = 30$ ，試求樹屋屋頂所形成的夾角。

6. 由建築大師貝聿銘所設計的玻璃金字塔位於羅浮宮中央廣場，是一座用玻璃和金屬鋼架建造的金字塔形結構。假設其入口斜面的方程式為 $3x + y + z - 18 = 0$ ，若在上方鋼架安裝一盞吊燈，吊燈坐標為 $(2, -5, 6)$ ，試求從吊燈散射到斜面之光線傳播的最短距離。

7. 試求兩平行平面 $E_1: 3x + 2y - z + 6 = 0$ 與 $E_2: 3x + 2y - z - 8 = 0$ 的距離。

8. 已知平面 $E_1: x+2y+z+1=0$ 與 $E_2: ax-y+z-5=0$ 互相垂直，試求 a 值。

9. 已知平面 E 與平面 $F: 3x+2y+z-8=0$ 平行，且其與三個坐標軸之截距和為 11，試求平面 E 的方程式。

10. 空間中有一平面 $E: x + y - 2z + 3 = 0$ 與 $A(1, 2, -3)$ 、 $B(-5, -1, 0)$ 兩點，若 \overline{AB} 交平面 E 於 C 點，試求 $\overline{AC}:\overline{BC}$ 。

【C3 自我評量 ch3】

(D) 1. 下列條件何者不能決定一個平面？

(A)過不共線的三點 (B)包含兩相交直線

(C)包含兩平行直線 (D)包含一直線及任意一點。

- (A) 2. 從空間中一點 P 向 xy 平面作垂線，其垂足為 A ，從 A 點再向 xy 平面上一直線 L 作垂線，其垂足為 B ，並在 L 上找到一點 C ，已知 $\overline{BC} = 8$ ， $\overline{PC} = 17$ ， $\overline{AB} = 9$ ，則 $\overline{PA} =$
- (A)12 (B)13 (C)15 (D)25。

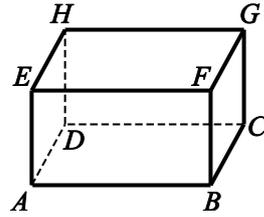
(C) 3. 關於長方體 $ABCD-EFGH$ 之敘述何者正確？

(A) 平面 ABD 與平面 BCD 平行

(B) 直線 AB 與直線 FG 平行

(C) 直線 AE 與直線 EF 垂直

(D) 直線 BF 與直線 DH 歪斜。



(B) 4. 若空間中點 $P(3x-y, 8, 3)$ 與點 $Q(1, 2x+3y, z)$ 重合，則 $x+y+z =$

(A)5 (B)6 (C)7 (D)8。

(B) 5. 已知空間中三點 $A(2,0,0)$ 、 $B(1,1,\sqrt{2})$ 、 $C(1,-1,\sqrt{2})$ ，則 $\triangle ABC$

為

- (A) 直角三角形 (B) 正三角形
(C) 不等邊三角形 (D) 鈍角三角形。

- (A) 6. 設 O 為原點，若 \overline{OA} 在 xy 平面、 yz 平面及 xz 平面之投影長分別為 3、4、5，則 $\overline{OA} =$ (A)5 (B)12 (C) $9\sqrt{2}$ (D)25。

(C) 7. 已知空間中四點 $A(1,0,1)$ 、 $B(3,2,4)$ 、 $C(4,2,3)$ 、 $D(5,5,7)$ ，若

$$5\vec{AB} - 2\vec{CD} = (a, b, c)，則 a + b + c =$$

(A)30 (B)29 (C)19 (D)23。

(A) 8. 已知 $\vec{a} = (1, -2, 3)$, $\vec{b} = (2, 4, 5)$, 則 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$

(A)9 (B)25 (C)-6 (D)-12 .

(C) 9. 已知 O 為原點且 $A(-1,3,2)$ 、 $B(-3,2,-1)$ 為空間中兩點，則 \vec{OA} 與 \vec{OB} 之夾角為 (A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 120° 。

- (B) 10. 設 $\vec{a} = (1, \sqrt{2}, -1)$, $\vec{b} = (-1, 0, k)$, 若 \vec{a} 與 \vec{b} 之夾角為 135° ,
則 $k =$ (A)0 (B)1 (C)-1 (D)2 。

(D) 11. 設 $\vec{a} = (2, 1+t, 3)$, $\vec{b} = (t, 4, -2)$, 若 \vec{a} 與 \vec{b} 垂直 , 則 $t =$

- (A)1 (B)2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{3}$ 。

(C) 12. 已知空間中三點 $A(1,-1,3)$ 、 $B(2,1,2)$ 、 $C(2,-2,3)$ ，則

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \text{(A) } 3 \quad \text{(B) } \sqrt{10} \quad \text{(C) } \sqrt{11} \quad \text{(D) } \sqrt{13} \text{。}$$

(C) 13. 已知 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 5$, 則 $\begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix} =$

(A)10 (B)15 (C)5 (D)0。

(B) 14. 已知 $\begin{vmatrix} 1 & a & x \\ 1 & b & y \\ 1 & c & z \end{vmatrix} = 3$, 則 $\begin{vmatrix} a+x & 1 & x \\ b+y & 1 & y \\ c+z & 1 & z \end{vmatrix} =$

(A)3 (B)-3 (C)0 (D)1。

(C) 15. 小銘使用六角扳手旋轉螺帽，若以六角扳手 L 形轉彎處作為

空間坐標系的原點，測得支點到施力點的向量 $\vec{r} = (1, 2, -3)$ ，

作用力 $\vec{F} = (2, 0, -1)$ ，則小銘使用扳手產生的力矩大小為

(A) $3\sqrt{10}$ (B) $10\sqrt{3}$ (C) $3\sqrt{5}$ (D) $5\sqrt{3}$ 。

(提示：力矩 $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$)

(A) 16. 行列式 $\begin{vmatrix} 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \\ 41 & 42 & 43 \end{vmatrix}$ 的值为 (A)0 (B)234 (C)531 (D)46。

- (A) 17. 已知 $\vec{OA}=(2,0,1)$, $\vec{OB}=(1,1,2)$, $\vec{OC}=(-1,3,-1)$, 則由此三個
向量所展成的平行六面體體積為
(A)10 (B)12 (C)15 (D)20 。

- (D) 18. 已知由空間中三向量 \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} 所展成的平行六面體體積為 6，則由 $3\vec{a}$ 、 $-2\vec{b}$ 、 $5\vec{c}$ 所展成的平行六面體體積為
- (A)90 (B)120 (C)150 (D)180。

(D) 19. 關於平面 $E: 2x - 2y + z = 5$ 之敘述何者有誤？

(A) 點 $(1, -1, 1)$ 在平面 E 上

(B) $(-2, 2, -1)$ 是平面 E 的一個法向量

(C) 平面 $x - y - 4z = 3$ 與平面 E 垂直

(D) 點 $(1, 0, 1)$ 到平面 E 的距離為 $\frac{1}{3}$ 。

(B) 20. 空間中兩點 $A(4,3,-1)$ 、 $B(5,2,0)$ ，若直線 AB 垂直平面 E 於

A 點，則平面 E 的方程式為

(A) $x - y + z = 3$ (B) $x - y + z = 0$

(C) $x + y - z = 8$ (D) $x + y - z = 7$ 。

(C) 21. 設平面 $ax+by+cz=1$ 通過 P 、 Q 兩點，且 $\overrightarrow{PQ}=(1,2,\sqrt{3})$ ，則

$$\overrightarrow{PQ} \cdot (a,b,c) = \text{(A)6 (B)12 (C)0 (D)3} \circ$$

(A) 22. 通過空間中三點 $A(-3,1,2)$ 、 $B(5,3,-7)$ 、 $C(1,7,0)$ 的平面方程

式為

(A) $5x - 2y + 4z + 9 = 0$ (B) $2x - 5y + 4z + 3 = 0$

(C) $4x + 2y - 5z + 20 = 0$ (D) $5x - 4y - 2z + 23 = 0$ °

- (D) 23. 已知平面 E 過 $A(1,0,0)$ 、 $B(0,2,0)$ 、 $C(0,0,-2)$ 三點，則原點到平面 E 的距離為 (A) $\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{6}$ (C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 。

(B) 24. 兩平行平面 $E_1: 2x - 3y + 6z + 1 = 0$ 與 $E_2: 4x - 6y + 12z - 5 = 0$ 的

距離為 (A)1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{7}{2}$ 。

- (D) 25. 若兩平行平面 $E_1: x - y + z = k$ 與 $E_2: x - y + z = 4$ 的距離為 $\sqrt{3}$,
則 $k =$ (A)3 或 -3 (B)5 或 -4 (C)4 或 -5 (D)7 或 1。