15

積 分

雲端教室

15-1 數列的極限

重點一 數列的極限

1. **數列的極限：**

一無窮數列$\langle a_n\rangle$，當 $n\to\infty$ 時，若 a_n 的值會趨近於定值 α，稱此無窮數列$\langle a_n\rangle$的極限值為 α，記為 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$。一個極限值存在的數列稱為收斂數列，否則稱為發散數列。

例如：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，則$\left\langle\dfrac{1}{n}\right\rangle$為收斂數列；$\lim\limits_{n\to\infty}n=$不存在，則$\langle n\rangle$為發散數列。

觀念補充 //

$\langle(-1)^n\rangle=-1,1,-1,1,\cdots$，當 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 不確定是 1 或 -1，也稱為發散數列。

2. **數列極限的四則運算：**

若$\langle a_n\rangle$及$\langle b_n\rangle$為收斂數列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$，則：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}ka_n=k\lim\limits_{n\to\infty}a_n=k\alpha$（$k$ 為常數）。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n\pm b_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha\pm\beta$。

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n\times b_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\times\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha\beta$。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$（$\beta\neq0$）。

3. 數列極限的求法：

(1) 分式型：$a_n=\dfrac{b_s n^s+b_{s-1}n^{s-1}+\cdots+b_1 n+b_0}{c_t n^t+c_{t-1}n^{t-1}+\cdots+c_1 n+c_0}$

① 若分子、分母次數相同（$s=t$），看最高次項係數比，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{b_s}{c_t}$。

② 若分母次數大（$s<t$），則 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

③ 若分子次數大（$s>t$），則發散。

(2) 等比型：$a_n=a_1\times r^{n-1}$，利用公比大小判斷數列的斂散。

當 $-1<r\le 1$ 時，數列 $\langle a_n\rangle$ 收斂，否則發散。

(3) 根式型：當 $n\to\infty$

① 出現 $\sqrt{\infty}+\sqrt{\infty}$，$\sqrt{\infty}\times\sqrt{\infty}$ 時，必發散。

② 出現 $\sqrt{\infty}-\sqrt{\infty}$，$\dfrac{\sqrt{\infty}}{\sqrt{\infty}}$ 時，為不定型，需先有理化因式，再化簡求極限。

4. 夾擠定理（又稱為三明治定理）：

已知數列 $\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$、$\langle c_n\rangle$，對所有 n 滿足 $a_n\le b_n\le c_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\alpha$，

則 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha$（因被包夾住）。

1 老師講解　分式型極限　學生練習

老師講解

試求下列各式的極限值：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-5n+2}{n^2+n-1}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{3n+1}-\dfrac{4-3n}{4n+3}\right)$

想法　分式型極限，若分子、分母次數相同，看最高次項係數比。

[答：(1) 3　(2) $\dfrac{17}{12}$]

解　(1) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2\left(3-\dfrac{5}{n}+\dfrac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)}=3$

(2) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{3n+1}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4-3n}{4n+3}$

$=\dfrac{2}{3}-\dfrac{-3}{4}$

$=\dfrac{17}{12}$

學生練習

試求下列各式的極限值：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+10n^2+1}{2n^3+n-1}$　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-2}{2n+1}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+5}{4n^2+3}$

[答：(1) $\dfrac{1}{2}$　(2) 不存在　(3) 0]

解　(1) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3\left(1+\dfrac{10}{n}+\dfrac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(2+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}\right)}=\dfrac{1}{2}$

(2) 分子次數大於分母次數

故極限值不存在

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+5}{4n^2+3}=0$

（分子次數小於分母次數）

2　老師講解　數列求極限值　學生練習

試求下列各式的極限值：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{2n+1}-\dfrac{n^2}{2n-1}\right)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$

想法　當 $n\to\infty$ 出現 $\infty-\infty$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 不定型時，需先化簡。

[答：(1) $-\dfrac{1}{2}$　(2) $\dfrac{1}{2}$]

解 (1) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2(2n-1)-n^2(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-2n^2}{4n^2-1}=-\dfrac{1}{2}$

(2) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n}{2n^2}=\dfrac{1}{2}$

試求下列各式的極限值：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n+1}-\dfrac{n^2+1}{n}\right)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{(3n)^2}$

[答：(1) -1　(2) $\dfrac{1}{9}$]

解 (1) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-(n+1)(n^2+1)}{(n+1)n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n^2-n-1}{n^2+n}=-1$

(2) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n}{2}[1+(2n-1)]}{9n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{9n^2}=\dfrac{1}{9}$

3　老師講解　等比型極限　學生練習

試求下列各式的極限值：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+1}-4^{n+1}}{5^n+4^n}$　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\times3^n+1}{3^{n+1}-1}$

想法　等比型極限，當 $-1<r<1$ 時，$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$。

[答：(1) 5　(2) $\dfrac{5}{3}$]

解 (1) 原式分母、分子同除以 5^n

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5-4\left(\frac{4}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{4}{5}\right)^n}=\dfrac{5-4\times0}{1+0}=5$

(2) 原式分母、分子同除以 3^n

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{3-\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\dfrac{5}{3}$

試求下列各式的極限值：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n+4^n}{3^n+5^n}$　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+2}+4^n}{3^n+4^n}$

[答：(1) 0　(2) 1]

解 (1) 原式分母、分子同除以 5^n

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{2}{5}\right)^n+\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(\frac{4}{5}\right)^n}{\left(\frac{3}{5}\right)^n+1}$

$=\dfrac{0+0+0}{0+1}=0$

(2) 原式分母、分子同除以 4^n

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}=1$

C

15

4 老師講解　根式型極限　學生練習

試求下列各式的極限值：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{4n-3}}$　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$

想法　當 $n\to\infty$ 根式出現 $\sqrt{\infty}-\sqrt{\infty}$，$\sqrt{\dfrac{\infty}{\infty}}$ 不定型時，先有理化根式。

[答：(1) 1　(2) $\dfrac{1}{2}$]

解 (1) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1\right)}{\sqrt{4-\dfrac{3}{n}}}=\dfrac{1+1}{2}=1$

(2) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$

$=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

試求下列各式的極限值：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{8n-5}}$　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$

[答：(1) $\dfrac{1}{2}$　(2) 0]

解 (1) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2+\dfrac{3}{n}}}{\sqrt{8-\dfrac{5}{n}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$

(2) 原式

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=0$

5 老師講解　夾擠定理　學生練習

已知數列 $\langle a_n\rangle$，對每一個自然數 n，

$3-\dfrac{1}{n+1}\le a_n\le 3+\dfrac{1}{n+1}$ 恆成立，

試求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$。

想法　數列 $\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$、$\langle c_n\rangle$，對所有 n 滿足 $a_n\le b_n\le c_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\alpha$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha$。

[答：3]

解 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{1}{n+1}\right)=3$

由夾擠定理知：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$

已知數列 $\langle a_n\rangle$，對每一個自然數 n 滿足

$4n^3-1<\left(n^3+2\right)a_n<4n^3+1$，

試求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$。

[答：4]

解 原不等式同除以 $\left(n^3+2\right)$

$\Rightarrow\ \dfrac{4n^3-1}{n^3+2}<a_n<\dfrac{4n^3+1}{n^3+2}$

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3-1}{n^3+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3+1}{n^3+2}=4$

由夾擠定理知：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=4$

重點二 無窮級數

1. 無窮級數的收斂性：

無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots$ 中，當 $n \to \infty$ 時，若其和會趨近一定值 S，稱此級數收斂於 S；若其和找不到，稱此級數發散。

2. 數列收斂與級數收斂的差別：

(1) 無窮數列：$\langle ar^{n-1} \rangle$ 收斂 $\Leftrightarrow$ $-1 < r \le 1$。（右邊有等號，當 $r=0$ 為零數列必收斂）

(2) 無窮級數：$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ 收斂 $\Leftrightarrow$ $-1 < r < 1$（兩邊都沒等號），且其和 $= \dfrac{a}{1-r}$。

6 老師講解 無窮等比級數的收斂性 學生練習

無窮等比級數 $2 + 4x + 8x^2 + \cdots$ 為收斂級數，試求 x 之範圍。

想法 無窮等比級數收斂條件為 $-1 < r < 1$。

[答：$-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2}$]

解 $r = 2x$，收斂條件為：

$-1 < 2x < 1$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2}$

無窮等比級數 $1 + \dfrac{2x}{3} + \left(\dfrac{2x}{3}\right)^2 + \cdots$ 可求出和，試求 x 之範圍。

[答：$-\dfrac{3}{2} < x < \dfrac{3}{2}$]

解 $r = \dfrac{2x}{3}$，收斂條件為：

$-1 < \dfrac{2x}{3} < 1$

$\Rightarrow -\dfrac{3}{2} < x < \dfrac{3}{2}$

7 老師講解 無窮等比級數求和 學生練習

試求無窮等比級數

$1 + \dfrac{2}{7} + \dfrac{4}{49} + \dfrac{8}{343} + \cdots = ?$

想法 無窮等比級數其和 $= \dfrac{a}{1-r}$。

[答：$\dfrac{7}{5}$]

解 $r = \dfrac{2}{7}$，則無窮級數收斂

原式 $= \dfrac{1}{1 - \dfrac{2}{7}} = \dfrac{7}{5}$

試求無窮等比級數

$1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \cdots = ?$

[答：$\dfrac{2}{3}$]

解 $r = -\dfrac{1}{2}$，則無窮級數收斂

原式 $= \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$

C

15

8 老師講解　無窮等比級數求和　學生練習

試求下列各式的和：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-1}{7^n}$

想法　無窮等比級數其和 $=\dfrac{a}{1-r}$。

[答：(1) $\dfrac{3}{2}$　(2) $\dfrac{7}{12}$]

解 (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ $\Rightarrow$ 首項為 $\dfrac{3}{5}$，$r=\dfrac{3}{5}$

$$\therefore\ \text{原式}=\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}=\frac{3}{2}$$

(2) 原式 $=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n$

$$=\frac{\frac{3}{7}}{1-\frac{3}{7}}-\frac{\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}}$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{1}{6}=\frac{7}{12}$$

試求下列各式的和：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n-4^n}{12^n}$

[答：(1) $-\dfrac{3}{7}$　(2) $\dfrac{1}{2}$]

解 (1) 原式 $=\dfrac{-\frac{3}{4}}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}=-\dfrac{3}{7}$

(2) 原式 $=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{12^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{12^n}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

9 老師講解　無窮等比級數之應用　學生練習

一球自 120 公尺高度落下，若每次著地後反彈高度為前次落下高度的 $\dfrac{3}{5}$，則此球自落下到接近靜止共經過多少公尺？

想法　無窮等比級數之和 $=\dfrac{a}{1-r}$。

[答：480 公尺]

解 除第一次外，其他路徑皆經過 2 次

所求 $=120+2\times120\times\left[\dfrac{3}{5}+\left(\dfrac{3}{5}\right)^2+\cdots\right]$

$$=120+240\times\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}$$

$=480$（公尺）

將一單擺由最高處釋放任其自由擺動，第一次擺動的路徑長為 50 公分，受空氣阻力影響，每次擺動之路徑長為前次擺動路徑長的 $\dfrac{9}{10}$，試求從一開始到接近靜止，擺錘擺動的總路徑長為多少公分？

[答：500 公分]

解 總路徑長

$$=50+50\times\frac{9}{10}+50\times\left(\frac{9}{10}\right)^2+\cdots$$

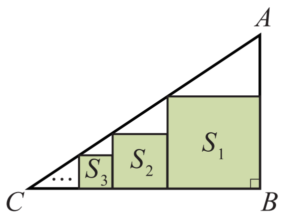
$$=50\times\left[1+\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\cdots\right]$$

$=50\times\dfrac{1}{1-\frac{9}{10}}=500$（公分）

進階例題

10 老師講解 無窮等比級數之應用題 學生練習

如圖，直角 $\triangle ABC$ 的兩股長為 $\overline{AB}=16$，$\overline{BC}=24$，依次在三角形內作內接正方形 S_1，S_2，S_3，…，試求所有內接正方形的面積總和。



[答：144 平方單位]

解 假設正方形 S_1 的邊長為 x

利用相似三角形得

$24:16=(24-x):x$

$\Rightarrow\ x=\dfrac{48}{5}$，即 S_1 的邊長為 $\dfrac{48}{5}$

同理可得正方形 S_2 的邊長為 $\dfrac{144}{25}$

且正方形 S_1，S_2，…的邊長成等比數列

公比 $r_1=\dfrac{\frac{144}{25}}{\frac{48}{5}}=\dfrac{3}{5}$

因此正方形 S_1，S_2，…的面積也成等比數列

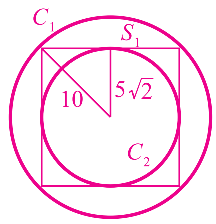
公比 $r_2=\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{9}{25}$

故正方形 S_1，S_2，…的面積總和為

$$\frac{\left(\frac{48}{5}\right)^2}{1-\frac{9}{25}}=144\text{（平方單位）}$$

已知一圓 C_1 的半徑為 10，作圓 C_1 的內接正方形 S_1，再作正方形 S_1 的內切圓 C_2，再作圓 C_2 的內接正方形 S_2，如此繼續…，可得一系列的圓 C_1，C_2，C_3，…，試求其面積總和。

[答：200 π 平方單位]



解 如圖

C_1 半徑 $=10$

C_2 半徑 $=10\times\sin 45^\circ$

$=5\sqrt{2}$

依題意 C_1，C_2，C_3，…的面積比為

$$\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2=\left(\frac{5\sqrt{2}}{10}\right)^2=\frac{1}{2}$$

其公比為 $\dfrac{1}{2}$

所求 C_1，C_2，C_3，…的面積總和為

$$\frac{100\pi}{1-\frac{1}{2}}=200\pi\text{（平方單位）}$$

15-1 段落測驗

★表難題

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{(3-2n)^2}=$ $\underline{\dfrac{1}{4}}$ 。

2. 設 $a=\dfrac{\pi}{3}$，$b=\dfrac{\pi}{4}$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{7a^n}{2+a^n}+\dfrac{9b^n}{5+b^n}\right]=$ $\underline{7}$ 。

3. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^2-bn}{3n-7}=2$，則實數 $a=$ $\underline{0}$ ，$b=$ $\underline{-6}$ 。

4. 無窮等比級數 $\dfrac{2x}{x+1}+\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)^2+\cdots$ 收斂，試求：

   (1) x 之範圍為 $\underline{-\dfrac{1}{3}<x<1}$ 。

   (2) 若總和 $=3$，則 $x=$ $\underline{\dfrac{3}{5}}$ 。

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+4^n}{5^{n+1}}=$ $\underline{\dfrac{11}{10}}$ 。

6. 無窮等比級數 $1-\dfrac{3}{5}+\dfrac{9}{25}-\dfrac{27}{125}+\cdots$ 之和為 $\underline{\dfrac{5}{8}}$ 。

7. $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{32}+\dfrac{1}{64}-\dfrac{1}{128}+\dfrac{1}{256}+\cdots$ 依此規則到無限項之和為 $\underline{\dfrac{6}{7}}$ 。

8. 已知無窮等比級數 $10+\dfrac{10}{1.001}+\dfrac{10}{1.001^2}+\cdots+\dfrac{10}{1.001^n}+\cdots$ 之和為 P，則 P 之值為 $\underline{10010}$ 。

【統測】

9. $a=(0.4)+(0.4)^2+(0.4)^3+\cdots+(0.4)^n+\cdots$，$b=(0.2)+(0.2)^2+(0.2)^3+\cdots+(0.2)^n+\cdots$，

   則 $\dfrac{a}{b}=$ $\underline{\dfrac{8}{3}}$ 。 【統測】

10. 無窮等比級數 $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{1}{3+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3\sqrt{3}+3}+\cdots=$ $\underline{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ 。 【統測】

15-1 高手過招

1. 已知一無窮等比數列的任一項恰等於該項之後各項和的 3 倍，且其前兩項的和為 $\dfrac{25}{4}$，則此數列之公比為 $\underline{\dfrac{1}{4}}$ 。

15-2 》積分的概念與反導函數

重點一　定積分與面積

1. 定積分與面積：

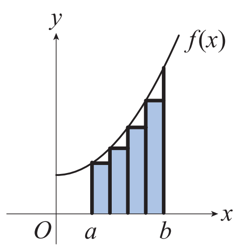
設函數 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續，且 $f(x)\geq 0$，欲求 $f(x)$ 圖形與 x 軸在 $x=a$ 及 $x=b$ 間所圍的區域面積之步驟如下：

(1) 分割：將 $[a,b]$ 之間的線段 n 等分，再將此區域切割成許多細長條，對每個長條分別作出它的下矩形與上矩形，所有下矩形的和稱為下和，所有上矩形的和稱為上和。

(2) 計算下和與上和：假設 n 個下矩形的高依次為 $m_1, m_2, \cdots, m_n$；n 個上矩形的高依次為 $M_1, M_2, \cdots, M_n$，由此得：下和 $=\dfrac{b-a}{n}\times(m_1+m_2+\cdots+m_n)$，以 L_n 表之。

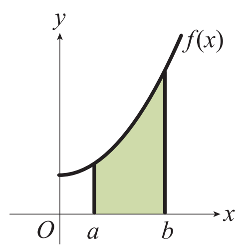
上和 $=\dfrac{b-a}{n}\times(M_1+M_2+\cdots+M_n)$，以 U_n 表之。

(3) 逼近：計算上和與下和之極限值，因 $L_n\leq$ 區域面積 $\leq U_n$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}L_n=\lim\limits_{n\to\infty}U_n=\alpha$，則所求區域面積 $=\alpha$，如圖所示。



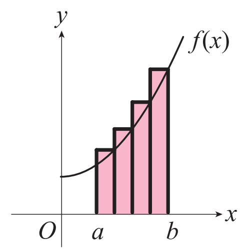
下和

$\leq$



所求

$\leq$



上和

此極限值稱為函數 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定積分，記作 $\int_a^b f(x)dx$，其中 a、b 分別稱為定積分的下限與上限，此時稱函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可積分。

觀念補充 //

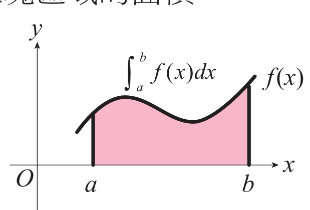
積分符號：$\int \underset{\text{長}}{\underline{f(x)}}\ \underset{\text{寬}}{\underline{dx}}$ 計算面積時，可看成是許多細長條面積的總和。

2. 定積分的幾何意義：

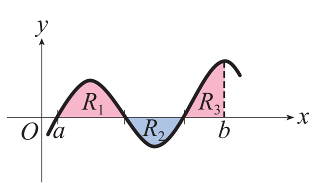
若 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上可積分，則：

(1) 當 $f(x)$ 恆為正值：$\int_a^b f(x)dx$ 表 $f(x)$ 在 $x=a$、$x=b$ 與 x 軸所圍成的面積，如圖㈠。

(2) $f(x)$ 不恆為正值：$\int_a^b f(x)dx$ 所圍面積 $=R_1+|R_2|+R_3=R_1-R_2+R_3$，如圖㈡，$R_1$、$R_2$、$R_3$ 分別為三塊區域的面積。



圖㈠



圖㈡

3. **定積分的性質：**

設 $f(x)$與 $g(x)$在區間$[a,b]$上均可積分

(1) $\int_a^a f(x)dx=0$。

(2) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$。

(3) $\int_a^b [c\cdot f(x)]dx=c\int_a^b f(x)dx$。

(4) $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$。

(5) $f(x)$在區間$[a,b]$上可積分，設 $a<c<b$，則 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$。

4. **反導函數：**

兩函數 $F(x)$與 $f(x)$滿足 $F'(x)=f(x)$之關係，稱 $F(x)$為 $f(x)$的一個反導函數。

記作 $\int f(x)dx=F(x)$ + 常數 c，可見反導函數並不唯一。求反導函數的過程，稱不定積分。

觀念補充 //

❶ 將函數 $f(x)$積分後得函數 $F(x)$，再將函數 $F(x)$微分後，則得原函數 $f(x)$。

❷ 對不同變數微分，其意義不同；同樣對不同變數積分，其意義也不同

$\Rightarrow$ $\int f(x)dx=\int f(t)dt=\int f(u)du$，但 $\int f(x)dx\neq\int f(x)dt$。

5. **簡易的積分公式：** $\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c$（$n\neq-1$，$c$ 為常數）。

6. **分式與根式積分公式：**

(1) $\int \dfrac{1}{x^n}dx=\int x^{-n}dx=\dfrac{x^{-n+1}}{-n+1}+c$（$n\neq1$，$c$ 為常數）。

(2) $\int \sqrt[n]{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{n}}dx=\dfrac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}+c$（$c$ 為常數）。

7. **變數變換（又稱為代換積分法）：**

型如 $\int f(g(x))g'(x)dx$，利用微分連鎖律的性質，做變數變換的一種積分技巧。

$\int f(g(x))g'(x)dx$，令 $g(x)=u$，則 $g'(x)=\dfrac{du}{dx}$ $\Rightarrow$ $du=g'(x)dx$，

將原式代換成 $\int f(u)du$，轉為一般積分處理。

觀念補充 //

$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx$，令 $g(x)=u$，則利用變數變換法可表成 $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$。

1 定積分的基本性質

老師講解

設 $\int_2^3 f(x)dx=5$，$\int_3^6 f(x)dx=4$，

$\int_0^2 g(x)dx=2$，$\int_6^0 g(x)dx=-8$，

則 $\int_2^6[6f(x)-5g(x)]dx=$？

想法　$\int_a^b[f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$。

[答：24]

解　原式 $=\left[\int_2^3 6f(x)dx+\int_3^6 6f(x)dx\right]$

$-\left[\int_0^6 5g(x)dx-\int_0^2 5g(x)dx\right]$

$=6(5+4)-5(8-2)$

$=54-30$

$=24$

學生練習

設 $\int_1^3 f(x)dx=3$，$\int_3^4 f(x)dx=-1$，

又 $\int_1^2 g(x)dx=-2$，$\int_2^4 g(x)dx=2$，

則 $\int_1^4[2f(x)-5g(x)]dx=$？

[答：4]

解　原式 $=2\left[\int_1^3 f(x)dx+\int_3^4 f(x)dx\right]$

$-5\left[\int_1^2 g(x)dx+\int_2^4 g(x)dx\right]$

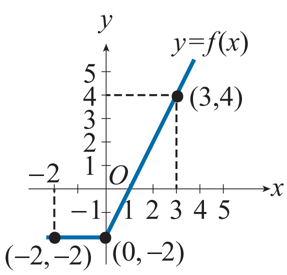
$=2(3-1)-5(-2+2)$

$=4$

2 定積分的幾何意義

老師講解

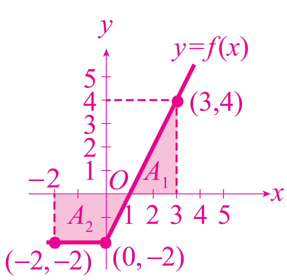
函數 $f(x)$ 的圖形如右，試求定積分 $\int_{-2}^3 f(x)dx$ 之值。



想法　$f(x)$ 不恆為正值時
$\int_a^b f(x)dx=f(x)$ 在 x 軸上方面積 $-f(x)$ 在 x 軸下方面積。

[答：−1]

解　如圖所示



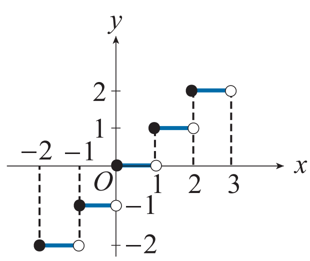
$\int_{-2}^3 f(x)dx=A_1$ 面積 $-A_2$ 面積

$=\frac{1}{2}\times2\times4-\frac{1}{2}\times(2+3)\times2$

$=4-5=-1$

學生練習

已知高斯函數 $f(x)$ 在區間 $[-2,3]$ 的圖形如下，試求定積分 $\int_{-2}^3 f(x)dx$ 之值。



[答：0]

解　$\int_{-2}^3 f(x)dx$

$=[(-2)\times1+(-1)\times1]+0+[1\times1+2\times1]$

$=0$

C

15

3 老師講解　求不定積分　學生練習

試求下列各不定積分：

(1) $\int \left(x-\sqrt{x}\right)dx$

(2) $\int \left(4x^3+2x^2-2x+1\right)dx$

想法　積分公式 $\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c$ 。

[答：(1) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{2\sqrt{x^3}}{3}+c$（$c$ 為常數）

(2) $x^4+\dfrac{2}{3}x^3-x^2+x+c$（$c$ 為常數）]

解　(1) $\int \left(x-\sqrt{x}\right)dx$

$=\int \left(x-x^{\frac{1}{2}}\right)dx=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c$

$=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{2\sqrt{x^3}}{3}+c$（$c$ 為常數）

(2) $\int \left(4x^3+2x^2-2x+1\right)dx$

$=\dfrac{4}{4}x^4+\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{2}{2}x^2+x+c$

$=x^4+\dfrac{2}{3}x^3-x^2+x+c$（$c$ 為常數）

試求下列各不定積分：

(1) $\int \dfrac{\sqrt{x}+1}{x^2}dx$

(2) $\int \left(2x^3-x^2+2x-1\right)dx$

[答：(1) $-\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}+c$（$c$ 為常數）

(2) $\dfrac{1}{2}x^4-\dfrac{1}{3}x^3+x^2-x+c$（$c$ 為常數）]

解　(1) $\int \dfrac{\sqrt{x}+1}{x^2}dx$

$=\int \left(x^{-\frac{3}{2}}+x^{-2}\right)dx$

$=-2x^{-\frac{1}{2}}-x^{-1}+c$

$=-\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}+c$（$c$ 為常數）

(2) $\int \left(2x^3-x^2+2x-1\right)dx$

$=\dfrac{1}{2}x^4-\dfrac{1}{3}x^3+x^2-x+c$（$c$ 為常數）

進階例題

4 老師講解　變數變換法　學生練習

試求不定積分 $\int (1+2x)^5 dx$ 。

想法　將 $\int f(g(x))g'(x)dx$ 代換成 $\int f(u)du$ 轉為一般積分。

[答：$\dfrac{1}{12}(1+2x)^6+c$，c 為常數]

解　令 $u=1+2x$

$\Rightarrow\ du=2dx\ \Rightarrow\ dx=\dfrac{1}{2}du$

$\int (1+2x)^5 dx$

$=\int u^5\times\dfrac{1}{2}du=\dfrac{1}{2}\int u^5 du=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6}u^6+c$

$=\dfrac{1}{12}(1+2x)^6+c$，c 為常數

試求不定積分 $\int (2x+3)^5 dx$ 。

[答：$\dfrac{1}{12}(2x+3)^6+c$，c 為常數]

解　令 $u=2x+3$

$\Rightarrow\ du=2dx\ \Rightarrow\ dx=\dfrac{1}{2}du$

$\int (2x+3)^5 dx$

$=\int u^5\times\dfrac{1}{2}du=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6}u^6+c$

$=\dfrac{1}{12}(2x+3)^6+c$，c 為常數

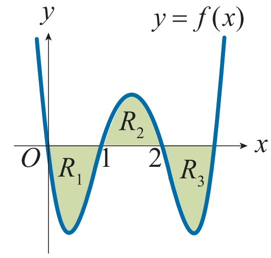
15-2 段落測驗

★表難題

1. 已知 $\int_a^b f(x)dx=3$，$\int_a^b g(x)dx=7$，則 $\int_a^b[3f(x)-2g(x)]dx=$ $\underline{-5}$。

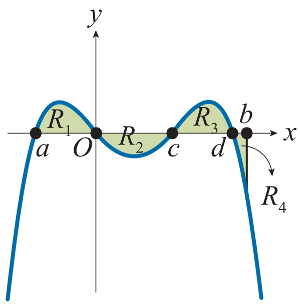
2. $\int(4x^3-6x+2)dx=$ $\underline{x^4-3x^2+2x+c}$。

3. 已知圖中三個區域 R_1、R_2、R_3 的面積分別為 1、$\frac{2}{3}$、1，則 $\int_0^1 f(x)dx+3\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx=$ $\underline{0}$。



4. 設 $y=f(x)$ 之圖形如圖，其中四個鋪色區域的面積分別為 $R_1=6$，$R_2=8$，$R_3=4$，$R_4=5$，試求下面兩積分：

(1) $\int_a^b f(x)dx=$ $\underline{-3}$。 (2) $\int_a^b|f(x)|dx=$ $\underline{23}$。



5. 試求下列不定積分：

(1) $\int(2x^2-x)dx=$ $\underline{\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+c\text{，}c\text{ 為常數}}$。

(2) $\int\frac{x^3+1}{x^3}dx=$ $\underline{x-\frac{1}{2x^2}+c\text{，}c\text{ 為常數}}$。

★ 6. 試求下列不定積分：

(1) $\int(2x^2-1)^2dx=$ $\underline{\frac{4}{5}x^5-\frac{4}{3}x^3+x+c\text{，}c\text{ 為常數}}$。

(2) $\int(2x+1)(x^2+x+1)^4dx=$ $\underline{\frac{(x^2+x+1)^5}{5}+c\text{，}c\text{ 為常數}}$。

7. 設多項式函數 $F(x)$ 為函數 $f(x)=3x^2-2x+1$ 的一個反導函數，且 $F(2)=2$，則 $F(x)=$ $\underline{x^3-x^2+x-4}$。

8. 已知 $F(x)=\int(x-1)(x-2)^5dx$，則 $F(x)=$ $\underline{\frac{(x-2)^7}{7}+\frac{(x-2)^6}{6}+c\text{，}c\text{ 為常數}}$。

★ 9. 由幾何圖形面積求定積分 $\int_{-1}^3|x-2|dx=$ $\underline{5}$。

10. 已知 $\int_1^2 f(x)dx=1$，$\int_2^4 f(x)dx=3$，$\int_1^2 g(x)dx=2$，$\int_2^4 g(x)dx=5$，則 $\int_1^4[2f(x)+g(x)]dx=$ $\underline{15}$。 【統測】

15-3 》多項式函數的積分

重點一 定積分

1. 微積分基本定理：

設 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上可積分，若 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$，$a\le x\le b$，則 $F'(x)=f(x)$，

且定積分：$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$。

2. 定積分的數學應用：

若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上均可積分

(1) 求單一函數圖形與 x 軸所夾面積：

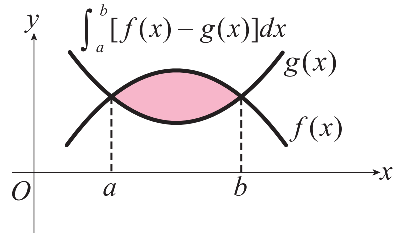
① 若 $f(x)\ge 0$，則由 $y=f(x)$ 與 x 軸及 $x=a$，$x=b$ 所圍成區域面積為 $\int_a^b f(x)dx$。

② 若 $f(x)\le 0$，則由 $y=f(x)$ 與 x 軸及 $x=a$，$x=b$ 所圍成區域面積為 $-\int_a^b f(x)dx$。

(2) 求兩函數圖形所夾面積：

① 若 $f(x)$ 恆大於 $g(x)$，則由 $y=f(x)$，$y=g(x)$，$x=a$、$x=b$ 所圍成區域面積為 $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$。

② 若 $f(x)$ 不恆大於 $g(x)$，則由 $y=f(x)$，$y=g(x)$，$x=a$、$x=b$ 所圍面積為 $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$。



觀念補充 //

兩曲線間面積＝（ $f(x)$ 下方到 x 軸面積）扣減（ $g(x)$ 下方到 x 軸面積）

$$=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx \text{。}$$

3. 定積分的力學應用：

功是外力對位移所累積的物理量，若是恆力 F 作功，則功＝力 × 位移（$W=Fx$）。

若為變力 $F(x)$ 作功，且物體沿著 $F(x)$ 方向從 $x=a$ 移動到 $x=b$，則變力作功 $W=\int_a^b F(x)dx$。

1 老師講解 求定積分 學生練習

試求下列各定積分之值：

(1) $\int_{-3}^{1}(x^2-x-3)dx$ (2) $\int_{0}^{1}\frac{x-4}{\sqrt{x}+2}dx$

想法 $\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$。

[答：(1) $\frac{4}{3}$ (2) $-\frac{4}{3}$]

解 (1) $\int_{-3}^{1}(x^2-x-3)dx$

$=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-3x\right)\Big|_{-3}^{1}$

$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-3\right)-\left(-9-\frac{9}{2}+9\right)$

$=\frac{4}{3}$

(2) 原式 $=\int_0^1\frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}+2}dx$

$=\int_0^1(\sqrt{x}-2)dx$

$=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x\right)\Big|_0^1$

$=\frac{2}{3}-2=-\frac{4}{3}$

試求下列各定積分之值：

(1) $\int_{1}^{3}(3x^2+2x-1)dx$ (2) $\int_{0}^{1}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}dx$

[答：(1) 32 (2) $\frac{11}{3}$]

解 (1) $\int_1^3(3x^2+2x-1)dx$

$=(x^3+x^2-x)\Big|_1^3$

$=(3^3+3^2-3)-(1^3+1^2-1)$

$=32$

(2) 原式 $=\int_0^1\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}-3}dx$

$=\int_0^1(\sqrt{x}+3)dx$

$=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x\right)\Big|_0^1$

$=\frac{2}{3}+3=\frac{11}{3}$

2 老師講解 微積分基本定理 學生練習

已知 $F(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_1^x(5t+16)dt\right]$，

試求 $F(1)$。

想法 若 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$，則 $F'(x)=f(x)$。

[答：21]

解 由微積分基本定理

$F(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_1^x(5t+16)dt\right]$

則 $F(x)=5x+16$

故 $F(1)=5+16=21$

已知 $F(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_1^x(t^2+2t+1)dt\right]$，

試求 $F(0)$。

[答：1]

解 由微積分基本定理

$F(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_1^x(t^2+2t+1)dt\right]$

則 $F(x)=x^2+2x+1$

故 $F(0)=0+0+1=1$

C

15

★ 3 老師講解 絕對值函數積分 學生練習

試求定積分 $\int_{-1}^{3}|x-2|dx$。

想法 先去絕對值再分段執行積分。

[答：5]

解 $|x-2|=\begin{cases}x-2，x\geq 2\\-(x-2)，x<2\end{cases}$

$\int_{-1}^{3}|x-2|dx$

$=\int_{-1}^{2}-(x-2)dx+\int_{2}^{3}(x-2)dx$

$=\left(\frac{-x^2}{2}+2x\right)\Big|_{-1}^{2}+\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_{2}^{3}$

$=\frac{9}{2}+\frac{1}{2}$

$=5$

試求定積分 $\int_{0}^{2}|x-1|dx$。

[答：1]

解 $|x-1|=\begin{cases}x-1，x\geq 1\\-(x-1)，x<1\end{cases}$

$\int_{0}^{2}|x-1|dx$

$=\int_{0}^{1}-(x-1)dx+\int_{1}^{2}(x-1)dx$

$=\left(\frac{-x^2}{2}+x\right)\Big|_{0}^{1}+\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_{1}^{2}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

$=1$

4 老師講解 代換積分 學生練習

試求 $\int_{0}^{1}x\left(x^2+1\right)^5dx$。

想法 $\int f(g(x))g'(x)dx$ 令 $g(x)=u$，
則 $du=g'(x)dx$ 代換成 $\int f(u)du$。

[答：$\frac{21}{4}$]

解 令 $u=x^2+1$，$\frac{du}{dx}=2x \Rightarrow dx=\frac{du}{2x}$

當 $x=0$，$u=1$；當 $x=1$，$u=2$

原式 $=\int_{1}^{2}\frac{u^5du}{2}=\frac{u^6}{12}\Big|_{1}^{2}=\frac{64-1}{12}=\frac{21}{4}$

試求 $\int_{1}^{2}(x+1)\left(x^2+2x-2\right)^2dx$。

[答：$\frac{215}{6}$]

解 令 $u=x^2+2x-2$，$\frac{du}{dx}=2x+2$

$\Rightarrow dx=\frac{du}{2x+2}$

當 $x=1$，$u=1$；當 $x=2$，$u=6$

原式 $=\int_{1}^{6}\frac{u^2du}{2}=\frac{u^3}{6}\Big|_{1}^{6}=\frac{215}{6}$

5 利用定積分求曲線面積

老師講解

試求函數 $f(x)=3x^2-4x$ 的圖形與 $x=2$、$x=4$ 及 x 軸所圍成的區域面積。

想法　當 $f(x)$ 為正值時 $\int_a^b f(x)dx$ 表 $f(x)$ 在 $x=a$、$x=b$ 與 x 軸所圍的面積。

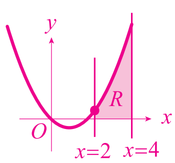
[答：32 平方單位]

解　所求面積 $=\int_2^4 (3x^2-4x)dx$

$=(x^3-2x^2)\Big|_2^4$

$=(4^3-2\times4^2)-(2^3-2\times2^2)$

$=32$（平方單位）



學生練習

試求函數 $f(x)=2x^2-4x$ 的圖形與 $x=-2$、$x=-4$ 及 x 軸所圍成的區域面積。

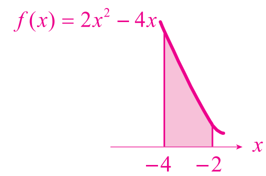
[答：$\dfrac{184}{3}$ 平方單位]

解　所求面積 $=\int_{-4}^{-2}(2x^2-4x)dx$

$=\left(\dfrac{2}{3}x^3-2x^2\right)\Big|_{-4}^{-2}$

$=\left(-\dfrac{16}{3}-8\right)-\left(-\dfrac{128}{3}-32\right)$

$=\dfrac{184}{3}$（平方單位）



6 利用定積分求兩曲線所夾面積

老師講解

試求拋物線 $y=x^2$ 與直線 $y=2x+3$ 所圍成的區域面積。

想法　由兩函數 $y=f(x)$，$y=g(x)$，在 $x=a$ 與 $x=b$ 所圍面積為 $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$。

[答：$\dfrac{32}{3}$ 平方單位]

解　$\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x+3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x^2=2x+3$

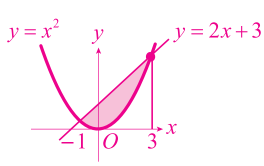
$\Rightarrow$ $(x-3)(x+1)=0$ $\Rightarrow$ $x=3$ 或 -1

所求面積

$=\int_{-1}^{3}[(2x+3)-(x^2)]dx$

$=\left(-\dfrac{1}{3}x^3+x^2+3x\right)\Big|_{-1}^{3}$

$=\dfrac{32}{3}$（平方單位）



學生練習

試求曲線 $y=x^2-1$ 與直線 $y=x+1$ 所圍成的區域面積。

[答：$\dfrac{9}{2}$ 平方單位]

解　$\begin{cases} y=x^2-1 \\ y=x+1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x^2-1=x+1$

$\Rightarrow$ $x^2-x-2=0$ $\Rightarrow$ $(x-2)(x+1)=0$

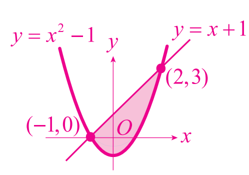
$\Rightarrow$ $x=2$ 或 -1

所求面積

$=\int_{-1}^{2}[(x+1)-(x^2-1)]dx$

$=\left(-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+2x\right)\Big|_{-1}^{2}$

$=\dfrac{9}{2}$（平方單位）



虎克定律說明在比例限度內，物體的形變量與所受外力成正比。今給一個遵守虎克定律的彈簧，已知以 2 牛頓的力可將一彈簧拉長 5 公分，今在比例限度內施力將此彈簧由伸長量 20 公分變化至 30 公分，試求施力所作的功。

想法 變力作功，則功 $W=\int F(x)dx$。

[答：1 焦耳]

解 設作用力 $F(x)=kx$

依題意求彈性常數

$\Rightarrow\quad 2=k\times 0.05\quad\Rightarrow\quad k=40$

所以 $F(x)=40x$

因此變力作功為

$$\int_{0.2}^{0.3}40x\,dx=20x^2\Big|_{0.2}^{0.3}=1\text{（焦耳）}$$

若一彈簧遵守虎克定律，且自然長度為 2 公尺，已知將它壓縮 0.4 公尺需用 2 牛頓的力，試求在比例限度內將此彈簧從自然長度壓縮成 1 公尺所作的功。

[答：$\frac{5}{2}$ 焦耳]

解 設作用力 $F(x)=kx$

依題意求彈性常數

$\Rightarrow\quad 2=0.4k\quad\Rightarrow\quad k=5$

所以 $F(x)=5x$

因此變力作功為

$$\int_0^1 5x\,dx=\frac{5}{2}x^2\Big|_0^1=\frac{5}{2}\text{（焦耳）}$$

15-3 段落測驗

★表難題

1. 試求下列各定積分的值：

(1) $\int_1^3 (x^3-2x)dx =$ $\underline{\quad 12 \quad}$。 (2) $\int_0^1 (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x})dx =$ $\underline{\quad -\frac{4}{15} \quad}$。

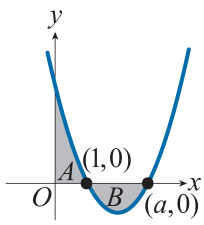
★ 2. 定積分的值 $\int_{-2}^3 |x+1|dx =$ $\underline{\quad \frac{17}{2} \quad}$。

3. 設 $f(x)=\begin{cases} 2-x，x\le 0 \\ x^2+2，x\ge 0 \end{cases}$，則 $\int_{-1}^2 f(x)dx =$ $\underline{\quad \frac{55}{6} \quad}$。

4. 函數 $y=4-x^2$ 和 x 軸所圍成的區域面積為 $\underline{\quad \frac{32}{3} \quad}$ 平方單位。

5. 設某一個質點 A 作直線運動，x 秒時的速度為 $V(x)$ 公尺 / 秒，其中 $V(x)=x^2-x+2$，則從 $x=2$ 秒至 $x=4$ 秒質點 A 的位移為 $\underline{\quad \frac{50}{3} \quad}$ 公尺。

★ 6. 求定積分 $\int_{-1}^2 x^2(x^3+1)^2 dx =$ $\underline{\quad 81 \quad}$。

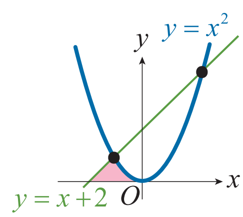


★ 7. 如圖，二次函數 $f(x)=x^2-(a+1)x+a$ 的圖形通過點 $(1,0)$、$(a,0)$，其中 $a>1$。若區域 B 的面積為區域 A 面積的兩倍，則 $a=$ $\underline{\quad 2+\sqrt{3} \quad}$。

8. 若函數 $f(x)$ 的導函數為 $f'(x)=3x^2+6x$ 且 $f(1)=3$，則 $\int_0^2 f(x)dx$ 之值為 $\underline{\quad 10 \quad}$。

【統測】

9. 右圖中鋪色部分之面積為 $\underline{\quad \frac{5}{6} \quad}$ 平方單位。



【統測】

10. 在坐標平面上由拋物線 $y=x(2-x)$ 與 x 軸所圍成的區域面積為 $\underline{\quad \frac{4}{3} \quad}$ 平方單位。

【統測】

★11. $\int_{-1}^1 |x^3|dx =$ $\underline{\quad \frac{1}{2} \quad}$。 【統測】

15-3 高手過招

1. $\int_{-3}^4 |x^2-4|dx =$ $\underline{\quad \frac{71}{3} \quad}$。

CH 15 素養練功坊

題目

「人」是影響交通安全最重要的因素，也是交通管理最重要的對象，所以要減少交通事故發生需喚起用路大眾對交通安全的覺醒，只要充分遵守交通規則，就能掌握安全駕駛的精神。假設某汽車以每秒 20 公尺的速度在道路上直線前進，當駕駛看到前面紅燈亮起，便腳踩煞車，此時車子改以 t 秒時 $v = 20 - 4t$ 的速度前進，試求自踩煞車開始至車子停止時，此車共行駛多少公尺？

關　鍵　字

汽車以每秒 20 公尺的速度前進

當踩煞車時車子改以 $v = 20 - 4t$ 的速度前進

求自踩煞車開始至車子停止時共行駛多少公尺？

單 元 公 式

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續，且 $F(x)$ 為 $f(x)$ 的反導函數

則 $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

翻譯成數學式

試求定積分 $\int_0^5 (20-4t)dt$ 的值

解 題

依題意，因為汽車停止時的速度為 0

亦即 $20 - 4t = 0$，得 $t = 5$

所以計算踩煞車後行駛的距離為

$$\int_0^5 (20-4t)dt = \left(20t - 2t^2\right)\Big|_0^5 = 100 - 50 = 50 \text{（公尺）}$$

● **回顧：**微積分基本定理很重要，別小看這個定理，這個定理構築了微積分的博大精深。當我們解一道題時，就是要透過題目來熟悉並理解背後所牽涉的種種數學思路和方法，利用問題來串連觀念，思辨分析，掌握抽象，進而提升數學的解題實力。

★表難題

1. 一船錨在船下 10 公尺處，已知船錨重達 1900 公斤，錨鍊每公尺重 10 公斤。今欲收錨啟航，假設考慮錨鍊重量，且收錨過程中絞盤機械所承受的錨鍊重量會隨著收錨深度而均勻遞減。已知船舶絞盤克服重力（不計浮力）所承受的拉力為 $F(x)=2000-10x$（公斤重），試問收妥錨需作功多少焦耳？（1 公斤重≒ 10 牛頓）

答：195000 焦耳

★ 2. 人體對物體施力使物體產生位移，是必須消耗能量的。以「能量守恆」的觀點來看，施力消耗的能量不會無故消失，而是以其他形式的能量相互轉換。假設長度為 3 公尺，質量為 m 公斤的均勻纜繩，其中 2 公尺長置於一無摩擦力之水平桌面上，另外 1 公尺長則懸吊於桌邊自然下垂，已知為克服重力，當纜繩拉回 x 公尺之拉力為 $F(x)=\frac{m}{3}(1-x)$ 公斤重，試求將此纜繩全部拉回桌面上所需作的功為多少焦耳？（1 公斤重≒ 10 牛頓）

答：$\frac{5m}{3}$ 焦耳

★ 3. 根據市場調查，消費者會因為商品價格而影響其購買的意願。因此我們定義商品的需求數量與影響需求數量之因素（如價錢）的相互關係為需求函數。假設需求函數視為商品價格對需求數量的變化率，已知某款新上市商品在第一週銷售統計上，發現其市場上的需求函數為 $f(x)=1300-3x^2$（$0\le x\le 20$），其中 x 為需求數量，試求消費者欲購買 10 份該商品所願意支付的金額為多少？

答：12000 元

高三人的期許

一閃一閃亮晶晶，滿天都是小星星。統測過後，大家一起去摘星！

統測解題影音

★表難題

(D) 1. 不定積分 $\int \frac{x+3}{2\sqrt{x}}dx=$？

(A) $\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}x^{\frac{-1}{2}}+C$ (B) $\frac{\frac{x^3}{2}+3x}{x^{\frac{3}{2}}}+C$ (C) $\frac{\frac{x^2}{2}+3x}{\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}}+C$ (D) $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}+C$。 【111(C)】

(C) 2. 小明計畫由基隆沿國道一號開車南下高雄渡假。早上 8：00 經過中興隧道 0 公里處的起點，經紀錄儀錶板上車速變化，在 8：00 開始後，時間 t（小時）的速度函數為 $v(t)=-1.5t^2+6t+90$（公里 / 小時）。若依此速度變化，則 11：00 時小明應該最接近哪一個服務區？ (A) 泰安服務區（158 公里處） (B) 西螺服務區（229 公里處） (C) 新營服務區（284 公里處） (D) 仁德服務區（335 公里處）。【111(C)】

(A) 3. $\int_1^3 (3x-2)^{110}dx=$？

(A) $\frac{7^{111}-1}{333}$ (B) $\frac{3^{111}-1}{333}$ (C) $\frac{7^{110}-1}{330}$ (D) $\frac{7^{111}-1}{111}$。 【110(C)】

(A) 4. $\int_1^4 \left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)dx=$？ (A) $\frac{57}{5}$ (B) $\frac{77}{5}$ (C) $\frac{87}{5}$ (D) $\frac{107}{5}$。 【110(C)】

(A) 5. 若無窮級數為 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}$，則前 5 項之和為何？

(A) 35 (B) 40 (C) 45 (D) 50。 【110(B)】

(B) 6. 若 $f(x)=(x^2+1)^{100}$，則 $\int_0^1[2x+f(x)]dx+\int_1^3 f(x)dx+\int_3^0 f(x)dx=$？

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3。 【110(B)】

(D) 7. 設 $g(x)=2x-1$，已知在閉區間 $[-1,1]$ 上 $f(x)\geq 1$ 且 $\int_{-1}^1 f(x)dx=5$，則此兩曲線 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 在閉區間 $[-1,1]$ 所圍成區域的面積為何？

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7。 【109(C)】

★(C) 8. 求 $\int_{-2}^2(30x^5-16x^7-20x^3)dx=$？ (A) -192 (B) -6 (C) 0 (D) 192。 【109(B)】

(D) 9. 已知 $F(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_1^x(t^2+1)dt\right]$，則 $F(1)=$？ (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2。【108(C)】

(C) 10. 在理想環境下，將一球自離地面 30 公尺處垂直落下，球只會上下垂直來回彈跳。若每次反彈高度為前一次高度的 $\frac{2}{5}$，則此球靜止前所經過的路程為多少公尺？

(A) 50 (B) 60 (C) 70 (D) 80。 【108(B)】

(D) 11. 設函數 $f(x)=3x^2+2x+1$。試問曲線 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 及 $x=2$ 之間與 x 軸所包圍之區域的面積為何？ (A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) 11。 【108(B)】

★（ C ）12. 若函數 $f(x)$ 的導函數 $f'(x)=x^2-2x-3$，且 $f(0)=6$，則 $f(x)$ 的相對極小值為何？ (A) -5 (B) -4 (C) -3 (D) -2。【107(C)】

★（ A ）13. $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}(4x-1)^3dx=$ (A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{1}{12}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$。【107(C)】

★（ A ）14. $\int_{-4}^{0}|2x+5|dx=$ (A) $\frac{17}{2}$ (B) 8 (C) $\frac{17}{4}$ (D) 4。【107(C)】

（ B ）15. 設 $f(x)$ 為多項式函數，若 $\int_1^3 f(x)dx=1$、$\int_2^5 f(x)dx=4$ 且 $\int_2^3 f(x)dx=2$，則 $\int_1^5 f(x)dx=$ (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7。【106(C)】

★（ C ）16. 求定積分 $\int_0^2 6x\left(x^2-1\right)^2dx$ 之值。 (A) 24 (B) 26 (C) 28 (D) 30。【106(B)】

★（ B ）17. 試求定積分 $\int_{-1}^{3}|2x-1|dx$ 之值 $=$ (A) $\frac{15}{2}$ (B) $\frac{17}{2}$ (C) $\frac{19}{2}$ (D) $\frac{21}{2}$。【105(C)】

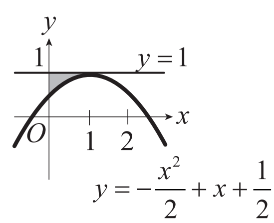
（ B ）18. 設 $f(x)=x^3+3x^2$，$g(x)=4$，則兩函數 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 之圖形所圍成的封閉區域面積為何？ (A) $\frac{11}{4}$ (B) $\frac{27}{4}$ (C) $\frac{91}{4}$ (D) $\frac{221}{4}$。【105(C)】

（ D ）19. 試求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n}-\frac{2n^2+n+2}{n+2}\right)$ 之值 $=$ (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3。【105(C)】

（ D ）20. 試求曲線 $y=-x^2+1$ 在 $x=-1$、$x=2$ 之間與 x 軸所圍成區域的面積。
(A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) $\frac{7}{3}$ (D) $\frac{8}{3}$。【105(B)】

（ A ）21. 求 $\int_{-3}^{3}(1-2x)(1+2x)dx=$ (A) -66 (B) -33 (C) 33 (D) 66。【104(C)】

（ D ）22. 由 $y=-\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}$，$y=1$ 和 $x=0$ 所圍成的區域，如圖陰影部分，則此區域面積可由下列何式求得？



(A) $\int_0^1\left(-\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{2}\right)dx$ (B) $\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{2}\right)dx$
(C) $\int_0^1\left(-\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\right)dx$ (D) $\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}\right)dx$。【104(C)】

（ D ）23. 曲線 $y=f(x)=3x^2+2x+1$ 在 $x=1$、$x=3$ 之間與 x 軸所圍成之區域的面積為何？
(A) 12 (B) 18 (C) 24 (D) 36。【104(B)】

（ B ）24. 設 $f(x)=2x^2-3$，$g(x)=3-x^2$，則定積分 $\int_{-3}^{3}[f(x)-g(x)]dx$ 之值為何？
(A) 0 (B) 18 (C) 42 (D) 54。【統測】