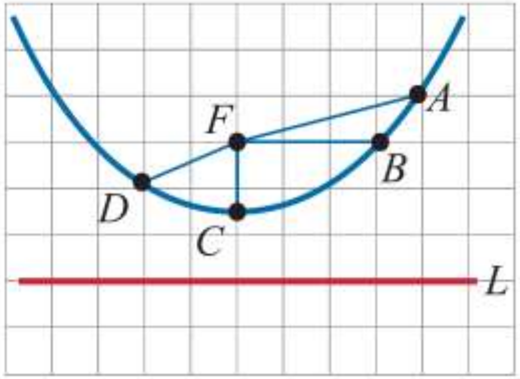
C4_2-1

右圖之拋物線以 F 點為焦點、直線 L 為準線，若點 A、B、C、D 均在拋物線上，設 $a=\overline{AF}$、$b=\overline{BF}$、$c=\overline{CF}$、$d=\overline{DF}$，則 a、b、c、d 由大至小依序為 ___$a>b>d>c$___。

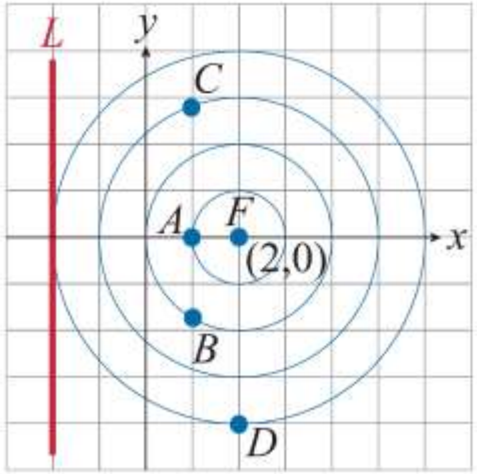


右圖為以 $F(2,0)$ 為圓心，分別以 1、2、3、4 為半徑的同心圓。今以 F 為焦點、直線 L 為準線作一拋物線，則：

(1)圖上 A、B、C、D 四點哪些點在拋物線上？ ___C、D___。

(2)拋物線方程式為 ___$y^2=8x$___。

(3)拋物線的正焦弦長＝ ___8___。



拋物線$\sqrt{x^2+(y+1)^2}=|y-1|$的

(1)焦點為 $(0,-1)$ (2)準線為 $y-1=0$ (3)對稱軸為 $x=0$

(4)頂點為 $(0,0)$ (5)焦距為 1 (6)正焦弦長為 4 (7)開口向 下

(8)其標準式為 $x^2=-4y$ 。

已知拋物線$(x-2)^2=-6(y+3)$，則其焦點坐標為 $\left(2,-\frac{9}{2}\right)$ ，準線為 $y=-\frac{3}{2}$ 。

若拋物線之焦點為$(-3,4)$、準線為x軸，則其頂點為 $(-3,2)$ ，其方程式為 $(x+3)^2=8(y-2)$ 。

以$(1,4)$為頂點、$(-4,4)$為焦點的拋物線方程式為 $(y-4)^2=-20(x-1)$ 。

以$(0,2)$為頂點、$x=3$為準線的拋物線方程式為 $(y-2)^2=-12x$ 。

一拋物線正焦弦的兩端點為$(-1,2)$、$(-1,-2)$，則其焦點為 $\underline{(-1,0)}$ ；若其頂點在焦點的左方，則方程式為 $\underline{y^2=4(x+2)}$ 。

頂點為$(3,2)$、對稱軸垂直y軸且焦距為 4，則其對稱軸為 $\underline{y-2=0}$ ，拋物線方程式為 $\underline{(y-2)^2=\pm16(x-3)}$ 。

求頂點為$(0,3)$、過點$(4,5)$且對稱軸垂直x軸的拋物線方程式為 $\underline{x^2=8(y-3)}$ 。

拋物線$x^2-2x+8y-7=0$，求：

(1)頂點 $\underline{(1,1)}$　(2)焦點 $\underline{(1,-1)}$　(3)對稱軸 $\underline{x-1=0}$

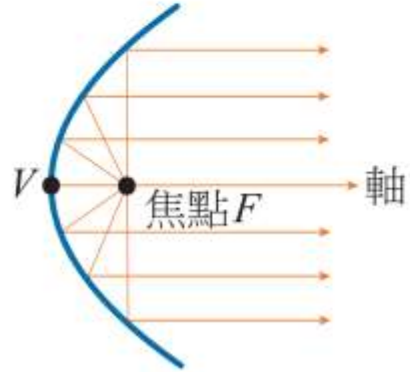
(4)準線 $\underline{y=3}$　(5)正焦弦長$=$ $\underline{8}$　(6)開口向 $\underline{\text{下}}$ 。

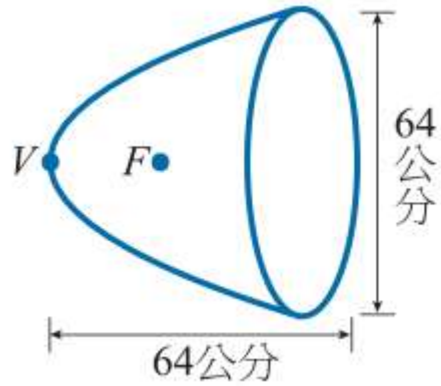
過$(1,1)$、$(3,2)$、$(3,-1)$三點，且對稱軸平行x軸的拋物線方程式為 $\underline{x=y^2-y+1}$ 。

設拋物線$y^2+x-9=0$的頂點為A，與y軸交於B、C兩點，求$\triangle ABC$的面積$=$ $\underline{27}$ 。

拋物線 $y^2=4x$ 和直線 $x+2y+14=0$ 的最短距離之點為 $\underline{\quad (4,-4) \quad}$ ，此最短距離為 $\underline{\quad 2\sqrt{5} \quad}$ 。

拋物線的光學性質：置於焦點處的點光源所發出的光線，經拋物線反射後平行於對稱軸。故手電筒、車前頭燈、探照燈等皆利用此原理，燈面為拋物面鏡，將光源置於焦點處，則光源發出的光線經拋物面鏡反射後平行射出，能照明較遠的距離。今有一探照燈反射鏡面為拋物線繞軸旋轉而成，故其縱切面為拋物線的一部分，其燈口直徑為 64 公分，燈的深度也是 64 公分（如右下圖），則光源安裝位置 F 到燈頂端 V 的距離為 $\underline{\quad 4 \quad}$ 公分。 [素養導向]





平面上過點 $A(3,0)$，且與直線 L：$x=1$ 相切之所有圓的圓心軌跡方程式為

<u>$y^2=4(x-2)$</u>。

◎*Hint*：設圓心為 $C(x,y)$，則圓心到 A 點的距離等於圓心到直線 L 的距離均為圓半徑，即 $\overline{AC}=d(C,L)$。

C4_2-2

關於橢圓 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$，則：

(1)焦點坐標為 $\underline{\left(\pm 2\sqrt{2},0\right)}$ 。

(2)短軸頂點為 $\underline{\left(0,\pm 1\right)}$ 。

(3)正焦弦長＝ $\underline{\frac{2}{3}}$ 。

(4)橢圓上一點 P 到一焦點 F_1 的距離為 2，則點 P 到另一焦點 F_2 的距離為 $\underline{4}$ 。

已知橢圓中心在原點，一個焦點在 $F\left(0,4\right)$，且長軸長是短軸長的 $\sqrt{2}$ 倍，則此橢圓的標準式為 $\underline{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{32}=1}$ 。

已知橢圓$\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{(y-1)^2}{8}=1$，則：

(1)中心坐標為 $\underline{(-1,1)}$　　(2)長軸頂點為 $\underline{(-1,1\pm 2\sqrt{2})}$

(3)短軸頂點為 $\underline{(-1\pm\sqrt{2},1)}$　　(4)焦點坐標為 $\underline{(-1,1\pm\sqrt{6})}$

(5)長軸長為 $\underline{4\sqrt{2}}$　　(6)短軸長為 $\underline{2\sqrt{2}}$

(7)正焦弦長為 $\underline{\sqrt{2}}$ 。

在平面上，到兩定點$(-1\pm 2\sqrt{2},0)$距離和為 6 的點所形成的圖形，其方程式為

$\underline{\frac{(x+1)^2}{9}+y^2=1}$ 。

已知一橢圓有一頂點為$(-5,1)$，兩焦點為$(-2,1)$、$(0,1)$，則：

(1)橢圓方程式為 $\underline{\frac{(x+1)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{15}=1}$　　(2)正焦弦長為 $\underline{\frac{15}{2}}$ 。

若橢圓的焦點為$(3,2)$、$(-3,2)$，且正焦弦長$=\dfrac{32}{5}$，則：

(1)橢圓方程式為 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$ 。

(2)橢圓上之點到兩焦點的距離和＝ 10 。

若一橢圓的長軸在 $y+1=0$ 上，短軸在 $x-2=0$ 上，長軸長為 8，短軸長為 6，則：

(1)橢圓方程式為 $\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y+1)^2}{9}=1$ 。

(2)兩焦點距離為 $2\sqrt{7}$ 。

已知一橢圓的兩焦點為 $F_1(5,1)$ 、 $F_2(-1,1)$ ，且過點 $P(2,4)$ ，則此橢圓方程式為

$\dfrac{(x-2)^2}{18}+\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$ 。

設橢圓 $4x^2+9y^2+8x-36y+4=0$ 的焦點為 F_1 、 F_2 ， P 為橢圓上任一點，則：

(1)長軸和短軸長度差＝ $\underline{\quad 2 \quad}$ 。

(2)長軸所在之直線方程式為 $\underline{\quad y=2 \quad}$ 。

(3) $\triangle PF_1F_2$ 的周長為 $\underline{\quad 6+2\sqrt{5} \quad}$ 。

(4) $\triangle PF_1F_2$ 面積的最大值為 $\underline{\quad 2\sqrt{5} \quad}$ 。

若橢圓方程式為 $\dfrac{(x-1)^2}{16}+\dfrac{(y+3)^2}{9}=1$ ，則：

(1)參數式為 $\underline{\quad \begin{cases} x=1+4\cos\theta \\ y=-3+3\sin\theta \end{cases}, 0\le\theta<2\pi \quad}$ 。

(2) $P(x,y)$ 在橢圓上，則 $x-y$ 的最小值為 ______ 。

(3)其內接矩形面積最大為 ______ 。

若橢圓方程式為$\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{9}=1$，則：

(1)參數式為 $\begin{cases} x=1+4\cos\theta \\ y=-3+3\sin\theta \end{cases}$，$0\le\theta<2\pi$ 。

(2)$P(x,y)$在橢圓上，則$x-y$的最小值為 -1 。

(3)其內接矩形面積最大為 24 。

設 $P(x,y)$ 滿足 $\sqrt{(x-8)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}=26$，則：

(1) P 點的圖形為 <u>橢圓</u> 。

(2)兩焦點坐標為 <u>$(8,1)$、$(-2,1)$</u> 。

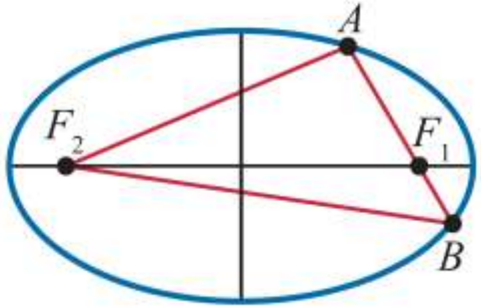
(3)正焦弦長為 <u>$\frac{288}{13}$</u> 。

(4) P 點的軌跡方程式為 <u>$\frac{(x-3)^2}{169}+\frac{(y-1)^2}{144}=1$</u> 。

若 $\frac{x^2}{7-k}+\frac{y^2}{k-3}=1$ 表長軸在 y 軸上的橢圓，則實數 k 的範圍為 <u>$5<k<7$</u> 。

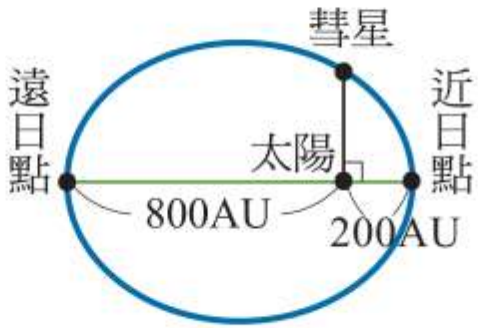
求過點 $(2,3)$ 且和另一橢圓 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 共焦點的橢圓方程式： <u>$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{15}=1$</u> 。

橢圓的光學性質為：經過一個焦點的光線經橢圓面反射後，反射光線必經過另一個焦點。現有一橢圓，兩焦點 F_1、F_2 的距離為 8 公尺，短軸長為 6 公尺。今在點 F_2 發射一雷射光，碰到橢圓上點 A 後，反射經點 F_1 到橢圓上點 B，再反射回到點 F_2（如右圖），則雷射光行進的總路線長為__20__公尺。



[素養導向]

太陽系中行星、彗星、小行星繞太陽運轉的軌道大多是橢圓，而太陽位於橢圓軌道的一個焦點上。星體在軌道上距離太陽最近的位置稱為近日點，距離太陽最遠的位置稱為遠日點（如右圖）。



(1) 現有一彗星繞太陽運轉的軌道是以太陽為焦點的橢圓，若近日點和太陽距離 200AU，遠日點和太陽距離 800AU，則當彗星與太陽的連線垂直橢圓軌道長軸時，彗星與太陽的距離為 ___320___ AU。（AU 為地球與太陽的平均距離，稱為天文單位）

(2) 曾為太陽系九大行星之一的冥王星，於西元 2006 年被降為矮行星，其繞行太陽的軌道亦為以太陽為焦點的橢圓。若定義橢圓的離心率為半焦距長與半長軸長之比值（即 $\frac{c}{a}$），當冥王星運行到遠日點時和太陽的距離為 50AU，且其軌道的離心率為 $\frac{1}{4}$，則冥王星運行到近日點時，和太陽的距離為 ___30___ AU。 [素養導向]

C4_2-3

雙曲線 $2x^2-y^2=8$ 的頂點坐標為 <u>$(\pm 2,0)$</u>，焦點坐標為 <u>$(\pm 2\sqrt{3},0)$</u>，

貫軸長＝ <u>4</u>，共軛軸長＝ <u>$4\sqrt{2}$</u>，正焦弦長＝ <u>8</u>。

在平面上，$F(0,4)$、$F'(0,-4)$，若 $P(x,y)$ 滿足 $\left|\overline{PF}-\overline{PF'}\right|=4$，則 P 點的軌跡方程式

為 <u>$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{12}=1$</u>。

一雙曲線中心為 $(0,0)$，焦點在 y 軸上，兩焦點距離為 $2\sqrt{15}$，正焦弦長為 4，則其方

程式為 <u>$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{6}=1$</u>，其共軛雙曲線方程式為 <u>$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{9}=1$</u>。

雙曲線 $(y-2)^2-(x-1)^2=4$ 的中心坐標為 <u>$(1,2)$</u>，頂點坐標為 <u>$(1,4)$、$(1,0)$</u>，

焦點坐標為 <u>$(1,2\pm 2\sqrt{2})$</u>，貫軸所在直線為 <u>$x-1=0$</u>，共軛軸所在直線為

<u>$y-2=0$</u>，正焦弦長＝ <u>4</u>，兩漸近線方程式為 <u>$x+y-3=0$、$x-y+1=0$</u>。

已知雙曲線$\left|\sqrt{(x-16)^2+(y+1)^2}-\sqrt{(x+10)^2+(y+1)^2}\right|=24$，則其中心坐標為 $(3,-1)$ ，頂點坐標為 $(15,-1)$、$(-9,-1)$ ，正焦弦長＝ $\dfrac{25}{6}$ 。

求兩頂點為$(2,1)$、$(-6,1)$，一焦點為$(3,1)$的雙曲線方程式為 $\dfrac{(x+2)^2}{16}-\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$ ，其漸近線方程式為 $3x+4y+2=0$、$3x-4y+10=0$ 。

雙曲線$3x^2-2y^2-12x-12y-24=0$的焦點坐標為 $\left(2\pm\sqrt{15},-3\right)$ ，共軛軸長＝ 6 ，雙曲線上之點到兩焦點的距離差的絕對值＝ $2\sqrt{6}$ ，雙曲線上之點到兩漸近線的距離乘積＝ $\dfrac{18}{5}$ 。

一雙曲線之漸近線為$x+y-2=0$與$x-y+4=0$，則其中心坐標為 $(-1,3)$ ；又過點$(1,3)$，則雙曲線方程式為 $x^2-y^2+2x+6y-12=0$ 。

求兩漸近線為 $2x+y=0$ 、 $2x-y=0$ 且一焦點為 $\left(2\sqrt{5},0\right)$ 的雙曲線方程式為

$\underline{\quad \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1 \quad}$ 。

一等軸雙曲線的中心為 $(3,-2)$ ，貫軸在直線 $y+2=0$ 上，貫軸長 $=4$ ，則其方程式為

$\underline{\quad \dfrac{(x-3)^2}{4}-\dfrac{(y+2)^2}{4}=1 \quad}$ 。

已知一等軸雙曲線有一漸近線為 $x-y=0$ ，中心為 $(1,1)$ ，且通過點 $(3,0)$ ，則另一漸近線為 $\underline{\quad x+y-2=0 \quad}$ ，此雙曲線方程式為 $\underline{\quad \dfrac{(x-1)^2}{3}-\dfrac{(y-1)^2}{3}=1 \quad}$ ，其頂點坐標為 $\underline{\quad \left(1\pm\sqrt{3},1\right) \quad}$ ，焦點坐標為 $\underline{\quad \left(1\pm\sqrt{6},1\right) \quad}$ 。

一雙曲線兩頂點為$(-1,-2)$、$(-1,4)$，一漸近線斜率為$-\frac{3}{4}$，則此雙曲線方程式為 $\frac{(y-1)^2}{9}-\frac{(x+1)^2}{16}=1$ 。

若雙曲線Γ和橢圓$\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{16}=1$共焦點，且其貫軸長為 4，則$\Gamma$的方程式為 $\frac{(y-3)^2}{4}-\frac{(x+2)^2}{3}=1$ 。

設k為實數，若方程式$\frac{x^2}{k-1}+\frac{y^2}{k-10}=1$的圖形為雙曲線，則：

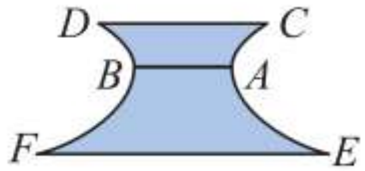
(1)k的範圍為 $1<k<10$ 。

(2)焦點坐標為 $(\pm 3,0)$ 。

設 P 為雙曲線 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$ 上的一點，且位於第一象限，若 F_1 、 F_2 為雙曲線的兩個焦點，且 $\overline{PF_1}:\overline{PF_2}=3:5$，則 $\triangle PF_1F_2$ 的周長為 __66__ 。

某人在一條曲線公路上行駛，若兩個休息站均不在公路上，且公路上任一點到休息站的距離差都是 14 公里，兩個休息站相距 20 公里，則公路和休息站最近的距離為 __3__ 公里。 [素養導向]

某核電廠的冷卻塔為雙曲面型（如右圖），其側面是由雙曲線繞共軛軸所掃出的曲面，平行地面的平面和冷卻塔截面均為圓形。若底面最大圓直徑 $\overline{EF}$ 為 60 公尺，最細的頸部 $\overline{AB}$（即雙曲線貫軸長）20 公尺，頂部圓直徑 $\overline{CD}$ 為 $20\sqrt{3}$ 公尺，若雙曲線貫軸到地面（即 A 點到地面）高度為 $8\sqrt{5}$ 公尺，則此冷卻塔高度（C 點到地面）為 __$12\sqrt{5}$__ 公尺。



◎*Hint*：把雙曲線放在坐標平面上，中心在原點、貫軸在 x 軸上。 [素養導向]