C4_4-1

判斷下列數列為收斂或發散數列，若收斂求其極限：

(1) $\left\langle \left(\frac{100}{99}\right)^n \right\rangle$：<u>發散數列</u>。

(2) $\left\langle \left(\frac{k-1}{k}\right)^n \right\rangle$（其中 k 為自然數）：<u>收斂數列，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k-1}{k}\right)^n=0$</u>。

(3) $\left\langle \left(-\frac{1}{3}\right)^n-\frac{1}{3} \right\rangle$：<u>收斂數列，$\lim_{n\to\infty}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^n-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}$</u>。

(4) $\langle -3 \rangle$：<u>收斂數列，$\lim_{n\to\infty}(-3)=-3$</u>。

(5) $\left\langle (-3)^n \right\rangle$：<u>發散數列</u>。

求下列各式的極限值：

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{3-n}{2n^2+5}=$ __0__　　(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{(1-n)(2n+5)}{(2n+1)^2}=$ __$-\frac{1}{2}$__

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{3-n+n^3}{2n^2+5}=$ __不存在__。

求下列各式的極限值：

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n-3}{1+8n}+\frac{2n^2-3n-1}{n^2+n-1}\right)=$ __$\frac{5}{2}$__。

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n+1}-\frac{n^2+2}{n+2}\right)=$ __1__。

求下列各式的極限值：

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3}-\frac{1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2}{n^2}\right)=$ __$-\frac{1}{2}$__。

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)}{n^2+n+1}=$ __1__。

求下列各式的極限值：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{1}{5}\right)^n-2}{\left(\dfrac{1}{5}\right)^n+4}=$ $\underline{-\dfrac{1}{2}}$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{4^n+5^n}=$ $\underline{0}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{2n+1}+6^{n+1}}{6^n+3^{2n-1}}=$ $\underline{9}$ 。

若數列$\langle a_n\rangle$滿足$5n-1\le 3na_n\le 5n+2$，則$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$ $\underline{\dfrac{5}{3}}$ 。

求下列各無窮級數之和：

(1) $3+\dfrac{3}{8}+\dfrac{3}{8^2}+\cdots\cdots+\dfrac{3}{8^{n-1}}+\cdots\cdots=$ $\underline{\dfrac{24}{7}}$ 。

(2) $3+\dfrac{3}{4}+\dfrac{9}{16}+\dfrac{27}{64}+\cdots\cdots=$ $\underline{6}$ 。

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{5^n}\right)=$ $\underline{\dfrac{5}{4}}$ 。

(4) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}-\frac{1}{128}-\frac{1}{256}+\cdots\cdots=$ $\underline{\quad \frac{2}{7} \quad}$ 。

一皮球自高 60 公尺處落下，每次反彈高度為落下高度的 $\frac{2}{3}$ ，則此球到靜止所經之距離為 $\underline{\quad 300 \quad}$ 公尺。

化下列循環小數為分數：

(1) $0.\overline{5}=$ $\underline{\quad \frac{5}{9} \quad}$　　(2) $0.\overline{24}=$ $\underline{\quad \frac{8}{33} \quad}$　　(3) $0.3\overline{12}=$ $\underline{\quad \frac{103}{330} \quad}$ 。

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{an^2+bn-5}{3n+4}=3$ ，則 $(a,b)=$ $\underline{\quad (0,9) \quad}$ 。

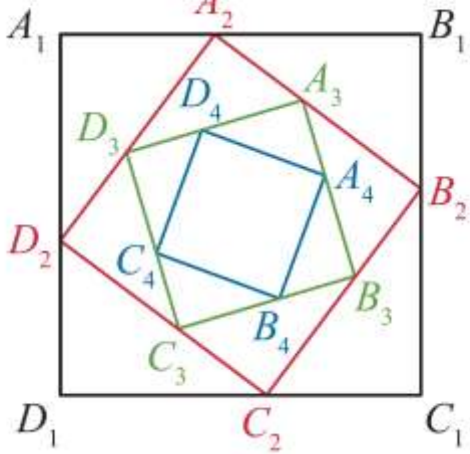
(1)若無窮數列 $\left\langle\left(\frac{1-2x}{3}\right)^n\right\rangle$ 收斂，則 x 的範圍為 $\underline{\quad -1\le x<2 \quad}$ 。

(2)若無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-2x}{3}\right)^n$ 收斂，則 x 的範圍為 $\underline{\quad -1<x<2 \quad}$ 。

設無窮等比級數$\sum_{n=1}^{\infty}a^n=a+a^2+a^3+\cdots\cdots$收斂，且其和為 5，則$a=$ $\underline{\dfrac{5}{6}}$ 。

一無窮等比級數之和為$\dfrac{45}{2}$，且其第 2 項為 5，若其公比大於$\dfrac{1}{2}$，則其首項＝ $\underline{\dfrac{15}{2}}$ 、公比＝ $\underline{\dfrac{2}{3}}$ 。

如右圖，邊長為a的正方形$A_1B_1C_1D_1$，在各邊上依3：4的比例依序取內分點，連接各分點得第 2 個正方形$A_2B_2C_2D_2$，依此過程繼續下去，得正方形$A_3B_3C_3D_3$、$A_4B_4C_4D_4\cdots\cdots$則所有正方形的面積和為 $\underline{\dfrac{49}{24}a^2}$ 。



$\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\dfrac{2}{3}\right)^k=$ $\underline{6}$ 。

$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+3+3^2+\cdots\cdots+3^n}{5^n}=$ $\underline{\dfrac{17}{8}}$ 。

C4_4-2

已知$\int_1^7 f(x)dx=8$、$2\int_5^7 f(x)dx=6$，$\int_2^1 g(x)dx=2$、$\int_2^5 g(x)dx=5$，則：

(1) $\int_1^1 f(x)dx=$ $\underline{\quad 0 \quad}$

(2) $\int_1^5 f(x)dx=$ $\underline{\quad 5 \quad}$

(3) $\int_1^2 g(x)dx=$ $\underline{\quad -2 \quad}$

(4) $\int_1^5 g(x)dx=$ $\underline{\quad 3 \quad}$

(5) $\int_1^5 (4f(x)+3g(x))dx=$ $\underline{\quad 29 \quad}$。

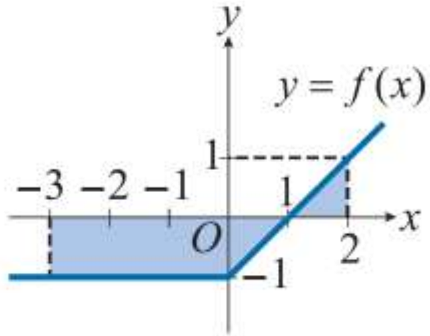
(3) $\because \int_2^1 g(x)dx=2 \quad \therefore \int_1^2 g(x)dx=-2$

(4) $\int_1^5 g(x)dx=\int_1^2 g(x)dx+\int_2^5 g(x)dx=-2+5=3$

(5) $\int_1^5 (4f(x)+3g(x))dx=4\int_1^5 f(x)dx+3\int_1^5 g(x)dx$

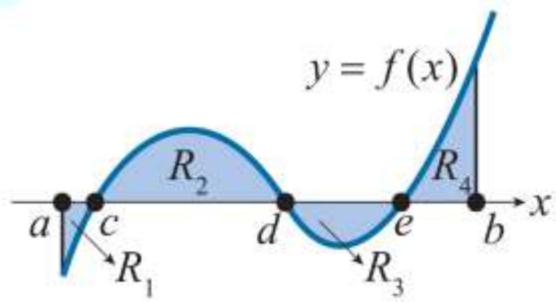
$=4\times5+3\times3=29$

函數$y=f(x)$的圖形如右，則$\int_{-3}^2 f(x)dx=$ $\underline{\quad -3 \quad}$。



$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx=$ $\underline{\quad \frac{\pi}{4} \quad}$。 ◎Hint：半徑 r 的圓面積為 πr^2 。

如右圖，四個區域面積分別為 $R_1=2$ 、 $R_2=9$ 、 $R_3=3$ 、 $R_4=4$ ，則定積分 $\int_a^b f(x)\,dx=$ ___8___ 。



$\int\left(3+\sqrt{x}\right)^2 dx=$ ___$\frac{1}{2}x^2+4x\sqrt{x}+9x+c$，$c$為常數___ 。

$\int\left(12x^3-6x^2+1\right)dx=$ ___$3x^4-2x^3+x+c$，c為常數___ 。

$\int(2x-3)^2 dx=$ ___$\frac{4}{3}x^3-6x^2+9x+c$，c為常數___ 。

$\int(2x-1)(x+3)\,dx=$ ___$\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-3x+c$，$c$為常數___ 。

$\int\frac{x^4-2x^2-3}{x^2}dx=$ ___$\frac{1}{3}x^3-2x+\frac{3}{x}+c$，$c$為常數___ 。

$\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}dx=$ $\underline{\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+c\text{，}c\text{為常數}}$ 。

$\int (5x-3)^9\,dx=$ $\underline{\frac{1}{50}(5x-3)^{10}+c\text{，}c\text{為常數}}$ 。

$\int (2x+2)\left(x^2+2x+3\right)^2 dx=$ $\underline{\frac{\left(x^2+2x+3\right)^3}{3}+c\text{，}c\text{為常數}}$ 。

$\int x\left(x^2-2\right)^5 dx=$ $\underline{\frac{1}{12}\left(x^2-2\right)^6+c\text{，}c\text{為常數}}$ 。

若 $\frac{d}{dx}F(x)=8x^3-10x+1$，且 $F(1)=-4$，則 $F(x)=$ $\underline{2x^4-5x^2+x-2}$ 。

$\int (x-2)^4(x-3)\,dx=$ $\underline{\frac{1}{6}(x-2)^6-\frac{1}{5}(x-2)^5+c\text{，}c\text{為常數}}$ 。

C4_4-3

求下列定積分：

(1) $\int_{0}^{3} 5dx =$ $\underline{\quad 15 \quad}$　　(2) $\int_{0}^{3} 5xdx =$ $\underline{\quad \frac{45}{2} \quad}$

(3) $\int_{0}^{1} \left(x^2+1\right)^2 dx =$ $\underline{\quad \frac{28}{15} \quad}$　　(4) $\int_{1}^{4} \frac{2x+3}{\sqrt{x}} dx =$ $\underline{\quad \frac{46}{3} \quad}$ 。

$\int_{-2}^{1} (2x-3)^2 dx - \int_{-2}^{1} \left(x^2-8x+5\right) dx =$ $\underline{\quad 27 \quad}$ 。

$\int_{-1}^{1} \left(x^2+2x-1\right) dx - \int_{3}^{1} \left(x^2+2x-1\right) dx =$ $\underline{\quad \frac{40}{3} \quad}$ 。

$\int_{0}^{2} |2x-1| dx =$ $\underline{\quad \frac{5}{2} \quad}$ 。

$\int_{0}^{1} (2x+1)^4 dx =$ $\underline{\quad \frac{121}{5} \quad}$ 。

$\int_0^1 x(1-x)^5\,dx=$ $\underline{\frac{1}{42}}$ 。

拋物線 $y=x^2$ 與 x 軸在 $[0,1]$ 上所圍之區域面積為 $\underline{\frac{1}{3}}$ 。

函數 $f(x)=-x^2-2x+3$ 與 x 軸所圍區域面積為 $\underline{\frac{32}{3}}$ 。

函數 $y=x^2-1$ 和 $y=1$ 在 $[-1,1]$ 所圍之區域面積為 $\underline{\frac{10}{3}}$ 。

拋物線 $y=x^2$ 和直線 $y=4x+5$ 所圍區域面積為 $\underline{36}$ 。

兩曲線 $y=x^2-6$ 和 $y=-x^2+2$ 所圍區域面積為 $\underline{\frac{64}{3}}$ 。

在比例限度內，將一彈力常數為 1000 牛頓／公尺的彈簧從平衡位置拉長 60 公分時，需作功 $\underline{180}$ 焦耳；若再拉長 40 公分，則需再作功 $\underline{320}$ 焦耳。

一運動質點以變加速度 $a(t)=-6t$ 公尺／秒^2 且初速 $V(0)=27$ 公尺／秒的方式作直線運動，則此運動質點從開始到靜止共行經 __54__ 公尺。

$\int_0^2 |x^2-1|dx =$ __2__ 。

兩函數 $y=x^3$ 和 $y=x$ 所圍區域面積為 __$\frac{1}{2}$__ 。