1. **分式：**

將 $f(x)\div g(x)$ 表成 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$（$g(x)$ 為非零多項式），我們稱之為分式，例如：$\dfrac{x+1}{x+2}$。

2. **分式的四則運算：**

(1) 加、減法：$\dfrac{f(x)}{g(x)}\pm\dfrac{h(x)}{k(x)} \quad\Rightarrow\quad$ 通分 $=\dfrac{f(x)k(x)\pm g(x)h(x)}{g(x)k(x)}$。

(2) 乘法：$\dfrac{f(x)}{g(x)}\times\dfrac{h(x)}{k(x)}=\dfrac{f(x)h(x)}{g(x)k(x)}$。

(3) 除法：$\dfrac{f(x)}{g(x)}\div\dfrac{h(x)}{k(x)}=\dfrac{f(x)}{g(x)}\times\dfrac{k(x)}{h(x)}=\dfrac{f(x)k(x)}{g(x)h(x)}$。

1 老師講解 分式的四則運算 學生練習

化簡

$$\frac{x^2+5x-6}{x^2-1}\times\frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}\div\frac{x-3}{x^2+2x+1}\text{。}$$

想法 分式乘除運算若有公因式可先約分，再依分子分母相乘規則。

化簡 $\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{4x}{x^2-4}$。

3. 部分分式：

將一個分式拆解成幾個真分式的和，稱為部分分式，

例如：$\dfrac{3x-4}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}$。

觀念補充 //

部分分式常見的基本類型：

❶ $$\frac{\alpha x+\beta}{(x-a)(x-b)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}$$

❷ $$\frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{(x-a)\left(x^2+bx+c\right)}=\frac{A}{x-a}+\frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$$

❸ $$\frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{(x-a)^3}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}+\frac{C}{(x-a)^3}$$

2 老師講解　解部分分式　學生練習

已知 $\dfrac{5x-6}{x^2-2x}$ 可化為 $\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x}$，

試求 A、B。

想法　原式兩邊同乘以分母之 L.C.M，再兩邊比較係數。

化 $\dfrac{2x-1}{x^2-x-2}$ 為部分分式。

3 老師講解 解部分分式 學生練習

若 $\dfrac{5x+5}{(2x+1)\left(x^2+1\right)}=\dfrac{A}{2x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$，

試求 A、B、C。

化 $\dfrac{x^2}{(x-1)\left(x^2+x-1\right)}$ 為部分分式。

4 老師講解 解部分分式 學生練習

若 $\dfrac{3x^2+2x+1}{(x+2)^3}$

$$=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{C}{(x+2)^3},$$

試求 A、B、C。

想法　利用綜合除法連續除以 $(x+2)$ 求出對應項係數。

若 $\dfrac{x^3-2x^2-2}{(x+1)^4}=\dfrac{A}{(x+1)}+\dfrac{B}{(x+1)^2}$

$$+\frac{C}{(x+1)^3}+\frac{D}{(x+1)^4},$$

試求 A、B、C、D。

4. **分式方程式：**

方程式中含有分式者稱為分式方程式，其解必須驗算，不使分母為 0。

5

老師講解

解分式方程式

學生練習

試解分式方程式

$$\frac{x^2+3x}{(3x+1)(x+1)}+\frac{x}{x+1}=1\text{。}$$

想法 原式同乘以分母之 L.C.M 化成整式方程式求解，但解出的根需驗算使分母不為零。

試解分式方程式

$$\frac{4}{(x-1)(x-3)}=\frac{x}{3-x}+\frac{2}{1-x}\text{。}$$

1. 根式運算（下列 A、B 均使根式有意義）：

(1) $\sqrt{A}\times\sqrt{B}=\sqrt{AB}$

(2) $\sqrt{A}\div\sqrt{B}=\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}=\sqrt{\dfrac{A}{B}}$（$B\neq 0$）

(3) $\sqrt[3]{A}\times\sqrt[3]{B}=\sqrt[3]{AB}$

(4) $\sqrt[3]{A}\div\sqrt[3]{B}=\dfrac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B}}$（$B\neq 0$）

觀念補充 //

有理化公式：

平方公式：$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=a-b$。

立方公式：$\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a+b$，

$\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a-b$。

6 老師講解　根式化簡　學生練習

試化簡下列各式：

(1) $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$　(2) $\left(\sqrt[3]{3}+2\right)\left(\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}+4\right)$

想法

立方公式：

$\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a+b$ 。

試化簡下列各式：

(1) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$　(2) $\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)$

2. 雙重根式：

$\sqrt{(x+y)\pm 2\sqrt{xy}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$（其中 $x>y>0$，大數放前小數放後）。

7 老師講解　雙重根式　學生練習

試化簡下列各式：

(1) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$　(2) $\sqrt{8-\sqrt{28}}$

想法　$\sqrt{(x+y)\pm 2\sqrt{xy}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$（$x>y>0$）。

試化簡下列各式：

(1) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$　(2) $\sqrt{14-6\sqrt{5}}$