

## 1. 餘式定理：

(1)  $f(x)$  除以  $(x - a)$  的餘式為  $f(a)$ ；反之， $f(a)$  為  $f(x)$  除以  $(x - a)$  的餘式。

(2)  $f(x)$  除以  $(ax - b)$  的餘式為  $f\left(\frac{b}{a}\right)$ 。



### 觀念補充 //

$f(x)$  除以二次式  $(x - \alpha)(x - \beta)$  時之餘式假設法：

令  $f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)Q(x) + ax + b$  或  $f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)Q(x) + a(x - \alpha) + f(\alpha)$ 。

**1**

老師講解

## 餘式定理之應用

學生練習

試求  $(x^3 + 6x^2 + 5x + 2)^2$  除以  $x + 1$  之餘式。

**想法**  $f(x)$  除以  $(x - a)$  的餘式為  $f(a)$ 。

試求  $(x^4 - 7x^2 + 5x + 2)^2$  除以  $x - 1$  之餘式。

**2**

老師講解

## 餘式定理之應用

學生練習

$f(x) = 216x^5 - 420x^4 + 6x^3 - 70x^2 + 24x - 10$ ，試求  $f(2)$ 。

已知  $f(x) = 123x^4 - 234x^3 - 36x^2 + 48x - 50$ ，試求  $f(2)$ 。

3

老師講解

## 利用餘式定理求餘式

學生練習

多項式  $f(x)$  以  $x-1$  除之餘式為 2，以  $x+2$  除之餘式為  $-4$ ，則  $f(x)$  以  $x^2+x-2$  除之餘式為何？

想法 令  $f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)Q(x) + ax + b$ 。

設  $f(x)$  除以  $x+2$  餘 2，除以  $x-3$  餘  $-1$ ，試求  $f(x)$  除以  $(x+2)(x-3)$  的餘式為何？

### 1. 因式與倍式：

若  $f(x) = g(x) \times h(x)$ ，則  $g(x)$  與  $h(x)$  為  $f(x)$  的因式， $f(x)$  為  $g(x)$  與  $h(x)$  的倍式，記做  $g(x) \mid f(x)$ 、 $h(x) \mid f(x)$ 。

### 2. 因式定理：

$(x - a)$  為多項式  $f(x)$  的因式  $\Leftrightarrow f(a) = 0$ 。

4

老師講解

## 因式定理

學生練習

設  $x^3 + mx^2 + 7x - 3$  有  $x - 1$  之因式，試求  $m$  之值。

想法  $(x - a)$  為多項式  $f(x)$  的因式  $\Leftrightarrow f(a) = 0$ 。

設  $x + 1$  為  $x^3 + ax^2 - 3x + 2$  之因式，試求  $a$  之值。

5

老師講解

## 利用餘式定理與因式定理求多項式

學生練習

已知  $f(x)$  為二次多項式，若  
 $f(1) = f(-2) = 0$  且  $f(3) = 20$ ，  
試求  $f(x)$ 。

想法

$f(1) = f(-2) = 0$  表  $f(x)$  有  $(x-1)(x+2)$   
之因式。

已知  $f(x)$  為二次多項式，  
若  $f(-1) = f(3) = 0$  且  $f(5) = -24$ ，  
試求  $f(x)$ 。

3. 整係數一次因式檢驗法（牛頓定理）：

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$  是整係數  $n$  次多項式，若  $ax - b$  是  $f(x)$  的因式，則

$$a \mid a_n \text{ 且 } b \mid a_0 \text{。}$$



**6**

老師講解

**整係數一次因式檢驗法**

學生練習

試將  $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$  因式分解。

試將  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x - 9$  因式分解。

#### 4. 公因式與公倍式：

- (1) 互質：當兩個多項式只有常數公因式時，規定其共同因式為 1，稱兩多項式互質。
- (2) 最高公因式：兩個多項式，取它們共同的因式稱為公因式，所有公因式中次數最高者稱為最高公因式，以 H.C.F 表之。
- (3) 最低公倍式：兩個多項式，取它們共同的倍式稱為公倍式，所有公倍式中次數最低者稱為最低公倍式，以 L.C.M 表之。



#### 觀念補充 //

- ❶ 最高公因式與最低公倍式之寫法不唯一，可能差常數倍。
- ❷ 若  $f(x)$ 、 $g(x)$  之首項係數均為 1，則  $f(x) \times g(x) =$  兩者 H.C.F  $\times$  L.C.M。
- ❸ H.C.F  $\mid$  L.C.M 恆成立。

7

老師講解

## 求最高公因式與最低公倍式

學生練習

試求兩多項式  $f(x) = (x+1)(x+3)^2$  與  
 $g(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$  的 H.C.F 與 L.C.M。

想法

H.C.F 取所有公因式中次數最高者，  
L.C.M 取所有公倍式中次數最低者。

試求兩多項式  $f(x) = (x-1)(x-2)$  與  
 $g(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$  的 H.C.F 與 L.C.M。

8

老師講解

## 餘式定理的特殊假設法

學生練習

設  $f(x)$  為三次以上多項式，若以  $x - 1$  除之，得餘式為 8，以  $x^2 + x + 1$  除之，得餘式為  $7x + 16$ ，則以  $x^3 - 1$  除之，所得餘式為何？

已知多項式  $f(x)$ ，若以  $x - 2$  除之，得餘式為 10，以  $x^2 + x + 1$  除之，得餘式為  $x + 1$ ，則以  $(x - 2)(x^2 + x + 1)$  除之，所得餘式為何？