14

微　分

雲端教室

14-1 》極限的概念

重點一　極限的概念

1. 函數的極限：

設函數 $f(x)$，當 $x \to a$ 時，$f(x)$ 值會趨近定值 L，稱 L 為 $f(x)$ 在 $x = a$ 之極限值，以 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ 表示。

觀念補充 //

若函數極限存在，其值必唯一。

2. 極限的基本性質：

若 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$，$\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$，$c$ 為常數，則：

(1) $\lim\limits_{x \to a}\big(f(x) + g(x)\big) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x) = L + M$。

(2) $\lim\limits_{x \to a}\big(f(x) - g(x)\big) = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x) = L - M$。

(3) $\lim\limits_{x \to a} cf(x) = c \times \lim\limits_{x \to a} f(x) = cL$。

(4) $\lim\limits_{x \to a}\big(f(x) \times g(x)\big) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \times \lim\limits_{x \to a} g(x) = LM$。

(5) 若 $M \neq 0$，則 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$。

3. 極限的求法：

(1) 直接代入型：當 $x \to a$ 時求極限值，直接用 $x = a$ 代入。（雖然用 $x = a$ 代入，但 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ 與 $f(a)$ 意義並不相同）

(2) 分式型：求 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 時，若 $x = a$ 代入會使 $g(a) = 0$ 時，會有以下兩種情形：

① 若 $f(a) \neq 0$，則極限值不存在。

② 若 $f(a) = 0$，設法消去導致 $\dfrac{0}{0}$ 的因式。

(3) 根式型：當 $x = a$ 代入根式，出現 $\infty - \infty$ 、$\dfrac{\infty}{\infty}$ 或 $\dfrac{0}{0}$ 等不定型，則乘除其有理化因式。

4. 左、右極限：

(1) 右極限：若 $x > a$，當 $x \to a$ 時，$f(x)$ 值會趨近 L，以 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ 表之。

(2) 左極限：若 $x < a$，當 $x \to a$ 時，$f(x)$ 值會趨近 M，以 $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = M$ 表之。

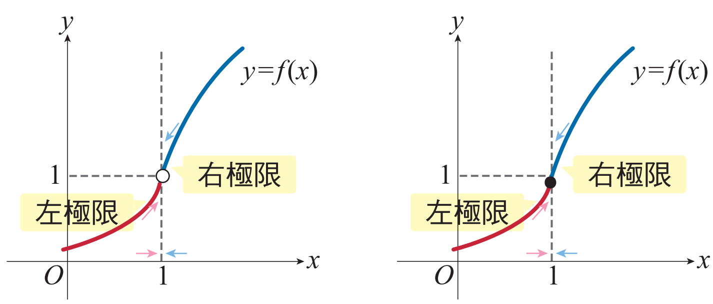
當右極限 = 左極限，即 $L = M$ 時，稱 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ 存在，否則極限值不存在。

觀念補充 //

不是所有極限值都要檢查左極限、右極限，當函數在某些點附近有斷掉或跳動的情形時（例如：$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$，$x = 0$ 沒定義），才需處理左、右極限。

5. 函數的連續性：

若函數 $f(x)$ 之極限值存在且 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$（極限值 = 函數值），稱 $f(x)$ 在 $x = a$ 處連續，如圖。



在x=1不連續　　在x=1連續

1 老師講解　直接代入法求極限值　學生練習

試求下列各極限值：

(1) $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^{100}-2x+3\right)$ (2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+3}{x+2}$

想法 直接代入法求極限值：$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$。

[答：(1) 6 (2) $\dfrac{5}{3}$]

解 (1) $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^{100}-2x+3\right)$

$=(-1)^{100}-2\times(-1)+3$

$=6$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+3}{x+2}=\dfrac{1^2+1+3}{1+2}$

$=\dfrac{5}{3}$

試求下列各極限值：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x-2}{x^2+1}$ (2) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+2}{x-1}+\dfrac{x+1}{x-3}\right)$

[答：(1) 1 (2) 1]

解 (1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x-2}{x^2+1}=\dfrac{4-2}{1+1}=1$

(2) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+2}{x-1}+\dfrac{x+1}{x-3}\right)=\dfrac{2+2}{2-1}+\dfrac{2+1}{2-3}$

$=4+(-3)$

$=1$

2 老師講解　不定型化簡求極限值　學生練習

試求下列各極限值：

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$ (2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3-1}$

想法 當 $x=a$ 代入產生 $\dfrac{0}{0}$ 時，則先約去公因式，再用直接代入法。

[答：(1) 5 (2) $\dfrac{4}{3}$]

解 (1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+2)(x-3)}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to 3}(x+2)$

$=3+2=5$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+3)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+3}{x^2+x+1}$

$=\dfrac{1+3}{1^2+1+1}$

$=\dfrac{4}{3}$

試求下列各極限值：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$ (2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-8}$

[答：(1) 0 (2) $\dfrac{1}{12}$]

解 (1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2}{(x+2)(x-2)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x+2}$

$=\dfrac{0}{4}=0$

(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-8}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{x^2+2x+4}$

$=\dfrac{2-1}{2^2+2\times 2+4}$

$=\dfrac{1}{12}$

3 根式求極限值

老師講解

試求下列各極限值：

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}\right)$ (2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

想法 當 $x=a$ 代入產生 $\dfrac{0}{0}$ 時，需先有理化並約去公因式。

[答：(1) 1 (2) 2]

解 (1) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}\right)$

$=\sqrt{3+6}-\sqrt{3+1}=1$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)=\sqrt{1}+1=2$

學生練習

試求下列各極限值：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{4x+1}\right)$ (2) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

[答：(1) 5 (2) 6]

解 (1) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{4x+1}\right)$

$=\sqrt{6-2}+\sqrt{8+1}$

$=5$

(2) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

$=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$

$=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9}$

$=\lim\limits_{x\to 9}(\sqrt{x}+3)$

$=\sqrt{9}+3$

$=6$

4 左極限、右極限

老師講解

已知 $f(x)=\begin{cases}2x+3 & (\text{當 } x\geq 2)\\ x^2+1 & (\text{當 } x<2)\end{cases}$，

試求 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ 之值。

想法 分段函數需檢查定義域中分段點之左、右極限。

[答：$\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ 不存在]

解 $f(x)$ 在 $x=2$ 有變動，要檢查左、右極限

右極限：$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(2x+3)$

$=2\times 2+3=7$

左極限：$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2+1)$

$=2^2+1=5$

$\because \lim\limits_{x\to 2^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)$

$\therefore \lim\limits_{x\to 2}f(x)$ 不存在

學生練習

已知 $g(x)=\begin{cases}x^2+3 & (\text{當 } x\neq 3)\\ 10 & (\text{當 } x=3)\end{cases}$，

試求 $\lim\limits_{x\to 3}g(x)$ 之值。

[答：12]

解 $g(x)$ 在 x=3 有變動，要檢查左、右極限

右極限：$\lim\limits_{x\to 3^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(x^2+3)$

$=3^2+3=12$

左極限：$\lim\limits_{x\to 3^-}g(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(x^2+3)$

$=12$

$\therefore \lim\limits_{x\to 3}g(x)=12$

5 老師講解 絕對值函數求極限值 學生練習

試求下列各極限值：

(1) $\lim\limits_{x\to\log 2}\dfrac{|x-3|}{x-3}$　(2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x-3|}{x-3}$

想法 在定義域不存在的點需檢查左、右極限。

[答：(1) -1　(2) 極限值不存在]

解 (1) $\lim\limits_{x\to\log 2}\dfrac{|x-3|}{x-3}=\dfrac{|\log 2-3|}{\log 2-3}$

$=\dfrac{3-\log 2}{\log 2-3}=-1$

(2) $x=3$ 代入會出現 $\dfrac{0}{0}$

要檢查左、右極限

右極限：$\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{|x-3|}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x-3}{x-3}=1$

左極限：$\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{|x-3|}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{-(x-3)}{x-3}$

$=-1$

∵ 右極限 ≠ 左極限

∴ 極限值不存在

試求下列各極限值：

(1) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{|x-\pi|}{x-\pi}$　(2) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x-\pi}{|x-\pi|}$

[答：(1) -1　(2) 極限值不存在]

解 (1) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{|x-\pi|}{x-\pi}=\dfrac{|\sqrt{2}-\pi|}{\sqrt{2}-\pi}$

$=\dfrac{\pi-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\pi}=-1$

(2) $x=\pi$ 代入會出現 $\dfrac{0}{0}$

要檢查左、右極限

右極限：

$\lim\limits_{x\to\pi^+}\dfrac{x-\pi}{|x-\pi|}=\lim\limits_{x\to\pi^+}\dfrac{x-\pi}{x-\pi}=1$

左極限：

$\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{x-\pi}{|x-\pi|}=\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{x-\pi}{-(x-\pi)}=-1$

∵ 右極限 ≠ 左極限

∴ 極限值不存在

6 老師講解 函數的連續性 學生練習

若 $f(x)=\begin{cases}x^2+x+3，x\ge 2\\2kx-5，x<2\end{cases}$ 為連續函數，試求 k 之值。

想法 連續函數 $f(x)$ 在定義域每一點極限值皆存在且 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$。

[答：$\dfrac{7}{2}$]

解 因在 $x=2$ 連續

$\Rightarrow\ \lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=f(2)$

$\Rightarrow\ 2^2+2+3=2\times k\times 2-5$

$\Rightarrow\ k=\dfrac{7}{2}$

若 $f(x)=\begin{cases}x^2+1，x<1\\ax+3，x\ge 1\end{cases}$ 為連續函數，試求 a 之值。

[答：-1]

解 因在 $x=1$ 連續

$\Rightarrow\ \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=f(1)$

$\Rightarrow\ a\times 1+3=1^2+1$

$\Rightarrow\ a=-1$

進階例題

7 老師講解 利用 $\frac{0}{0}$ 求未知數 學生練習

a、b 為實數，若 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{ax^2+bx-1}{x^2-x-2}=1$，

試求 a、b。

[答：$a=2$，$b=1$]

解 將 $x=-1$ 代入分母為 0

但原式極限值存在

$\therefore$ 分子 ax^2+bx-1 必有 $x+1$ 之因式

$\Rightarrow$ $a-b-1=0$ $\Rightarrow$ $b=a-1$ 代回原式

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(ax-1)}{(x+1)(x-2)}$

$=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{ax-1}{x-2}=\dfrac{-a-1}{-3}=1$

$\Rightarrow$ $a=2$，$b=1$

設 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{ax^2+3x+b}{x+1}=2$，試求實數 a、b。

[答：$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{5}{2}$]

解 以 $x=-1$ 代入分母為 0

但原式極限值存在

$\therefore$ 分子 ax^2+3x+b 必有 $x+1$ 之因式

$\Rightarrow$ $a-3+b=0$

$\Rightarrow$ $b=3-a$ 代回原式

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)[ax+(3-a)]}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to -1}[ax+(3-a)]$

$=-2a+3=2$

$\Rightarrow$ $a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{5}{2}$

8 老師講解 根式求極限值 學生練習

試求：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+3}-2}$ (2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

[答：(1) 2 (2) $\dfrac{1}{4}$]

解 (1) 原式 $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(x+3-4)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\frac{2+2}{1+1}=2$$

(2) 原式 $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to 5}\frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5-1}+2}=\frac{1}{4}$$

試求：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+6}-\sqrt{8}}$ (2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

[答：(1) 2 (2) $\dfrac{1}{4}$]

解 (1) 原式 $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})(\sqrt{x+6}+\sqrt{8})}{(\sqrt{x+6}-\sqrt{8})(\sqrt{x+6}+\sqrt{8})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{x+6}+\sqrt{8})}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$$

$=2$

(2) 原式 $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}$$

$$=\frac{1}{4}$$

14

14-1 段落測驗

★表難題

1. 試求下列各極限：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-x+3)=$ $\underline{\quad 9 \quad}$。

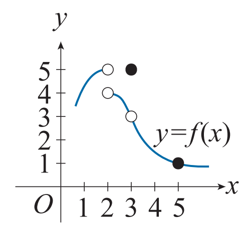
(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}=$ $\underline{\quad -\dfrac{1}{2} \quad}$。

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|+x}{x}=$ $\underline{\quad \text{不存在} \quad}$。

3. 已知 $f(x)=\begin{cases}2x^2+1 & (當\ x\neq 3)\\ 16 & (當\ x=3)\end{cases}$，則 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=$ $\underline{\quad 19 \quad}$。

4. 設 $f(x)$ 之圖形如右圖，則下列何者**錯誤**？$\underline{\quad C \quad}$。

(A) $f(2)$ 不存在 (B) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ 不存在 (C) $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=5$ (D) $f(3)=5$



5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-1)^2-1}{x}=$ $\underline{\quad -2 \quad}$。

6. 若 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2+x+b}{x-1}=2$，則 $2a+4b=$ $\underline{\quad -5 \quad}$。

7. $\lim\limits_{x\to 3}\left[\dfrac{1}{x-3}\left(\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-4}\right)\right]=$ $\underline{\quad -2 \quad}$。

★ 8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}=$ $\underline{\quad 3 \quad}$。

9. 設 $f(x)=\begin{cases}x^2+3，x\geq 1\\ 2x^2+3x-1，x<1\end{cases}$，則 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=$ $\underline{\quad 4 \quad}$。

10. $x\in\mathbb{R}$，若 $f(x)=\begin{cases}ax+b，x>1\\ 3，-1\leq x\leq 1\\ 7x^2+a，x<-1\end{cases}$ 為連續函數，則 $a=$ $\underline{\quad -4 \quad}$，$b=$ $\underline{\quad 7 \quad}$。

14-1 高手過招

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2}=$ $\underline{\quad 16 \quad}$。

2. 設 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{2x^2+ax+b}=4$，則實數 $a=$ $\underline{\quad -7 \quad}$，$b=$ $\underline{\quad 6 \quad}$。

14-2 》多項式函數的導數與導函數

重點一　多項式函數的導數

1. 導數：

(1) $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$：用 y 方向變化除以 x 方向變化，稱為平均變化率。

(2) 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 存在，此極限稱為 $f(x)$ 在 $x=a$ 處的導數或瞬時變化率，以 $f'(a)$ 表之。

(3) 若令分母 $x-a=h \Rightarrow x=a+h$，則 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$。

2. 可微分函數：

若函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處的導數存在，稱 $f(x)$ 在 $x=a$ 處可微分。當 $f(x)$ 在定義域中的每點都可微分，稱 $f(x)$ 為可微分函數（多項式函數必為可微分函數），而 $f'(x)$ 稱為 $f(x)$ 之導函數。

觀念補充 //

❶ 函數 $f(x)$ 在斷點、尖角與邊界點之導數不存在。

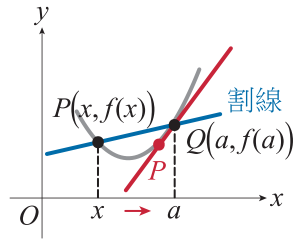
❷ 極限、連續與可微分的概念：

① 極限存在 $\xrightarrow[\text{不一定}]{}$ 連續 $\xrightarrow[\text{不一定}]{}$ 可微分。

② 可微分 $\xrightarrow[\text{一定}]{}$ 連續 $\xrightarrow[\text{一定}]{}$ 極限存在。

3. 導數的幾何意義：

如圖所示，函數 $f(x)$ 上一定點 $Q(a,f(a))$ 及一動點 $P(x,f(x))$，連接 $\overleftrightarrow{PQ}$，割線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 的斜率為 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$。讓 a 不動，x 非常趨近 a，則割線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 會變切線，其切線斜率為 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$，代入點斜式，則過點 $Q(a,f(a))$ 之切線方程式為 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$。



4. 導數的物理意義：

(1) 一運動質點之位移函數 $S(t)$ 在 $t=a$ 處的導數，即為此質點在時刻 a 的瞬時速度。

(2) 一運動質點之速度函數 $V(t)$ 在 $t=a$ 處的導數，即為此質點在時刻 a 的瞬時加速度。

1 老師講解 求導數 學生練習

設函數 $f(x)=x^2+3x$，試求 $f(x)$ 在 $x=2$ 處的導數 $f'(2)$。

想法 $f(x)$ 在 $x=a$ 處之導數

$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$。

[答：7]

解 $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+5)(x-2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}(x+5)$

$=7$

設函數 $f(x)=x^3$，試求 $f(x)$ 在 $x=2$ 處的導數 $f'(2)$。

[答：12]

解 $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x+4)$

$=12$

2 老師講解 導數的定義 學生練習

已知 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，試求：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$

想法 $f(x)$ 在 $x=a$ 處的導數為

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$。

[答：(1) -1　(2) $-\dfrac{1}{4}$]

解 (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1-x}{x}}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{x}=-1$

(2) 原式 $=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{2-(2+h)}{2(2+h)}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-1}{2(2+h)}=-\dfrac{1}{4}$

已知 $f(x)=3x^2+2x$，試求：

(1) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}$

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

[答：(1) -10　(2) 8]

解 (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+2x-8}{x+2}$

$=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(3x-4)(x+2)}{x+2}$

$=\lim\limits_{x\to -2}(3x-4)$

$=3\times(-2)-4=-10$

(2) 原式 $=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3(1+h)^2+2(1+h)-5}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3h^2+8h}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}(3h+8)$

$=3\times 0+8=8$

3 老師講解 導數的變化觀念 學生練習

已知函數 $f(x)$ 的導函數為 x^2+x-2，試求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(6+2h)-f(6)}{10h}$ 之值。

想法 $f(x)$ 在 $x=a$ 處的導數即

$f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$。

[答：8]

解 已知 $f'(x)=x^2+x-2$

故得 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(6+2h)-f(6)}{10h}$

$$=\frac{1}{5}\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(6+2h)-f(6)}{2h}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left(\lim_{2h\to 0}\frac{f(6+2h)-f(6)}{2h}\right)$$

$$=\frac{1}{5}f'(6)=\frac{1}{5}(6^2+6-2)$$

$$=8$$

若已知 $f(1)=0$ 且 $f'(1)=2$，試求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+3h)}{2h}$ 之值。

[答：3]

解 $\because$ $f'(1)=2$，且 $f(1)=0$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)}{h}=2$$

故 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+3h)}{2h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+3h)}{3h}\times\dfrac{3}{2}$

$$=\frac{3}{2}\times\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)}{3h}$$

$$=\frac{3}{2}f'(1)=3$$

已知函數 $f(x)=|x|$，試求 $f(x)$ 在下列條件之導數：

(1) $x=0$　(2) $x=1$

想法　討論 $x=a$ 處的左極限、右極限。

[答：(1) 不存在　(2) 1]

解 (1) 由導數的定義，得

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

右極限：

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0^+}1=1$$

左極限：

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=\lim_{x\to 0^-}(-1)=-1$$

$\because$ 左右極限不一致

$\therefore$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 處的導數不存在

(2) $\because$ $$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{|x|-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1}=1$$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $x=1$ 處的導數存在

設 $f(x)=x|x|$，試求函數 $f(x)$ 在下列條件之導數：

(1) $x=0$　(2) $x=1$

[答：(1) 0　(2) 2]

解 (1) 依導數定義，得

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 0}|x|=0$$

(2) $$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x|x|-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

★5 老師講解 求分段定義函數之導數 學生練習

已知函數 $f(x)=\begin{cases} x-1\text{，}x\geq 1 \\ x^2-x\text{，}x<1 \end{cases}$，試求 $f(x)$ 在 $x=1$ 處的導數。

想法 討論 x 在分段點處的左極限、右極限。

[答：1]

解 $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}$

右極限：

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{x-1}=1$

左極限：

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}x=1$

∵ 左極限＝右極限

∴ $f(x)$ 在 $x=1$ 處的導數

$f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$

設函數 $f(x)=\begin{cases} 2x^2+2\text{，}x\leq 1 \\ 4x\text{，}x>1 \end{cases}$，試求 $f(x)$ 在 $x=1$ 處的導數。

[答：4]

解 $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-4}{x-1}$

右極限：

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-4}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{4x-4}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}4=4$

左極限：

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-4}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(2x^2+2)-4}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1^-}2(x+1)=4$

∵ 左極限＝右極限

∴ $f(x)$ 在 $x=1$ 處的導數

$f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-4}{x-1}=4$

6 老師講解 導數求切線斜率 學生練習

已知曲線 $y=f(x)=x^2+2x+3$，試求在 $x=1$ 處的切線方程式。

想法 過點 $(a,f(a))$ 之切線方程式為 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$。

[答：$4x-y+2=0$]

解 ∵ 切點為 $(1,f(1))=(1,6)$

又 $f(x)$ 在 $x=1$ 之導數為

$f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x+3-6}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+3)(x-1)}{x-1}$

$=1+3=4$

∴ 切線方程式為 $y-6=4(x-1)$

即 $4x-y+2=0$

已知 $y=f(x)=2x^2-4x-1$，試求在 $x=-1$ 處的切線方程式。

[答：$8x+y+3=0$]

解 ∵ 切點為 $(-1,f(-1))=(-1,5)$

又 $f(x)$ 在 $x=-1$ 之導數為

$f'(-1)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$

$=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-4x-1-5}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2(x+1)(x-3)}{x+1}$

$=2\times(-4)=-8$

∴ 切線方程式為 $y-5=-8(x+1)$

即 $8x+y+3=0$

已知一個質點在直線上運動，其位移與時間 t 的關係式為 $S(t)=t^3+100$，試求：

(1) 此質點之速度函數。

(2) 此質點之加速度函數。

想法　位移函數的導函數為速度函數，速度函數的導函數為加速度函數。

[答：(1) $S'(t)=3t^2$　(2) $v'(t)=6t$]

解　(1) 速度函數為

$$\begin{aligned}S'(t)&=\lim_{h\to 0}\frac{S(t+h)-S(t)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(t+h)^3+100\right]-(t^3+100)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{3t^2h+3th^2+h^3}{h}\\&=\lim_{h\to 0}(3t^2+3th+h^2)=3t^2\end{aligned}$$

(2) 加速度函數為

$$\begin{aligned}v'(t)&=\lim_{h\to 0}\frac{v(t+h)-v(t)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{3(t+h)^2-3t^2}{h}\\&=3\lim_{h\to 0}\frac{2th+h^2}{h}\\&=3\lim_{h\to 0}(2t+h)=6t\end{aligned}$$

有一運動質點的位移函數為 $S(t)=\frac{1}{3}t^3+2$ 公尺，試求此質點在 $t=3$ 秒的：

(1) 瞬時速度。

(2) 瞬時加速度。

[答：(1) 9 公尺 / 秒　(2) 6 公尺 / 秒^2]

解　(1) 速度函數為

$$\begin{aligned}S'(t)&=\lim_{h\to 0}\frac{S(t+h)-S(t)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\left[\frac{1}{3}(t+h)^3+2\right]-\left(\frac{1}{3}t^3+2\right)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{3}(3t^2h+3th^2+h^3)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\left(t^2+th+\frac{1}{3}h^2\right)=t^2\end{aligned}$$

故此質點在 $t=3$ 秒的瞬時速度為

$v(3)=3^2=9$（公尺 / 秒）

(2) 加速度函數為

$$\begin{aligned}v'(t)&=\lim_{h\to 0}\frac{v(t+h)-v(t)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{(t+h)^2-t^2}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{2th+h^2}{h}\\&=\lim_{h\to 0}(2t+h)=2t\end{aligned}$$

故此質點在 $t=3$ 秒的瞬時加速度為

$v'(3)=2\times 3=6$（公尺 / 秒^2）

14-2 段落測驗

★表難題

1. 已知 $f(x)=x^3-1$，則 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=$ __3__。

2. $f(x)=x^3$ 的圖形上過點 $(-1,-1)$ 的切線方程式為 __$3x-y+2=0$__。

3. 設 $f(x)=|x-1|$，則 $f(x)$ 在 $x=1$ 之導數為 __不存在__。

★ 4. 函數 $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{3x-2}$ 在 $x=2$ 處的導數為 __$\dfrac{3}{16}$__。

5. 若 $f(x)=3x^2+2x+5$，則 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=$ __20__。【統測】

6. 設拋物線 $y=ax^2+bx$ 在 $x=1$ 處之切線方程式為 $y-2=4(x-1)$，則 $3a-2b$ 之值為 __6__。【統測】

7. 設 $f'(x)$ 為 $f(x)$ 的導函數，若 $f'(x)=2x^2$，則 $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{f(2+\theta)-f(2)}{2\theta}=$ __4__。【統測】

8. 設 $f(x)=x^3-3x^2+5$，則 $f(x)$ 通過點 $x=1$ 時之切線方程式為 __$3x+y-6=0$__。【統測】

9. 設 $f'(x)$ 為 $f(x)$ 的導函數，若 $f(x)=x+|x|$，則 $f'(1)+f'(-1)=$ __2__。【統測】

★10. 已知 $f(x)=\begin{cases} ax+b，若\ x\geq 1 \\ x^2，若\ x<1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 處之導數存在，則 $a=$ __2__，$b=$ __-1__。

14-2 高手過招

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^{10}-1}{x}=$ __10__。

2. 設 $f'(1)=12$，則 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+4h)-f(1-2h)}{3h}=$ __24__。

14-3 》微分公式

重點一 微分公式

1. **微分公式：**令 $f(x)$ 與 $g(x)$ 都是可微分函數

(1) 公式一：$f(x)=k$，k 為常數，則 $f'(x)=0$。

(2) 公式二：$f(x)=x^n$，n 為有理數，則 $f'(x)=nx^{n-1}$，$n\neq 0$。

(3) 公式三：$f(x)=\sqrt[n]{x}$，n 為正整數，則 $f'(x)=\left(x^{\frac{1}{n}}\right)'=\dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$。

(4) 公式四：$\left(f(x)\pm g(x)\right)'=f'(x)\pm g'(x)$。

(5) 公式五：$\left(f(x)g(x)\right)'=f'(x)\times g(x)+f(x)\times g'(x)$。

(6) 公式六：$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)\times g(x)-g'(x)\times f(x)}{\left(g(x)\right)^2}$。

(7) 公式七（連鎖律）：$\left(g\left(f(x)\right)\right)'=g'\left(f(x)\right)\times f'(x)$。

觀念補充 //

設 $F(x)=\left(f(x)\right)^n$，則 $F'(x)=n\left(f(x)\right)^{n-1}\times f'(x)$，$n\neq 0$。

2. **高階導函數：**

$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的一階導函數，$f''(x)$ 是二階導函數，⋯，$f^{(n)}(x)$ 是 n 階導函數；或表成：

$\dfrac{d}{dx}f(x)$ 是一階導函數，$\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ 是二階導函數，⋯，$\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$ 是 n 階導函數。

1 老師講解　函數 $f(x)$ 的導函數　學生練習

試求下列各函數的導函數：

(1) $f(x)=3x^2+\sqrt{x}+\dfrac{5}{x}$

(2) $f(x)=(2x+1)(2-3x)$

(3) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$

想法　微分公式：

$(f(x)g(x))'=f'(x)\times g(x)+f(x)\times g'(x)$；

$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)\times g(x)-g'(x)\times f(x)}{(g(x))^2}$。

[答：(1) $f'(x)=6x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{5}{x^2}$

(2) $f'(x)=-12x+1$

(3) $f'(x)=\dfrac{-3x^2+3}{(x^2+1)^2}$]

解 (1) $f(x)=3x^2+x^{\frac{1}{2}}+5x^{-1}$

$f'(x)=6x+\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-5x^{-2}$

$=6x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{5}{x^2}$

(2) $f'(x)=2(2-3x)+(2x+1)(-3)$

$=-12x+1$

(3) $f'(x)=\dfrac{3(x^2+1)-2x\times 3x}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{-3x^2+3}{(x^2+1)^2}$

試求下列各函數的導函數：

(1) $f(x)=x^4+3\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x^2}$

(2) $f(x)=(2x^2-1)(x+3)$

(3) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}$

[答：(1) $f'(x)=4x^3+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{2}{x^3}$

(2) $f'(x)=6x^2+12x-1$

(3) $f'(x)=\dfrac{7}{(x+3)^2}$]

解 (1) $f(x)=x^4+3x^{\frac{1}{3}}+x^{-2}$

$f'(x)=4x^3+3\times\dfrac{1}{3}\times x^{-\frac{2}{3}}+(-2)\times x^{-3}$

$=4x^3+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{2}{x^3}$

(2) $f'(x)=4x(x+3)+(2x^2-1)\times 1$

$=6x^2+12x-1$

(3) $f'(x)=\dfrac{2\times(x+3)-1\times(2x-1)}{(x+3)^2}$

$=\dfrac{7}{(x+3)^2}$

★ 2 老師講解　微分的連鎖律　學生練習

試求函數 $y=F(x)=(x^2+3x)^6$ 的導函數。

想法　$(g(f(x)))'=g'(f(x))\times f'(x)$。

[答：$F'(x)=6(x^2+3x)^5(2x+3)$]

解 $F'(x)=\left((x^2+3x)^6\right)'$

$=6(x^2+3x)^5(x^2+3x)'$

$=6(x^2+3x)^5(2x+3)$

試求函數 $F(x)=(2x^2-x)^6$ 的導函數。

[答：$F'(x)=6(2x^2-x)^5(4x-1)$]

解 $F'(x)=\left((2x^2-x)^6\right)'$

$=6(2x^2-x)^5(2x^2-x)'$

$=6(2x^2-x)^5(4x-1)$

14

3 老師講解　高階導函數　學生練習

設 $f(x)=x^6-x^3+5x^2-2x+7$，

試求 $f'(x)$、$f''(x)$、$f'''(x)$。

想法　$f^{(n)}(x)$ 是 n 階導函數。

[答：見解析]

解　$f'(x)=6x^5-3x^2+10x-2$

$f''(x)=30x^4-6x+10$

$f'''(x)=120x^3-6$

設 $f(x)=x^3+2x^2+1$，若 $f''(a)=0$，

試求 a 值。

[答：$-\dfrac{2}{3}$]

解　$f'(x)=3x^2+4x$

$f''(x)=6x+4$

$\because\ f''(a)=0$

$\Rightarrow\ 6a+4=0$

$\Rightarrow\ a=-\dfrac{2}{3}$

進階例題

4 老師講解　利用導數定義求 $f'(a)$　學生練習

設 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$，試求 $f'(-2)$。

[答：$-\dfrac{3}{4}$]

解　不代微分公式，依導數定義

$$f'(-2)=\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to -2}\frac{\frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-2)}-0}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{x-1}{(x+1)(x-2)}=\frac{-3}{(-1)(-4)}=-\frac{3}{4}$$

設 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$，試求 $f'(1)$。

[答：$-\dfrac{1}{6}$]

解　不代微分公式，依導數定義

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)(x-4)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{(x-3)(x-4)}=-\frac{1}{6}$$

5 求根式導數

老師講解

已知 $f(x)=\sqrt[3]{(x^2+3x+4)^2}$，試求 $f'(1)$。

[答：$\frac{5}{3}$]

解 $f(x)=(x^2+3x+4)^{\frac{2}{3}}$

$\Rightarrow\ f'(x)=\frac{2}{3}(x^2+3x+4)^{-\frac{1}{3}}(2x+3)$

$\therefore\ f'(1)=\frac{2}{3}\times(1^2+3+4)^{-\frac{1}{3}}\times(2\times1+3)$

$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times5=\frac{5}{3}$

學生練習

已知 $f(x)=\sqrt{x^3+x^2+x+1}$，

試求 $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$。

[答：$\frac{3}{2}$]

解 $f(x)=(x^3+x^2+x+1)^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow\ f'(x)=\frac{1}{2}(x^3+x^2+x+1)^{-\frac{1}{2}}(3x^2+2x+1)$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=$

$\frac{1}{2}\times(1^3+1^2+1+1)^{-\frac{1}{2}}\times(3\times1^2+2\times1+1)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times6=\frac{3}{2}$

14-3 段落測驗

★表難題

1. 試求下列各函數之導函數：
(1) 若 $f(x)=(3x-4)(x^2+2)$，則 $f'(x)=$ $\underline{9x^2-8x+6}$。
(2) 若 $f(x)=\frac{3x-4}{x^2+2}$，則 $f'(x)=$ $\underline{\frac{-3x^2+8x+6}{(x^2+2)^2}}$。

★ 2. 試求下列各函數之導函數：
(1) 若 $f(x)=(3x^2+1)^5$，則 $f'(x)=$ $\underline{30x(3x^2+1)^4}$。
(2) 若 $f(x)=\sqrt{4x+3}$，則 $f'(x)=$ $\underline{\frac{2}{\sqrt{4x+3}}}$。

3. 已知 $f(x)=x^3+3x^2-4x+5$，試求：
(1) 導函數 $f'(x)=$ $\underline{3x^2+6x-4}$。　(2) 第二階導函數 $f''(x)=$ $\underline{6x+6}$。

4. 已知函數 $f(x)=(x^2+x+1)(x^2-x+10)$，求 $f'(1)=$ $\underline{33}$。

★ 5. 已知函數 $f(x)=x^2(1-x)^3$，則 $f'(2)=$ $\underline{-16}$。

★ 6. 設二次函數 $f(x)$ 的導函數為 $f'(x)=2x-7$，而且在點 $(2,f(2))$ 的切線方程式為 $y=-3x+7$，則 $f(x)=$ $\underline{x^2-7x+11}$。

★ 7. 函數 $f(x)=(2x^2-1)^7+3$ 的圖形上，以 $P(1,4)$ 為切點的切線方程式為 $\underline{28x-y-24=0}$。

8. 有一個運動質點的位移函數為 $S(t)=t^3+4t^2+5t+1$，則此運動質點在時刻 $t=1$ 時的瞬時速度為 $\underline{16}$ 公尺 / 秒，瞬時加速度為 $\underline{14}$ 公尺 / 秒^2。

★ 9. 設 $f(x)$ 為三次多項式，若 $f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=1$，則 $f(1)=$ $\underline{\frac{8}{3}}$。

10. 若 $f(x)=(x-1)^5$，且 $f'(x)$ 為 $f(x)$ 的一階導函數，則 $\lim\limits_{x\to2}\frac{f'(x)-f'(2)}{x-2}=$ $\underline{20}$。【統測】

14-4 微分的應用

重點一 一階導數的應用

1. 區間表法：

(1) 開區間：$(a,b)=\{x|a<x<b\}$。（例如：開區間$(3,8)=\{x|3<x<8\}$）

(2) 閉區間：$[a,b]=\{x|a\leq x\leq b\}$。（例如：閉區間$[3,8]=\{x|3\leq x\leq 8\}$）

(3) 半開半閉：$[a,b)=\{x|a\leq x<b\}$或$(a,b]=\{x|a<x\leq b\}$。

2. 遞增函數與遞減函數：

若函數$f(x)$圖形由左至右逐漸升高，稱此函數為遞增函數。即當$x_1<x_2$時，$f(x_1)\leq f(x_2)$成立。

若函數$f(x)$圖形由左至右逐漸下降，稱此函數為遞減函數。即當$x_1<x_2$時，$f(x_1)\geq f(x_2)$成立。

3. 判斷遞增函數與遞減函數：

(1) $f(x)$在開區間(a,b)內滿足$f'(x)\geq 0$，則在閉區間$[a,b]$內$f(x)$是遞增函數。

(2) $f(x)$在開區間(a,b)內滿足$f'(x)\leq 0$，則在閉區間$[a,b]$內$f(x)$是遞減函數。

4. 函數的相對極值： $f(x)$定義域中一點$x=c$

(1) 在c附近的函數值都不大於$f(c)$，則$f(x)$在$x=c$為相對極大值$f(c)$（簡稱極大值）。

(2) 在c附近的函數值都不小於$f(c)$，則$f(x)$在$x=c$為相對極小值$f(c)$（簡稱極小值）。

5. 函數的絕對極值： $f(x)$定義域中一點$x=c$

(1) 若函數$f(x)$在定義域中的每個x的函數值都不大於$f(c)$，則$f(c)$為絕對極大值（簡稱最大值）。

(2) 若函數$f(x)$在定義域中的每個x的函數值都不小於$f(c)$，則$f(c)$為絕對極小值（簡稱最小值）。

6. 導數與極值的關係：

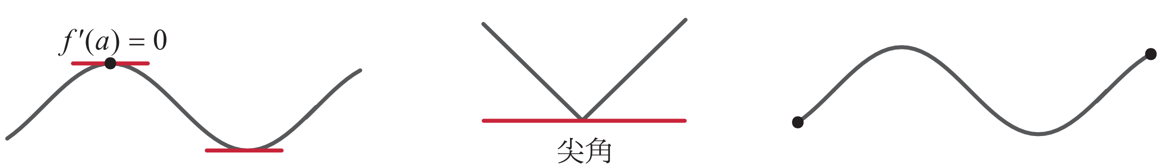
(1) $f'(a)=0$，表$f(x)$在$x=a$處有水平切線。

(2) 若$f(x)$在$x=a$時發生極值且在$x=a$處可微分，則$f'(a)=0$，但其逆敘述不真，即「$f'(a)=0$時，不見得$f(x)$在$x=a$處有極值」。

觀念補充 //

極值可能發生之處：

❶ 滿足$f'(a)=0$點　❷ $f(x)$不可微分點　❸ $f(x)$定義域端點



7. **一階導數判別極值：**

(1) 若 $f'(a)=0$ 且當 $x<a$ 時符合 $f'(x)>0$ 及 $x>a$ 時符合 $f'(x)<0$，則 $f(x)$ 在 $x=a$ 處有極大值。

(2) 若 $f'(a)=0$ 且當 $x<a$ 時符合 $f'(x)<0$ 及 $x>a$ 時符合 $f'(x)>0$，則 $f(x)$ 在 $x=a$ 處有極小值。

1 老師講解 判斷函數的遞增與遞減 學生練習

試求 $f(x)=x^3-3x^2$ 的遞增範圍。

想法　若 $f(x)$ 在區間 (a,b) 滿足 $f'(x)\geq 0$，則在區間 $[a,b]$ 內 $f(x)$ 是遞增函數。

[答：$x\geq 2$ 或 $x\leq 0$]

解　$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

令 $f'(x)\geq 0$

$\Rightarrow\ x(x-2)\geq 0$

$\Rightarrow\ x\geq 2$ 或 $x\leq 0$

即為遞增函數

試求 $f(x)=-x^3+3x^2+9x$ 的遞增範圍。

[答：$-1\leq x\leq 3$]

解　$f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x^2-2x-3)$

令 $f'(x)\geq 0$

$\Rightarrow\ (x-3)(x+1)\leq 0$

$\Rightarrow\ -1\leq x\leq 3$

即為遞增函數

2 老師講解 利用一階導數判斷相對極值 學生練習

試求函數 $f(x)=-x^3+2x^2-x+1$ 的極大值與極小值。

想法　在 $x=c$ 附近的函數值都不大於 $f(c)$，則 $f(c)$ 為極大值；在 $x=c$ 附近的函數值都不小於 $f(c)$，則 $f(c)$ 為極小值。

[答：極大值為 1，極小值為 $\frac{23}{27}$]

解　$f'(x)=-3x^2+4x-1=-(3x-1)(x-1)$

令 $f'(x)\geq 0 \Rightarrow (3x-1)(x-1)\leq 0$

則在 $\frac{1}{3}\leq x\leq 1$ 為遞增函數

令 $f'(x)\leq 0$，

則在 $x\leq\frac{1}{3}$ 或 $x\geq 1$ 為遞減函數

故 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{3}$ 處有極小值 $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{23}{27}$

$f(x)$ 在 $x=1$ 處有極大值 $f(1)=1$

試求函數 $f(x)=2x^3-24x+21$ 的極大值與極小值。

[答：極大值為 53，極小值為 -11]

解　$f'(x)=6x^2-24=6(x-2)(x+2)$

令 $f'(x)\geq 0 \Rightarrow (x-2)(x+2)\geq 0$

則在 $x\leq -2$ 或 $x\geq 2$ 為遞增函數

令 $f'(x)\leq 0$，

則在 $-2\leq x\leq 2$ 為遞減函數

故 $f(x)$ 在 $x=2$ 處有極小值 $f(2)=-11$

$f(x)$ 在 $x=-2$ 處有極大值 $f(-2)=53$

3 老師講解　函數的絕對極值　學生練習

試求函數 $f(x)=x^3-6x^2+9x+3$ 在閉區間 $[0,5]$ 上的最大值與最小值。

想法　在所有相對極值中最大者為絕對最大值，在所有相對極值中最小者為絕對最小值。

[答：最大值為 23，最小值為 3]

解　$f'(x)=3x^2-12x+9$

令 $f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-12x+9=0$

$\Rightarrow 3(x-1)(x-3)=0 \Rightarrow x=1$ 或 3

又 $f(1)=1^3-6\times1^2+9\times1+3=7$

$f(3)=3^3-6\times3^2+9\times3+3=3$

再比較閉區間 $[0,5]$ 端點的函數值

$f(0)=0^3-6\times0^2+9\times0+3=3$

$f(5)=5^3-6\times5^2+9\times5+3=23$

$\therefore$ 函數 $f(x)$ 在閉區間 $[0,5]$ 上的最大值為 23，最小值為 3

設 $f(x)=x^3-3x^2-9x+15$，若 $f(x)$ 在閉區間 $[-2,4]$ 的最大值為 M，最小值為 m，則 $M+m=$ ？

[答：8]

解　$f'(x)=3x^2-6x-9$

令 $f'(x)=3x^2-6x-9=0$

$\Rightarrow (x-3)(x+1)=0 \Rightarrow x=3$ 或 -1

又 $f(3)=-12$，$f(-1)=20$

再比較閉區間 $[-2,4]$ 端點的函數值

得 $f(-2)=13$，$f(4)=-5$

$\therefore$ 函數 $f(x)$ 在閉區間 $[-2,4]$ 上的最大值為 20，最小值為 -12

故 $M+m=8$

4 老師講解　極值的應用問題　學生練習

一長方形鐵片，長 8 公分，寬 5 公分，四個角各截去一個相同大小的正方形，做成無蓋的長方體容器，試問該截去邊長多少可得到最大容量？

想法　依題意列出 $f(x)$ 再應用一階導數求出極值。

[答：1 公分]

解　設截去正方形邊長為 x（$0<2x<5$）

則無蓋容器體積為

$f(x)=x(8-2x)(5-2x)=4x^3-26x^2+40x$

$f'(x)=12x^2-52x+40=4(3x-10)(x-1)$

令 $f'(x)=0$

$\Rightarrow x=1$ 或 $\dfrac{10}{3}$（不合，因 $0<x<\dfrac{5}{2}$）

$\therefore$ 當 $x=1$ 時，有最大值 $f(1)=18$

即該截去邊長為 1 公分的正方形

將一塊邊長為 48 公分的正方形鐵片，四角各截去一個邊長為 x 的正方形，再摺成一個無蓋的長方體容器，試問截去邊長多少時，長方體體積最大？

[答：8 公分]

解　設截去正方形邊長為 x（$0<2x<48$）

則無蓋容器體積為

$f(x)=x(48-2x)^2$

$f'(x)=(48-2x)(48-6x)$

令 $f'(x)=0$

$\Rightarrow x=24$（不合，因 $0<x<24$）或 8

$\therefore$ 當 $x=8$ 時，有最大值 $f(8)=8192$

即截去邊長為 8 公分的正方形

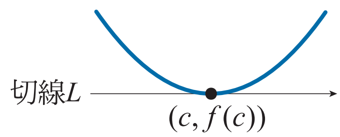
重點二 二階導數的應用

1. 圖形凹向之定義：

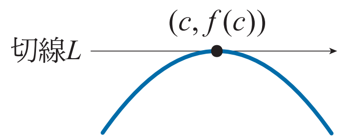
設 c 是開區間 (a,b) 內任意點，過 $(c,f(c))$ 作函數圖形的切線 L。

(1) 當 $f(x)$ 在區間 (a,b) 內的圖形分布恆在切線 L 上方時為凹口向上。

(2) 當 $f(x)$ 在區間 (a,b) 內的圖形分布恆在切線 L 下方時為凹口向下。



上凹



下凹

2. 利用二階導數看凹性： 設 $f(x)$ 在區間 (a,b) 內之二階導數皆存在。

(1) 對區間 (a,b) 內之任意 x 恆有 $f''(x)>0$，則函數 $f(x)$ 在區間 (a,b) 內圖形凹口向上。

(2) 對區間 (a,b) 內之任意 x 恆有 $f''(x)<0$，則函數 $f(x)$ 在區間 (a,b) 內圖形凹口向下。

3. 二階導數判別極值： $f(x)$ 在 $x=a$ 附近可微分，且 $f'(a)=0$。

(1) 若 $f''(a)>0$，則 $f(x)$ 在 $x=a$ 有極小值 $f(a)$。

(2) 若 $f''(a)<0$，則 $f(x)$ 在 $x=a$ 有極大值 $f(a)$。

觀念補充 //

若 $f''(a)=0$ 或 $f''(a)$ 不存在時，仍需以一階導數判別法判斷極值。

4. 反曲點：

函數 $f(x)$ 在 $x=c$ 附近可微分，且 $f(x)$ 圖形於 $x=c$ 左右兩邊的凹向改變，稱點 $(c,f(c))$ 為反曲點，此時 $f''(c)=0$。但其逆敘述不真，即「當 $f''(c)=0$ 時，不一定在 $x=c$ 處是反曲點。」

5 老師講解 函數圖形的凹向 學生練習

試討論 $f(x)=x^3-3x^2-24x+13$ 圖形的凹向。

想法 $f(x)$ 於點 $(c,f(c))$ 附近凹口向上，則 $f''(c)>0$；$f(x)$ 於點 $(c,f(c))$ 附近凹口向下，則 $f''(c)<0$。

[答：$x>1$ 時，凹口向上；$x<1$ 時，凹口向下]

解 $f'(x)=3x^2-6x-24$，$f''(x)=6x-6$

當 $f''(x)>0 \Rightarrow 6x-6>0$

$\Rightarrow x>1$ 時，凹口向上

當 $f''(x)<0 \Rightarrow 6x-6<0$

$\Rightarrow x<1$ 時，凹口向下

試討論 $f(x)=-x^3+3x^2+9x+7$ 圖形的凹向。

[答：$x<1$ 時，凹口向上；$x>1$ 時，凹口向下]

解 $f'(x)=-3x^2+6x+9$，$f''(x)=-6x+6$

當 $f''(x)>0 \Rightarrow -6x+6>0$

$\Rightarrow x<1$ 時，凹口向上

當 $f''(x)<0 \Rightarrow -6x+6<0$

$\Rightarrow x>1$ 時，凹口向下

6 老師講解 利用二階導數判斷相對極值 學生練習

設 $f(x)=x^3-3x^2-9x+2$，試求 $f(x)$ 的極大值與極小值？

想法 若 $f'(a)=0$ 且 $f''(a)>0$，則 $f(a)$ 為極小值；若 $f'(a)=0$ 且 $f''(a)<0$，則 $f(a)$ 為極大值。

[答：極大值為 7，極小值為 -25]

解 $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

令 $f'(x)=0 \Rightarrow x=-1$ 或 3

即 $f'(-1)=f'(3)=0$

又 $f''(x)=6x-6$

利用極值的二階檢定法

(1) 由 $f''(-1)=-12<0$

知 $f(-1)=7$ 是極大值

(2) 由 $f''(3)=12>0$

知 $f(3)=-25$ 是極小值

試求函數 $f(x)=x^3-6x^2+9x+4$ 的極大值與極小值。

[答：極大值為 8，極小值為 4]

解 $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f''(x)=6x-12$

令 $f'(x)=0 \Rightarrow x=1$ 或 3

即 $f'(1)=f'(3)=0$

利用極值的二階檢定法

(1) 由 $f''(1)=-6<0$

知 $f(1)=8$ 是極大值

(2) 由 $f''(3)=6>0$

知 $f(3)=4$ 是極小值

7 老師講解 利用相對極值求原函數 學生練習

設 $f(x)$ 為三次函數， 已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 有相對極大值 1，在 $x=-1$ 有相對極小值 -1，則 $f(x)=$？

想法 若 $f'(a)=0$ 且 $f''(a)>0$，則 $f(a)$ 為極小值；
若 $f'(a)=0$ 且 $f''(a)<0$，則 $f(a)$ 為極大值。

[答：$-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x$]

解 設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

依題意 $f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$ 有兩根為 1 及 -1

由兩根之和：$0=-\frac{2b}{3a}$

兩根之積：$-1=\frac{c}{3a}$

$\therefore\ b=0$ 且 $c=-3a$，代回得

$f(x)=ax^3-3ax+d$

$\Rightarrow\ f(1)=-2a+d=1\cdots\cdots①$

且 $f(-1)=2a+d=-1\cdots\cdots②$

$\therefore\ d=0$，$a=-\frac{1}{2}$，則 $c=\frac{3}{2}$ 代回

$\therefore\ f(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x$

設 $f(x)=ax^3+bx^2+9x-10$，若 $f(x)$ 在 $x=-1$ 與 $x=3$ 處有極值，試求 $a+b$ 之值。

[答：2]

解 依題意 $f'(x)=3ax^2+2bx+9=0$ 有兩根為 -1 及 3

由兩根之和：$2=-\frac{2b}{3a}$

兩根之積：$-3=\frac{9}{3a}$

$\therefore\ a=-1$，$b=3$

故 $a+b=2$

8 老師講解 求反曲點 學生練習

試求 $f(x)=-x^3+3x^2-3x+5$ 的反曲點。

想法 若點 $(c,f(c))$ 為反曲點，則 $f''(c)=0$。

[答：$(1,4)$]

解 $f'(x)=-3x^2+6x-3$，$f''(x)=-6x+6$

令 $f''(x)=0\ \Rightarrow\ -6x+6=0$

$\Rightarrow\ x=1$

用 $x=1$ 代入，得反曲點為 $(1,4)$

試求 $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$ 的反曲點。

[答：$(2,3)$]

解 $f'(x)=3x^2-12x+9$

$f''(x)=6x-12$

令 $f''(x)=0\ \Rightarrow\ 6x-12=0$

$\Rightarrow\ x=2$

用 $x=2$ 代入，得反曲點為 $(2,3)$

C

14

14-4 段落測驗

★表難題

1. 函數 $f(x)=x^3-3x^2-24x+10$ 遞增範圍為 $\underline{x\ge 4\text{或}x\le -2}$ ；遞減範圍為 $\underline{-2\le x\le 4}$ 。

2. 某產品生產 x 單位的成本為 $C(x)=x^3-6x^2+9x+150$（萬元）且 $x\ge 0$，則生產單位在何種範圍內其成本函數為遞減？$\underline{1\le x\le 3}$ 。

★ 3. 若 $f(x)=x^3+kx^2+12x+3$ 恆為遞增函數，則 k 的範圍為 $\underline{-6<k<6}$ 。

4. 函數 $f(x)=x^3-3x^2+2$ 之極大值為 $\underline{2}$ 。

5. $f(x)=-2x^3+3x^2+12x+7$ 的極小值為 $\underline{0}$ 。

6. 設 $f(x)=-x^2+6x-5$，若 $f(x)$ 在區間 $[1,4]$ 的最大值為 M，最小值為 m，則 $M+m=\underline{4}$ 。

7. 函數 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-5$ 在何區間圖形凹口向上？$\underline{(2,+\infty)}$ 。

★ 8. 曲線 $y=x^3-3x^2+2$ 所有切線中之最小斜率為 $\underline{-3}$ 。

9. 函數 $y=x^3-9x^2+24x-7$ 之反曲點坐標為 $\underline{(3,11)}$ 。

10. 設 $f(x)=x^3+ax^2-4x-1$，若 $y=f(x)$ 圖形上反曲點為 $(-1,b)$，則 $a+b=\underline{8}$ 。

★11. 設 $f(x)=x^2-3x+5$ 與函數 $g(x)=|2x+1|$ 圖形相交於兩點，而其 x 坐標分別為 a 與 b，其中 $a<b$。若 $f'(x)$ 與 $g'(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值分別為 m_1 與 m_2，則 $m_1+m_2=\underline{1}$ 。
【統測】

★12. 設 $0\le x\le 30$，若 $f(x)=\frac{x^2+300}{x+10}$，則 $f(x)$ 之最小值為 $\underline{20}$ 。【統測】

13. 設 a、b 為實數，若函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx+6$ 之圖形的反曲點為 $(1,0)$，則 $a-b=\underline{1}$ 。
【統測】

★14. 在坐標平面上，曲線 $y^2=4x$ 與 $x+y+2=0$ 之間的最短距離為 $\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ 。【統測】

14-4 高手過招

1. 設點 P 是 $f(x)=x^2$ 上的動點，已知 $A(0,1)$，則 $\overline{PA}$ 的最小值為 $\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ 。

CH 14 素養練功坊

題目

當異物進入人體氣管時，就會引發咳嗽，咳嗽的速度與異物大小有關。假設某人的氣管半徑為 20 毫米，若異物的半徑為 r 毫米，則咳嗽排除異物所需的速度為 V（毫米 / 秒）可以表示成 $V(r)=k(20r^2-r^3)$，$0\le r\le 20$，其中 k 為正數。試問當 r 為多少時，咳嗽排除異物的速度最大？

關鍵字 $V(r)=k(20r^2-r^3)$，k 為正數，當 r 為多少時，速度最大

單元公式 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 處發生極值，則滿足 $f'(a)=0$

翻譯成數學式 已知函數 $V(r)=k(20r^2-r^3)$，$0\le r\le 20$，k 為正數。當 r 為多少時速度最大？

解題 依題意，將函數 $V(r)$ 微分

一次微分得 $V'(r)=k(40r-3r^2)$

二次微分得 $V''(r)=k(40-6r)$

再令一次微分 $V'(r)=0$，亦即 $(40r-3r^2)=0 \quad \Rightarrow \quad r(40-3r)=0$

解出 $r=0$ 或 $\dfrac{40}{3}$

根據二階導數的應用，因為 $V''\left(\dfrac{40}{3}\right)=-40k<0$

可知當 $r=\dfrac{40}{3}$ 時，$V(r)$ 有最大值

- **回顧：**數學的發展融入了符號語言，它以簡潔與精確的分析來幫助我們理解生活周遭發現的問題，而微積分理論更是邁向高等數學的橋樑。觀察這一題，我們引進了導數的概念，導數在探討函數極值的操作上巧妙簡捷，事半功倍，關照所學的方法中，如果不是利用微分技巧，解此題將會變得非常複雜而棘手。

CH14 素養競技場

★表難題

1. 某港口附近的廠房欲出租，依租約條例第 6 條規定，廠商租用標準廠房之用途僅限於廠商本身之生產或營業使用，其租金單價係依據相關法令條文中，廠房所座落基地之公告地價而設定。已知廠房租金與到港口的距離成反比，但產品運費與到港口的距離成正比。例如：若廠房距港口 1 公里，則每月租金為 50 萬元，運費為 2 千元，依此類推。今想節省成本，廠房在離港口多遠最好？

答：$5\sqrt{10}$ 公里

2. 老鼠屬於齧齒目鼠科，齧齒目之特徵為上下顎各長有一對增長之門牙，自出生以至死亡，無時無刻不在生長，因此必須藉咬齧硬物以磨牙。鼠類除損害農作物、竊取糧食外，有時會污染食物、咬傷人畜、傳播疾病等。假設一家鼠害公司的研究員在某一個社區進行十年的老鼠數目研究，得到老鼠數目函數為 $f(x)=200x^3+ax^2+bx+20000$，$0\le x\le 10$，且知 $f(x)$ 在 $2\le x\le 5$ 為遞減，在 $0\le x\le 2$，$5\le x\le 10$ 為遞增，試求 a 之值。

答：-2100

3. 炎炎夏日蚊子活躍，不僅登革熱等蚊媒傳染病的流行風險增加，也對民眾的生活造成困擾，衛生福利部疾病管制署呼籲民眾應了解蚊子特性、正確防蚊並動手清除孳生源，倘若屋內或社區有積水應立即處理清除。假設某地區蚊子的數量（以千為單位）與該地降雨量（以吋為單位）的關係為函數 $f(x)=-x^3+15x^2-48x+60$，$0\le x\le 10$，試求造成蚊子最少與最多時的降雨量。

答：當降雨量為 2 吋時，蚊子最少；當降雨量為 8 吋時，蚊子最多

4. 某城市出現傳染性病毒，一經感染，七日後被感染人數符合函數 $f(t)=-t^3+3t^2+24t$（百人），試求經過幾日後感染人數會達最高峰，並求出此時之人數為何？

答：4 日後達最高峰，感染人數 8000 人

高三人的視野

此刻打盹只會作夢，此刻打拼就能圓夢。對自己承諾做自己生命的主人，等待風起雲湧，就要扶搖直上，展翅翱翔！

統測解題影音

★表難題

(D) 1. 已知函數 $f(x)=x^3+\frac{12}{x}$ 圖形在切點 (a,b) 的切線斜率為 9。若 $a>0$，則 $a+b=$？

(A) -8 (B) 11 (C) 14 (D) 16。【111(C)】

(C) 2. 若函數 $f(x)=\begin{cases}\frac{2x+a}{x^2-2x-3}，> 3\\ \frac{x-5}{x-b}，x\le 3\end{cases}$ 在 $x=3$ 處連續，則 $a+b=$？

(A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3。【111(C)】

(A) 3. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{(3+h)+2}-\frac{1}{3+2}}{h}=$？

(A) $-\frac{1}{25}$ (B) $-\frac{1}{9}$ (C) $\frac{1}{9}$ (D) $\frac{1}{25}$。【110(C)】

(A) 4. 已知兩多項式函數 $g(x)$ 及 $h(x)$ 之導函數分別為 $g'(x)$ 及 $h'(x)$，且 $h(x)=4g(x)-7x+9$。若 $g'(0)=3$，則 $h'(0)=$？

(A) 5 (B) 9 (C) 14 (D) 21。【110(B)】

(B) 5. 關於下列各極限，何者**錯誤**？【109(C)】

(A) $\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt[3]{x-2}=0$ (B) $\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{x-2}=0$ (C) $\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt[3]{x-2}=0$ (D) $\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x-2}=0$。

★(B) 6. 設 $f(x)=\begin{cases}2x-1，x>2\\ x^2-2x+3，x\le 2\end{cases}$，則 $f'(2)=$？

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 不存在。【109(C)】

(C) 7. 設 $f(x)=x^3-3x^2-24x+32$ 在閉區間 $[-3,3]$ 內的最大值與最小值分別為 m、n，則 $m-n=$ ？ (A) 90 (B) 98 (C) 100 (D) 108。【109(C)】

(B) 8. 已知函數 $f(x)$ 的導函數為 $g(x)=x^2-4x+2$，則 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=$？

(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2。【108(C)】

★(C) 9. 小明設計了一款迴力鏢，已知將此迴力鏢擲出後，迴力鏢過了時間 t 秒後與小明的距離為 $f(t)=\frac{100t}{t^2+9}$ 公尺，若在 t_0 秒時，迴力鏢離小明最遠，則 $t_0=$？

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。【108(C)】

(B) 10. 若直線 L 過點 $(9,5)$，且與函數 $y=f(x)$ 的圖形相切於點 $(3,1)$，則 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=$ (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) 3。【107(C)】

(C) 11. 若 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2x}{x^2-1}$ （$x\neq\pm1$），則 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$之值為？

(A) 不存在 (B) 0 (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) 1。 【107(B)】

(A) 12. 若 $f(x)=\dfrac{-3(x+1)}{x^4+x^2+1}$，則 $f'(-1)$之值為何？

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2。 【107(B)】

(D) 13. 若 $f(x)=\begin{cases}x^2+2 & ，x<-1\\ 2 & ，x=-1\\ 6-3x^2 & ，x>-1\end{cases}$，則 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3。 【106(C)】

(D) 14. 已知 a、b 為實數，且 $f(x)=x^3+ax^2+bx+13$。若 $f'(-1)=1$且 $f'(0)=2$， 則 $a+b=$ (A) -1 (B) 0 (C) 3 (D) 4。 【106(C)】

(C) 15. 若 $f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x+3$的相對極大值為 a，相對極小值為 b，則 $a+b=$

(A) $\dfrac{-27}{2}$ (B) $\dfrac{-3}{2}$ (C) $\dfrac{-1}{2}$ (D) $\dfrac{27}{2}$。 【106(C)】

(A) 16. 求函數 $f(x)=\dfrac{x^2+2x+2}{x-2}$在 $x=1$ 的導數。

(A) -9 (B) -8 (C) -7 (D) -6。 【106(B)】

★(A) 17. 已知 $f(x)=\dfrac{x(2x-1)(13x+2)^4}{\sqrt{27x+9}}$，求 $f(x)$在 $x=0$ 的導數 $f'(0)$之值為

(A) $-\dfrac{16}{3}$ (B) $-\dfrac{8}{3}$ (C) $-\dfrac{4}{3}$ (D) $-\dfrac{1}{3}$。 【105(C)】

(A) 18. 若 $f(x)=\left(x^2+3x-1\right)^2\left(x^3-5x^2\right)$，則 $f'(1)$為何？

(A) -183 (B) -87 (C) -57 (D) -36。 【105(B)】

(D) 19. 求 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2-h}}{h}=$ (A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。 【104(C)】

(B) 20. 已知 a、b 為實數，若過函數 $f(x)=ax^2+bx$ 圖形上一點 $P(1,5)$的切線斜率為 3，則 $f'(2)=$ (A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3。 【104(C)】

(D) 21. 已知 a、b 為實數， $f(x)=(ax+b)^3$。若 $f(2)=1$且 $f'(2)=6$，則 $a-b=$

(A) -2 (B) -1 (C) 3 (D) 5。 【統測】