

1. 多項式：

將數及不定元 x 、 y 經由 $+$ 、 $-$ 、 \times 後形成的式子稱為多項式。

例如： $x^2 - x + 1$ 、 $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$ 、 $x^2 - xy + y^2$ 。

我們只討論一種變數的多項式，稱為一元 n 次多項式。



觀念補充 //

多項式之文字符號不可出現在

- ❶ 分母，例如： $\frac{1}{x+1}$ 。
- ❷ 絕對值，例如： $|x+1|$ 。
- ❸ 根號內，例如： $\sqrt{x+1}$ 。

2. 多項式的一般表示法：

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 。其中：

- (1) a_k 表 x^k 項的係數； a_n 稱為首項係數或領導係數。
- (2) 若多項式 $f(x)$ 為 n 次多項式，以 $\deg f(x) = n$ 表示。
- (3) 零次多項式：當 $a_n = \cdots = a_1 = 0$ ，只有 $a_0 \neq 0$ ，稱 $f(x)$ 為零次多項式，例如： $f(x) = 3$ 。
- (4) 零多項式：若係數均為 0，稱 $f(x)$ 為零多項式，例如： $f(x) = 0$ 。

1

老師講解

認識多項式

學生練習

設 $(a-b)x^2 + (2a+3b)x + 8$ 為一次多項式，且一次項係數為 10，試求 a 、 b 之值為何？

想法

$f(x)$ 為一次多項式，則高於一次之係數均為 0。

設 $f(x) = (a-3)x^3 + (b-2)x^2 - bx + a$ 為一次多項式，試求 $f(3) = ?$

3. 多項式的係數：

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

(1) 各項係數和： $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 = f(1)$ 。

(2) 常數項： $a_0 = f(0)$ 。

(3) 偶次項係數和： $a_0 + a_2 + a_4 + \dots = \frac{f(1) + f(-1)}{2}$ 。

(4) 奇次項係數和： $a_1 + a_3 + a_5 + \dots = \frac{f(1) - f(-1)}{2}$ 。

設 $f(x) = (x^3 - 2x + 2)^3$ ，試求展開後：

- (1) 各項係數和。
- (2) 奇次項係數和。
- (3) 偶次項係數和。

設 $f(x) = (8x^3 - 9x^2 - 7x + 9)^3$ 之展開式中各項係數和為 a ，奇次項係數和為 b ，偶次項係數和為 c ，試求 $a + b + c$ 之值。

4. 多項式相等：

(1) 兩個多項式 $f(x)$ 與 $g(x)$ ，若 $f(x) = g(x) \Leftrightarrow$ 二者次數相同，對應項係數相同。

(2) 恆等式定理：設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 次數均不大於 n 次，若有 $n + 1$ 個相異實數，

使 $f(x_k) = g(x_k)$ ， $k = 1, 2, \dots, n + 1$ ，則 $f(x) = g(x)$ 。

3

老師講解

多項式恆等定理

學生練習

$$\text{設 } f(x) = 3x^2 + ax - 6 ,$$

$$g(x) = bx^2 + 4x - c ,$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$ 。若 $f(3) = g(3)$,

$f(5) = g(5)$, $f(7) = g(7)$, 試求 $a + b + c$
之值。

設 $f(x) = (3a + 6)x^3 + (b + 4)x^2 + (c - 2)x + (d + 1)$, 若 $f(11) = f(12) = f(13) = f(14) = 9$, 試求 $a + b + c + d$ 之值。

1. 多項式的加、減法：

將同次項的係數相加、減。

4

老師講解

多項式之加減法運算

學生練習

$$\text{設 } p(x) = x^3 - 2x^2, q(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3,$$

$$r(x) = 5x - 7, \text{ 試求 } p(x) + q(x) - r(x)。$$

$$\text{設 } f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1,$$

$$g(x) = -x^2 + 6x - 2, \text{ 試求 } f(x) - 2g(x)。$$

2. 多項式的乘法：

(1) 運用乘法分配律乘開，再合併同次項。

(2) 乘法公式：

二次公式	三次公式
① $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab \pm b^2$	① $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
② $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	② $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
	③ $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$
	④ $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$

5

老師講解

多項式之乘法運算

學生練習

試求 $(2x^3 + 3x^2 - 4x + 5) \times (4x^2 - 2x + 3)$ 的乘積中， x^3 項的係數。

試求 $(2x^2 + x - 3) \times (x^3 - x^2 + 2x + 5)$ 的乘積中， x^4 項的係數。

3. 多項式的除法：

(1) 除法：利用長除法、分離係數法或綜合除法。

(2) 除法原理：設 $f(x)$ 、 $g(x)$ 為兩多項式且 $g(x) \neq 0$ ，則恰存在兩多項式 $Q(x)$ 及 $r(x)$ 滿足 $f(x) = g(x) \times Q(x) + r(x)$ ，其中 $r(x) = 0$ 或 $\deg r(x) < \deg g(x)$ 。其中 $f(x)$ 稱為被除式， $g(x)$ 為除式， $Q(x)$ 為商式， $r(x)$ 為餘式 \Rightarrow 被除式 = 除式 \times 商式 + 餘式。

6

老師講解

多項式除法之長除法運算

學生練習

若 $2x^3 + x^2 + ax + b$ 除以 $x^2 + x + 1$ 的餘式為 $-4x + 5$ ，則 $a + b = ?$

想法

利用分離係數法之長除法運算，遇缺項要補 0。

若 $2x^3 + 2x^2 + ax + b$ 除以 $x^2 + 2x - 2$ 的餘式為 $x + 3$ ，則 $a + b = ?$

(3) 綜合除法：除式為一次式時，利用綜合除法較簡便。

例如：試求 $x^3 - 3x^2 + 5$ 除以 $x - 2$ 之商式及餘式。

解：利用分離係數法將被除式依降次排列，若有缺項需補 0。

$$\begin{array}{cccc|c}
 1 & -3 & +0 & +5 & \downarrow 2 \\
 \downarrow & & & & \\
 \hline
 1 & -1 & -2 & +1 & \\
 \hline
 \end{array}$$

商式
餘式

商式： $x^2 - x - 2$
 餘式：1

說明：① 除式為 $x - 2$ ，將 2 置於右上角；若除式為 $x + 2$ ，則改寫成 $x - (-2)$ ，將 -2 置於右上角。

② 運算時，上下排數字「相加」。

7

老師講解

多項式除法之綜合除法運算

學生練習

利用綜合除法求 $(x^4 + 3x^3 + 7)$ 除以 $(x + 2)$ 的商式及餘式。

想法

利用綜合除法，將被除式依降次排列，遇缺項要補 0。

利用綜合除法求 $5x^3 - 8x^2 + 3x - 5$ 除以 $x - 2$ 的商式及餘式。



觀念補充 //

- ❶ 若除式為 $ax - b$ ，要先化成 $a\left(x - \frac{b}{a}\right)$ ，以 $\left(x - \frac{b}{a}\right)$ 除之。
- ❷ 比較 $f(x) \div (ax - b)$ 與 $f(x) \div \left(x - \frac{b}{a}\right)$ 差別：

$$\text{令 } f(x) = (ax - b)\underbrace{Q(x)}_{\text{商式}} + \underbrace{r}_{\text{餘式}} \Rightarrow f(x) = a\left(x - \frac{b}{a}\right)Q(x) + r = \left(x - \frac{b}{a}\right) \times \underbrace{aQ(x)}_{\text{商式}} + \underbrace{r}_{\text{餘式}}$$

二者的商式會差 a 倍，餘式不變。

8

老師講解

多項式除法之綜合除法

學生練習

試求 $6x^3 - 5x^2 + 3x - 7$ 除以 $2x - 1$ 的商式及餘式。

綜合除法中，若除式為 $ax - b$ ，要先以
想法 $\left(x - \frac{b}{a}\right)$ 除之，所得的商式要再除以 a 。

試求 $3x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4$ 除以 $3x - 2$ 的商式及餘式。

4. 用一次多項式改寫另一多項式：

欲以一次多項式 $x - \alpha$ 表示

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ &= A_n (x - \alpha)^n + A_{n-1} (x - \alpha)^{n-1} + \cdots + A_1 (x - \alpha) + A_0 , \end{aligned}$$

可用綜合除法連續以 $f(x)$ 除以 $x - \alpha$ 來求相關係數 A_n, \cdots, A_1, A_0 。

多項式 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ ，若
 $f(x) = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ ，
試求 a 、 b 、 c 、 d 之值。

想法

運用綜合除法連續除以 $(x-1)$ ，所得餘數
分別為係數 d 、 c 、 b 、 a 。

若 $x^3 - x^2 + 8x - 5 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2$
 $+ c(x+1) + d$ ，試求 a 、 b 、 c 、 d 之值。

10

老師講解

利用綜合除法化 $(x - a)$ 的多項式

學生練習

$$\text{設 } f(x) = x^3 + 6x + 7 = a(x - 1)^3 + b(x - 1)^2$$

+ $c(x - 1) + d$ ，試求：

(1) $f(x)$ 除以 $(x - 1)^2$ 的餘式。

(2) $f(1 + \sqrt{2})$ 的值。

$$\text{設 } f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + x + 9 = a(x - 2)^4$$

$$+ b(x - 2)^3 + c(x - 2)^2 + d(x - 2) + e，$$

試求：

(1) $f(x)$ 除以 $(x - 2)^2$ 的餘式。

(2) $f(2 + \sqrt{3})$ 的值。