13 二次曲線

雲端教室

13-1 抛物線

重點一 抛物線

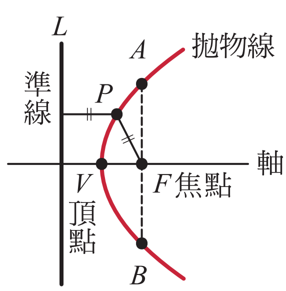
1. 抛物線的定義：

(1) 平面上一定點 F 與定直線 L，則到 F 和 L 等距離的所有點形成之圖形為抛物線。

(2) 定點稱為焦點，定直線稱為準線。抛物線的數學式為 $\overline{PF}=d(P,L)$。

(3) 名詞介紹：頂點（V）、焦點（F）、準線（L）、焦距（$\overline{VF}$）、正焦弦長（$\overline{AB}$）。

(4) 圖形：



2. 抛物線方程式：

(1) 抛物線標準式及相關要素：

方程式		$y^2=4cx$	$(y-k)^2=4c(x-h)$	$x^2=4cy$	$(x-h)^2=4c(y-k)$
頂點		$(0,0)$	(h,k)	$(0,0)$	(h,k)
焦點		$(c,0)$	$(h+c,k)$	$(0,c)$	$(h,k+c)$
準線		$x=-c$	$x=-c+h$	$y=-c$	$y=-c+k$
對稱軸		$y=0$	$y=k$	$x=0$	$x=h$
正焦弦長		$4\|c\|$	$4\|c\|$	$4\|c\|$	$4\|c\|$
開口方向	$c>0$	右	右	上	上
	$c<0$	左	左	下	下

觀念補充 //

設焦點 $F(x_0, y_0)$，準線 L：$ax+by+c=0$，代入拋物線定義：$\overline{PF}=d(P, L)$，得

$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\dfrac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$。（稱為拋物線定義式）

(2) 拋物線一般式：

① 對稱軸平行 x 軸的拋物線：$x=ay^2+by+c$（$a\neq 0$）。

② 對稱軸平行 y 軸的拋物線：$y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）。

觀念補充 //

拋物線參數式：

$x^2=4cy$ 參數式為令 $x=t$，得 $y=\dfrac{t^2}{4c}$。

$y^2=4cx$ 之參數式為令 $y=t$，得 $x=\dfrac{t^2}{4c}$。

1 老師講解　求拋物線標準式各要素　學生練習

試求拋物線 $x^2=-6y$ 之頂點、焦點、準線及正焦弦長。

想法　$x^2=4cy$ 之頂點為 $(0, 0)$、焦點為 $(0, c)$、準線為 $y=-c$、正焦弦長為 $4|c|$。

[答：

頂點	焦點	準線	正焦弦長
$(0, 0)$	$\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$	$y=\dfrac{3}{2}$	$4\|c\|=6$

]

解　原式 $\Rightarrow$ $x^2=4\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)\times y$，$c=-\dfrac{3}{2}$

各要素如下表：

頂點	焦點	準線	正焦弦長
$(0, 0)$	$\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$	$y=\dfrac{3}{2}$	$4\|c\|=6$

試求拋物線 $y^2=8x$ 之頂點、焦點、準線及正焦弦長。

[答：

頂點	焦點	準線	正焦弦長
$(0, 0)$	$(2, 0)$	$x+2=0$	$4\|c\|=8$

]

解　原式 $\Rightarrow$ $y^2=4\times 2\times x$，$c=2$

各要素如下表：

頂點	焦點	準線	正焦弦長
$(0, 0)$	$(2, 0)$	$x+2=0$	$4\|c\|=8$

2 老師講解　求拋物線一般式各要素　學生練習

方程式 $y^2+3x+4y+1=0$ 所表圖形為一拋物線，試求拋物線的頂點、焦點及準線。

想法　配成標準式 $(y-k)^2=4c(x-h)$，再求各要素。

[答：頂點為 $(1,-2)$，焦點為 $\left(\frac{1}{4},-2\right)$，

準線為 $x=\frac{7}{4}$]

解　原式配成標準式

$\Rightarrow\ (y+2)^2=-3(x-1)$

故知頂點為 $(1,-2)$

$\because\ 4c=-3$

$\therefore\ c=-\frac{3}{4}$

則焦點為 $\left(1-\frac{3}{4},-2\right)=\left(\frac{1}{4},-2\right)$

準線為 $x=1-\left(-\frac{3}{4}\right)\ \Rightarrow\ x=\frac{7}{4}$

試求拋物線 $x^2-4y-2=0$ 的頂點、焦點、準線、軸方程式及正焦弦長。

[答：頂點為 $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$，焦點為 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$，

準線為 $y=-\frac{3}{2}$，軸方程式為 $x=0$，

正焦弦長為 4]

解　原式配成標準式

$\Rightarrow\ x^2=4y+2=4\left(y+\frac{1}{2}\right)$

故知頂點為 $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$

$\because\ 4c=4\quad\therefore\ c=1$

則焦點為 $\left(0,-\frac{1}{2}+1\right)=\left(0,\frac{1}{2}\right)$

準線為 $y=-\frac{3}{2}$

軸方程式為 $x=0$

正焦弦長為 $4|c|=4$

3 老師講解　求拋物線方程式　學生練習

試求滿足下列條件之拋物線方程式：

(1) 頂點為 $(1,2)$，焦點為 $(-2,2)$。

(2) 焦點為 $(1,3)$ 且正焦弦長為 8，開口向下。

想法　依條件確定開口，選擇適當的標準式。

[答：(1) $(y-2)^2=-12(x-1)$

(2) $(x-1)^2=-8(y-5)$]

解　(1) $\because$ 開口向左 $\Rightarrow\ c=-3$

故方程式為

$(y-2)^2=4\times(-3)\times(x-1)$

$\Rightarrow\ (y-2)^2=-12(x-1)$

(2) $4|c|=8$，開口向下 $\Rightarrow\ c=-2$

頂點為 $(1,3-(-2))=(1,5)$

故方程式為 $(x-1)^2=-8(y-5)$

試求滿足下列條件之拋物線方程式：

(1) 頂點為 $(0,0)$，焦點為 $\left(-\frac{3}{2},0\right)$。

(2) 頂點為 $(-1,3)$，準線為 $y=5$。

[答：(1) $y^2=-6x$

(2) $(x+1)^2=-8(y-3)$]

解　(1) $|c|=\frac{3}{2}$，但開口向左 $\Rightarrow\ c=-\frac{3}{2}$

故方程式為 $y^2=4\left(-\frac{3}{2}\right)x$

$\Rightarrow\ y^2=-6x$

(2) $|c|=2$，但開口向下 $\Rightarrow\ c=-2$

故方程式為

$(x+1)^2=4\times(-2)\times(y-3)$

$\Rightarrow\ (x+1)^2=-8(y-3)$

4 老師講解 求拋物線方程式 學生練習

一拋物線對稱軸平行 x 軸，且過點 $(0,2)$、$(-2,0)$ 及 $(6,4)$，試求此拋物線方程式。

想法 過三點求拋物線，選擇適當一般式。

[答：$x=\frac{1}{2}y^2-2$]

解 $\because$ 對稱軸平行 x 軸

設拋物線方程式為 $x=ay^2+by+c$

過 $(0,2)$ 代入 $\Rightarrow$ $0=4a+2b+c$

過 $(-2,0)$ 代入 $\Rightarrow$ $-2=0+0+c$

$\Rightarrow$ $c=-2$

過 $(6,4)$ 代入 $\Rightarrow$ $6=16a+4b+c$

解得 $a=\frac{1}{2}$，$b=0$

故方程式為 $x=\frac{1}{2}y^2-2$

試求過 $(0,-1)$、$(1,0)$ 及 $(2,2)$ 三點且對稱軸平行 y 軸的拋物線方程式。

[答：$y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-1$]

解 $\because$ 對稱軸平行 y 軸

設拋物線方程式為 $y=ax^2+bx+c$

過 $(0,-1)$ 代入 $\Rightarrow$ $-1=c$

過 $(1,0)$ 代入 $\Rightarrow$ $0=a+b+c$

過 $(2,2)$ 代入 $\Rightarrow$ $2=4a+2b+c$

解得 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{2}$，$c=-1$

故方程式為 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-1$

C

5 老師講解 求拋物線方程式 學生練習

已知拋物線的焦點為 $F(-2,2)$，準線平行 y 軸，正焦弦長為 8，試求拋物線方程式。（有兩解）

想法 給焦點、準線，代入適當標準式，求 c。

[答：$(y-2)^2=8(x+4)$ 或 $(y-2)^2=-8x$]

解 由正焦弦長 $4|c|=8$ $\Rightarrow$ $|c|=2$

當 $c=2$（開口向右） $\Rightarrow$ 頂點 $(-4,2)$

$\therefore$ 拋物線：$(y-2)^2=8(x+4)$

當 $c=-2$（開口向左） $\Rightarrow$ 頂點 $(0,2)$

$\therefore$ 拋物線：$(y-2)^2=-8x$

試求焦點為 $(-2,0)$，準線平行於 x 軸，正焦弦長為 12 的拋物線方程式。（有兩解）

[答：$(x+2)^2=12(y+3)$ 或

$(x+2)^2=-12(y-3)$]

解 正焦弦長 $4|c|=12$ $\Rightarrow$ $|c|=3$

當 $c=3$（開口向上）

$\Rightarrow$ 頂點 $(-2,-3)$

$\therefore$ 拋物線：$(x+2)^2=12(y+3)$

當 $c=-3$（開口向下）

$\Rightarrow$ 頂點 $(-2,3)$

$\therefore$ 拋物線：$(x+2)^2=-12(y-3)$

13

進階例題 6

老師講解　**拋物線參數式之應用**　學生練習

試求拋物線 $y^2=8x$ 上的點到直線 $x+y+10=0$ 的最短距離。

[答：$4\sqrt{2}$]

解　依參數式

設點 $P\left(\frac{t^2}{8},t\right)$ 在 $y^2=8x$ 上

則 P 點到 $x+y+10=0$ 的距離為

$$d=\left|\frac{\frac{t^2}{8}+t+10}{\sqrt{2}}\right|=\left|\frac{t^2+8t+80}{8\sqrt{2}}\right|=\left|\frac{(t+4)^2+64}{8\sqrt{2}}\right|$$

當 $t=-4$ 時，d 有最小值 $\frac{64}{8\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$

$\therefore$ 最短距離為 $4\sqrt{2}$

試求拋物線 $y^2=16x$ 上與直線 $4x-3y+24=0$ 距離最短之點的坐標。

[答：$\left(\frac{9}{4},6\right)$]

解　依參數式

設拋物線 $y^2=16x$ 上的點坐標為 $(t^2,4t)$

則點 $(t^2,4t)$ 到直線 $4x-3y+24=0$ 的距離

$$d=\frac{|4t^2-12t+24|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{4}{5}|t^2-3t+6|$$

$$=\frac{4}{5}\left|\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\right|\geq\frac{4}{5}\times\frac{15}{4}=3$$

當 $t=\frac{3}{2}$ 時，$\frac{|4t^2-12t+24|}{5}$ 有最小值 3

此時該點的坐標為 $\left(\frac{9}{4},6\right)$

13-1 段落測驗

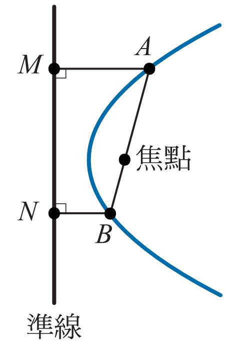
★表難題

1. 拋物線 $y^2+12x-6y+33=0$ 的
(1) 頂點為 $\underline{(-2,3)}$ 。 (2) 焦點為 $\underline{(-5,3)}$ 。 (3) 準線為 $\underline{x=1}$ 。

2. 若一拋物線對稱軸平行 x 軸，焦點為 $(2,3)$，正焦弦長為 6，則此拋物線方程式為
$\underline{(y-3)^2=6\left(x-\frac{1}{2}\right)\text{或}(y-3)^2=-6\left(x-\frac{7}{2}\right)}$ 。

3. 若一拋物線對稱軸為 $x+3=0$，頂點在 $2x+y+3=0$ 上，且通過原點，則拋物線方程式為
$\underline{(x+3)^2=-3(y-3)}$ 。

★ 4. 設 $\overline{AB}$ 是拋物線的焦弦，$\overline{AM}$、$\overline{BN}$ 分別為點 A、B 到準線的垂線，如圖所示。已知 $\overline{AM}=9$，$\overline{BN}=4$，則 $\overline{MN}=$ $\underline{12}$ 。



5. 已知拋物線 $x^2-6x+4y+5=0$ 的焦點為 (a,b)，則 $a+b=$ $\underline{3}$ 。

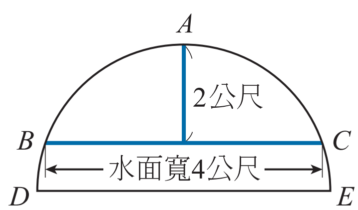
6. 已知拋物線 $y^2-4x+10y-11=0$ 與 y 軸交於 A、B 兩點，則 $\overline{AB}=$ $\underline{12}$ 。

7. 已知 $\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}=|y-6|$ 的圖形為一拋物線，則此拋物線的正焦弦長為 $\underline{14}$ 。

★ 8. 已知一拋物線的對稱軸為 $x=1$，且通過 $(2,2)$ 與 $(-1,5)$，則此拋物線方程式為
$\underline{(x-1)^2=y-1}$ 。

9. 關於拋物線 P：$x=4y^2+8y$，下列敘述何者正確？$\underline{\text{B}}$
(A) 開口向下　(B) 頂點在 $(-4,-1)$　(C) 準線是 $y=-1$　(D) 正焦弦長為 4。　【統測】

★ 10. 已知有一個拋物線形狀的拱橋，拱頂（A 點）離水面 2 公尺時，水面寬度（$\overline{BC}$ 長）為 4 公尺，如圖所示，若水面再下降 1 公尺後，則水面的寬度（$\overline{DE}$ 長）為 $\underline{2\sqrt{6}}$ 公尺。



【統測】

13-1 高手過招

1. 坐標平面上，設直線 $y=x+2$ 與拋物線 $x^2=4y$ 相交於 P、Q 兩點，若 F 表拋物線之焦點，則 $\overline{PF}+\overline{QF}=$ $\underline{10}$ 。

13-2 》橢圓

重點一 橢圓

1. 橢圓的定義：

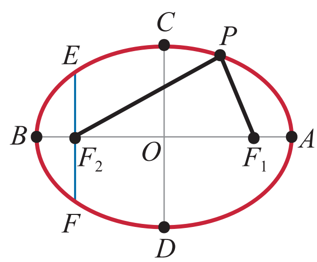
(1) 平面上取兩定點 F_1、F_2，則到 F_1、F_2 的距離和為定值的所有點所形成之圖形稱為橢圓。

(2) 兩定點 F_1、F_2 稱為焦點，距離和為 $2a$。

(3) 橢圓的數學式為 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$，其中 $2a>\overline{F_1F_2}$。

(4) 名詞介紹：中心（O）、兩焦點（F_1、F_2）、長軸（$\overline{AB}$）、短軸（$\overline{CD}$）、焦距（$\overline{OF_1}$、$\overline{OF_2}$）、正焦弦長（$\overline{EF}$）。

(5) 圖形：



2. 橢圓方程式：

(1) 橢圓標準式及相關要素：

方程式	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$
中心	$(0,0)$	(h,k)	$(0,0)$	(h,k)
焦點	$(\pm c,0)$	$(h\pm c,k)$	$(0,\pm c)$	$(h,k\pm c)$
長軸頂點	$(\pm a,0)$	$(h\pm a,k)$	$(0,\pm a)$	$(h,k\pm a)$
短軸頂點	$(0,\pm b)$	$(h,k\pm b)$	$(\pm b,0)$	$(h\pm b,k)$
長軸長	$2a$	$2a$	$2a$	$2a$
短軸長	$2b$	$2b$	$2b$	$2b$
正焦弦長	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{a}$

觀念補充 //

❶ 兩焦點 $F_1(x_1,y_1)$、$F_2(x_2,y_2)$，代入 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$，則

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}+\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}=2a$$，稱為橢圓定義式。

❷ 橢圓中常數 a、b、c 三者之關係：$a^2=b^2+c^2$。

3. **橢圓一般式：**

$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 之圖形為橢圓。（$AC>0$ 且 $A\neq C$）

4. **橢圓參數式：**

(1) 標準式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上任一點 $P(x,y)$ 表成 $\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}$，$0\leq\theta<2\pi$。

(2) 標準式 $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ 上任一點 $P(x,y)$ 表成 $\begin{cases}x=h+a\cos\theta\\ y=k+b\sin\theta\end{cases}$，$0\leq\theta<2\pi$。

C

1 老師講解　求橢圓標準式之各要素　學生練習

試求橢圓 $\dfrac{(x-3)^2}{9}+\dfrac{(y-2)^2}{25}=1$ 之中心、焦點、長軸頂點與正焦弦長。

想法　由橢圓標準式求常數 a、b、c，再求各要素。

[答：中心為 $(3,2)$，
焦點為 $(3,6)$ 與 $(3,-2)$，
長軸頂點為 $(3,7)$ 與 $(3,-3)$，
正焦弦長 $=\dfrac{18}{5}$]

解　$\because\ a^2=25$，$b^2=9$

$\therefore\ c^2=16$

$\Rightarrow\ a=5$，$b=3$，$c=4$

得中心為 $(3,2)$

則焦點為 $(3,6)$ 與 $(3,-2)$

長軸頂點為 $(3,7)$ 與 $(3,-3)$

正焦弦長 $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{18}{5}$

試求橢圓 $7x^2+16y^2=112$ 的中心、焦點與正焦弦長。

[答：中心為 $(0,0)$，
焦點為 $(3,0)$ 與 $(-3,0)$，
正焦弦長 $=\dfrac{7}{2}$]

解　原式 $\Rightarrow\ \dfrac{7}{112}x^2+\dfrac{16}{112}y^2=1$

$\Rightarrow\ \dfrac{x^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{(\sqrt{7})^2}=1$

得中心為 $(0,0)$

又 $a=4$，$b=\sqrt{7}$

$\therefore\ c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9}=3$

則焦點為 $(\pm3,0)$，即 $(3,0)$ 與 $(-3,0)$

正焦弦長 $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\times(\sqrt{7})^2}{4}=\dfrac{7}{2}$

13

試求橢圓 $16x^2+9y^2-64x+18y-71=0$ 之中心、焦點與正焦弦長。

想法 配成標準式 $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$，再求各要素。

[答：中心為 $(2,-1)$，焦點為 $(2,-1+\sqrt{7})$ 與 $(2,-1-\sqrt{7})$，正焦弦長 $=\frac{9}{2}$]

解 原式配成標準式

$\Rightarrow\ 16(x-2)^2+9(y+1)^2=144$

$\Rightarrow\ \frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$

得中心為 $(2,-1)$

$a^2=16$，$b^2=9$，$c^2=a^2-b^2=7$

則焦點為 $(2,-1\pm\sqrt{7})$

即 $(2,-1+\sqrt{7})$ 與 $(2,-1-\sqrt{7})$

正焦弦長 $\frac{2b^2}{a}=\frac{9}{2}$

試求橢圓 $x^2+4y^2+6x-8y-3=0$ 的中心、焦點、正焦弦長與長、短軸長。

[答：中心為 $(-3,1)$，焦點為 $(-3+2\sqrt{3},1)$ 與 $(-3-2\sqrt{3},1)$，正焦弦長 $=2$，長軸長 $=8$，短軸長 $=4$]

解 原式配成標準式

$\Rightarrow\ (x+3)^2+4(y-1)^2=16$

$\Rightarrow\ \frac{(x+3)^2}{4^2}+\frac{(y-1)^2}{2^2}=1$

得中心為 $(-3,1)$

且 $a=4$，$b=2$

$\Rightarrow\ c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{16-4}=2\sqrt{3}$

則焦點為 $(-3\pm2\sqrt{3},1)$

即 $(-3+2\sqrt{3},1)$ 與 $(-3-2\sqrt{3},1)$

正焦弦長 $\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times2^2}{4}=2$

長軸長 $2a=8$，短軸長 $2b=4$

3 老師講解　求橢圓方程式　學生練習

試求下列各橢圓方程式：

(1) 焦點為$(0,\pm 2)$且通過點$(3,-2)$。

(2) 中心為$(2,-2)$，長軸平行 x 軸且長軸長為 8，正焦弦長為 6。

想法　依條件確定橢圓方向，再選擇適當標準式。

［答：(1) $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{16}=1$

(2) $\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y+2)^2}{12}=1$ ］

解 (1) $\because$ 焦點 $F_1(0,-2)$、$F_2(0,2)$

故知中心為$(0,0)$

且 $2c=4 \Rightarrow c=2$

設橢圓：$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$

將點 $P(3,-2)$ 代入

$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$

$\Rightarrow \sqrt{3^2+0^2}+\sqrt{3^2+4^2}=2a$

$\Rightarrow a=4$

又 $b^2=a^2-c^2=12$

故方程式為 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{16}=1$

(2) $\because$ 中心為$(2,-2)$，且長軸平行 x 軸

設橢圓：$\dfrac{(x-2)^2}{a^2}+\dfrac{(y+2)^2}{b^2}=1$

由長軸長 $2a=8 \Rightarrow a=4$

正焦弦長 $\dfrac{2b^2}{a}=6 \Rightarrow b^2=12$

故方程式為 $\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y+2)^2}{12}=1$

試求下列各橢圓方程式：

(1) 中心為$(-1,4)$，一焦點為$(-1,1)$且長軸長為 10。

(2) 長軸兩頂點為$(1,6)$、$(1,-4)$，短軸兩頂點為$(5,1)$、$(-3,1)$。

［答：(1) $\dfrac{(x+1)^2}{16}+\dfrac{(y-4)^2}{25}=1$

(2) $\dfrac{(x-1)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{25}=1$ ］

解 (1) 設橢圓：$\dfrac{(x+1)^2}{b^2}+\dfrac{(y-4)^2}{a^2}=1$

又長軸長 $2a=10 \Rightarrow a=5$

且 $c=3$

$b^2=a^2-c^2=16$

故方程式為 $\dfrac{(x+1)^2}{16}+\dfrac{(y-4)^2}{25}=1$

(2) 由長軸頂點為$(1,6)$、$(1,-4)$

$\Rightarrow$ 中心為$(1,1)$

$\Rightarrow 2a=10 \Rightarrow a=5$

由短軸頂點為$(5,1)$、$(-3,1)$

$\Rightarrow 2b=8 \Rightarrow b=4$

故方程式為 $\dfrac{(x-1)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{25}=1$

4 老師講解　求橢圓方程式　學生練習

一橢圓過點$(1,3)$且與另一橢圓$\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{5}=1$共焦點，試求此橢圓方程式。

想法　兩橢圓共焦點，則中心與焦距均相同。

[答：$\dfrac{(x-1)^2}{8}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$]

解　橢圓$\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{5}=1$中

$\because\ a_1^2=9$，$b_1^2=5\quad\therefore\ c_1=2=c_2$

得中心為$(1,1)$

則焦點為$F_1(3,1)$、$F_2(-1,1)$

由$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}$

$=\sqrt{(3-1)^2+(1-3)^2}+\sqrt{(1+1)^2+(3-1)^2}$

$=4\sqrt{2}=2a_2\quad\Rightarrow\quad a_2=2\sqrt{2}$

又$a_2^2=8\quad\therefore\quad b_2^2=a_2^2-c_2^2=4$

故方程式為$\dfrac{(x-1)^2}{8}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$

一橢圓過點$(4,0)$且與另一橢圓$\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{16}=1$有相同焦點，試求此橢圓方程式。

[答：$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$]

解　橢圓$\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{16}=1$中

$\because\ a_1^2=20$，$b_1^2=16\quad\therefore\ c_1=2=c_2$

得中心為$(0,0)$

則焦點為$F_1(2,0)$、$F_2(-2,0)$

由$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=\sqrt{(4-2)^2}+\sqrt{(4+2)^2}=2a_2$

$\Rightarrow\quad a_2=4$

又$a_2^2=16\quad\therefore\quad b_2^2=a_2^2-c_2^2=12$

故方程式為$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$

5 老師講解　橢圓參數式　學生練習

若橢圓參數式為$x=1-2\cos\theta$，$y=3+4\sin\theta$，$0\le\theta<2\pi$，則正焦弦長為何？

想法　橢圓參數式$\begin{cases}x=h+a\cos\theta\\y=k+b\sin\theta\end{cases}$，$0\le\theta<2\pi$。

[答：2]

解　由參數式$\begin{cases}x=1-2\cos\theta\\y=3+4\sin\theta\end{cases}$，得

$\begin{cases}\dfrac{x-1}{-2}=\cos\theta\cdots\cdots①\\\dfrac{y-3}{4}=\sin\theta\cdots\cdots②\end{cases}$

$①^2+②^2$得$\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y-3)^2}{16}=1$

$\therefore\quad a^2=16$，$b^2=4$

故正焦弦長$\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\times4}{4}=2$

將參數式$\begin{cases}x=3+4\cos\theta\\y=-2+2\sin\theta\end{cases}$ $(0\le\theta<2\pi)$化為直角坐標方程式後，求兩焦點的距離。

[答：$4\sqrt{3}$]

解　由參數式$\begin{cases}x=3+4\cos\theta\\y=-2+2\sin\theta\end{cases}$，得

$\begin{cases}\dfrac{x-3}{4}=\cos\theta\cdots\cdots①\\\dfrac{y+2}{2}=\sin\theta\cdots\cdots②\end{cases}$

$①^2+②^2$得$\dfrac{(x-3)^2}{4^2}+\dfrac{(y+2)^2}{2^2}=1$

$\therefore\quad a=4$，$b=2$

$\Rightarrow\quad c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

故兩焦點的距離$2c=4\sqrt{3}$

進階例題

6　老師講解　橢圓參數式之應用　學生練習

設 $P(x,y)$ 為橢圓 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$ 上一點，試求 $x+y$ 的最大值與最小值。

[答：最大值為 6，最小值為 -4]

解　設橢圓參數式為 $\begin{cases} x=4\cos\theta \\ y=1+3\sin\theta \end{cases}$

代入 $x+y=4\cos\theta+3\sin\theta+1$

利用正餘弦疊合公式

$\because\ -5\le 4\cos\theta+3\sin\theta\le 5$

故 $x+y$ 的最大值為 6，最小值為 -4

已知 P 為橢圓 $\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y+2)^2}{9}=1$ 上的一點，試求 P 到直線 $2x-y+6=0$ 的最長距離。

[答：$3\sqrt{5}$]

解　設橢圓參數式 $P(1+2\cos\theta,-2+3\sin\theta)$

則 P 到直線 $2x-y+6=0$ 的距離

$$d=\left|\frac{2+4\cos\theta+2-3\sin\theta+6}{\sqrt{5}}\right|$$

$$=\left|\frac{4\cos\theta-3\sin\theta+10}{\sqrt{5}}\right|$$

利用正餘弦疊合公式得

$-5\le 4\cos\theta-3\sin\theta\le 5$

故最大值 $\dfrac{15}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}$

13-2 段落測驗

★表難題

1. 設 $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y+12)^2}=k$ 的圖形是橢圓，則常數 k 的範圍為 $\underline{\ k>13\ }$。

2. 橢圓 $\sqrt{(x+4)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y+1)^2}=10$，則
   (1) 中心為 $\underline{\ (0,-1)\ }$。
   (2) 長軸兩頂點為 $\underline{\ (5,-1)、(-5,-1)\ }$。

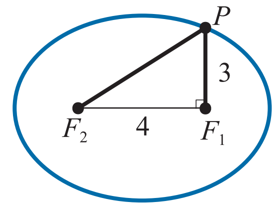
3. 平面上兩點 $F_1(-1,2)$、$F_2(-1,-2)$，若 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=6$，則所有 P 點所形成之圖形方程式為 $\underline{\ \dfrac{(x+1)^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1\ }$。

4. 設方程式 $\dfrac{x^2}{4-t}+\dfrac{y^2}{t-1}=1$ 為橢圓且長軸在 x 軸上，則 t 之範圍為 $\underline{\ 1<t<\dfrac{5}{2}\ }$。

C

13

5. 右圖是一個以 F_1、F_2 為焦點的橢圓，P 為橢圓上一點。若 $\triangle PF_1F_2$ 是一個直角三角形，且 $\overline{PF_1}=3$，$\overline{F_1F_2}=4$，則此橢圓的長軸長為 <u>8</u>，短軸長為 <u>$4\sqrt{3}$</u>。



6. 已知一橢圓的長軸長是兩焦點距離的 2 倍，且正焦弦長為 6，則此橢圓的長軸長為 <u>8</u>。

7. 設 F_1、F_2 為橢圓 $25x^2+9y^2+50x+90y+25=0$ 的兩焦點，又 P 為橢圓上任一點，則 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=$ <u>10</u>。

8. 試求滿足下列條件的橢圓方程式：

(1) 長軸上的頂點為 $(1,2)$、$(9,2)$，短軸長為 4，則此橢圓方程式為 $\dfrac{(x-5)^2}{16}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$。

(2) 一焦點為 $(6,6)$，短軸在 $y=3$ 上，且短軸長為 8，則此橢圓方程式為 $\dfrac{(x-6)^2}{16}+\dfrac{(y-3)^2}{25}=1$。

★ 9. 設 A、B 為橢圓 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 兩焦點，P 為橢圓上任意點，則 $\triangle PAB$ 面積的最大值為 <u>12</u> 平方單位。

★ 10. 已知一橢圓方程式為 $\dfrac{(x+1)^2}{25}+\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$。若點 $P(x,y)$ 為此橢圓上任一點，

則 $\sqrt{(x+5)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=$ <u>10</u>。 【統測】

13-2 高手過招

1. 已知橢圓 $\dfrac{x^2}{k^2+1}+\dfrac{y^2}{2-k}=1$ 與橢圓 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 有共同的焦點，則實數 $k=$ <u>-3</u>。

13-3 雙曲線

重點一 雙曲線

1. **雙曲線的定義：**

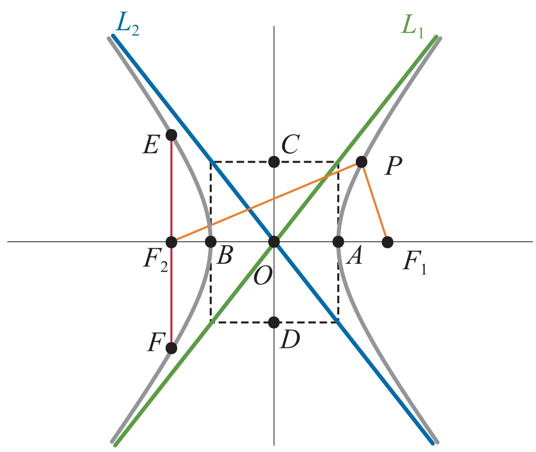
(1) 平面上兩定點 F_1、F_2，則到 F_1、F_2 的距離差為定值的所有點所形成之圖形稱為雙曲線。

(2) 兩定點 F_1、F_2 為焦點，距離差的定值為 $2a$。

(3) 雙曲線數學式為 $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=2a$，其中 $\overline{F_1F_2}>2a$。

(4) 名詞介紹：中心（O）、焦點（F_1、F_2）、貫軸（$\overline{AB}$）、共軛軸（$\overline{CD}$）、焦距（$\overline{OF_1}$、$\overline{OF_2}$）、正焦弦長（$\overline{EF}$）、漸近線（L_1、L_2）。

(5) 圖形：



2. **雙曲線標準式及相關要素：**

方程式	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$
中心	$(0,0)$	$(0,0)$	(h,k)	(h,k)
焦點	$(\pm c,0)$	$(0,\pm c)$	$(h\pm c,k)$	$(h,k\pm c)$
貫軸頂點	$(\pm a,0)$	$(0,\pm a)$	$(h\pm a,k)$	$(h,k\pm a)$
貫軸長	$2a$	$2a$	$2a$	$2a$
共軛軸長	$2b$	$2b$	$2b$	$2b$
正焦弦長	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{a}$
漸近線	$bx\pm ay=0$	$ax\pm by=0$	$b(x-h)\pm a(y-k)=0$	$a(x-h)\pm b(y-k)=0$

觀念補充 //

❶ 兩焦點 $F_1(x_1, y_1)$、$F_2(x_2, y_2)$，代入 $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a$，則

$\left|\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} - \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}\right| = 2a$，稱為雙曲線定義式。

❷ 雙曲線中常數 a、b、c 三者之關係：$c^2 = a^2 + b^2$。

3. **雙曲線的漸近線：**

(1) 與雙曲線非常靠近但不會相交的兩直線。

(2) 兩漸近線之交點為中心。

(3) 將標準式 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 之常數項用 0 取代，再化成 $bx \pm ay = 0$ 就是兩漸近線。

觀念補充 //

因雙曲線上任一點到兩直線 $bx \pm ay = 0$ 的乘積為定值（$d(P, L_1) \times d(P, L_2) = \dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$），當雙曲線向外無限延伸時，離一條線愈遠，相對就靠另一條線愈近，但不會相交，我們稱之漸近線。

4. **雙曲線一般式：**

若 $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 之圖形為雙曲線，則 $AC < 0$。

1　老師講解　求雙曲線標準式之各要素　學生練習

試求雙曲線 $5x^2-4y^2=20$ 的中心、頂點、焦點與正焦弦長。

想法　由雙曲線標準式求常數 a、b、c，再求各要素。

[答：中心為 $(0,0)$，頂點為 $(\pm 2,0)$，焦點為 $(\pm 3,0)$，正焦弦長 $=5$]

解　原式 $\Rightarrow \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$

得中心為 $(0,0)$

又 $a=2$，$b=\sqrt{5}\Rightarrow c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9}=3$

則頂點為 $(\pm 2,0)$，焦點為 $(\pm 3,0)$

正焦弦長 $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\times(\sqrt{5})^2}{2}=5$

試求雙曲線 $16x^2-9y^2+144=0$ 的中心、頂點、焦點、正焦弦長、貫軸長與共軛軸長。

[答：中心為 $(0,0)$，頂點為 $(0,\pm 4)$，焦點為 $(0,\pm 5)$，正焦弦長 $=\dfrac{9}{2}$，貫軸長 $=8$，共軛軸長 $=6$]

解　原式 $\Rightarrow \dfrac{y^2}{4^2}-\dfrac{x^2}{3^2}=1$

得中心為 $(0,0)$

又 $a=4$，$b=3\Rightarrow c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25}=5$

則頂點為 $(0,\pm 4)$

焦點為 $(0,\pm 5)$

正焦弦長 $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\times 3^2}{4}=\dfrac{9}{2}$

貫軸長 $2a=8$，共軛軸長 $2b=6$

2　老師講解　求雙曲線一般式之各要素　學生練習

試求雙曲線 $x^2-4y^2+2x-8y-7=0$ 的中心、焦點、貫軸長、共軛軸長與正焦弦長。

想法　配成標準式 $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$，再求各要素。

[答：中心為 $(-1,-1)$，焦點為 $(-1\pm\sqrt{5},-1)$，貫軸長 $=4$，共軛軸長 $=2$，正焦弦長 $=1$]

解　原式配成標準式

$\Rightarrow \dfrac{(x+1)^2}{4}-\dfrac{(y+1)^2}{1}=1$

故知中心為 $(-1,-1)$

且 $a^2=4$，$b^2=1$

$\Rightarrow c^2=5$

則焦點為 $(-1\pm\sqrt{5},-1)$

貫軸長 $2a=4$，共軛軸長 $2b=2$

正焦弦長 $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\times 1}{2}=1$

試求雙曲線 $16x^2-9y^2-64x-18y-89=0$ 的中心、焦點、貫軸長、共軛軸長與正焦弦長。

[答：中心為 $(2,-1)$，焦點為 $(7,-1)$ 與 $(-3,-1)$，貫軸長 $=6$，共軛軸長 $=8$，正焦弦長 $=\dfrac{32}{3}$]

解　原式配成標準式

$\Rightarrow \dfrac{(x-2)^2}{3^2}-\dfrac{(y+1)^2}{4^2}=1$

故知中心為 $(2,-1)$

又 $a=3$，$b=4$

$\Rightarrow c=\sqrt{a^2+b^2}=5$

則焦點為 $(2\pm 5,-1)$

即 $(7,-1)$ 與 $(-3,-1)$

貫軸長 $2a=6$，共軛軸長 $2b=8$

正焦弦長 $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\times 4^2}{3}=\dfrac{32}{3}$

試求滿足下列條件的雙曲線方程式：

(1) 兩焦點為 $(5,2)$、$(-1,2)$ 且過點 $(7,6)$。

(2) 中心為 $(0,-2)$，一頂點為 $(0,2)$ 且共軛軸長為 6。

想法 依條件確定雙曲線方向，再選擇適當標準式。

[答：(1) $\dfrac{(x-2)^2}{5}-\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$

(2) $\dfrac{(y+2)^2}{16}-\dfrac{x^2}{9}=1$]

解 (1) 依題意得中心為 $(2,2)$，$c=3$

且雙曲線為左右型

設雙曲線：$\dfrac{(x-2)^2}{a^2}-\dfrac{(y-2)^2}{b^2}=1$

由定義：

$\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=4\sqrt{5}-2\sqrt{5}=2a$

$\Rightarrow\ a=\sqrt{5}$，$b^2=c^2-a^2=4$

故方程式為 $\dfrac{(x-2)^2}{5}-\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$

(2) 雙曲線為上下型

設雙曲線：$\dfrac{(y+2)^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$

$\Rightarrow\ a=4$

共軛軸長 $2b=6\ \Rightarrow\ b=3$

故方程式為 $\dfrac{(y+2)^2}{16}-\dfrac{x^2}{9}=1$

試求滿足下列條件的雙曲線方程式：

(1) 到兩定點 $(0,-3)$、$(0,3)$ 的距離差為 $2\sqrt{5}$。

(2) 兩頂點為 $(1,5)$、$(1,-3)$，一焦點為 $(1,6)$。

[答：(1) $\dfrac{y^2}{5}-\dfrac{x^2}{4}=1$

(2) $\dfrac{(y-1)^2}{16}-\dfrac{(x-1)^2}{9}=1$]

解 (1) 取 $F_1(0,-3)$、$F_2(0,3)$

故知中心為 $(0,0)$

且雙曲線為上下型

$2a=2\sqrt{5}\ \Rightarrow\ a=\sqrt{5}$

$2c=\overline{F_1F_2}=6\ \Rightarrow\ c=3$

$\Rightarrow\ b^2=c^2-a^2=9-5=4$

故方程式為 $\dfrac{y^2}{5}-\dfrac{x^2}{4}=1$

(2) 依題意知中心為 $(1,1)$

則 $a=4$，$c=5$

且雙曲線為上下型 $\Rightarrow\ b^2=9$

故方程式為 $\dfrac{(y-1)^2}{16}-\dfrac{(x-1)^2}{9}=1$

4 老師講解　求雙曲線方程式　學生練習

若雙曲線和橢圓 $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$ 共焦點，且正焦弦長為 $\frac{32}{3}$，試求此雙曲線方程式。

想法　雙曲線和橢圓共焦點，則兩者之中心與焦距均相同。

[答：$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$]

解　橢圓 $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$ 的中心為 $(0,0)$

焦點為 $(5,0)$、$(-5,0)$

故此雙曲線的中心亦為 $(0,0)$，$c=5$

為左右型，則

$b^2=25-a^2$ 代入正焦弦長 $\frac{2b^2}{a}=\frac{32}{3}$

$\Rightarrow\ 25-a^2=\frac{16}{3}a\ \Rightarrow\ 3a^2+16a-75=0$

$\Rightarrow\ (3a+25)(a-3)=0$

$\Rightarrow\ a=3$ 或 $-\frac{25}{3}$（不合）$\quad\Rightarrow\ b^2=16$

故方程式為 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

雙曲線和橢圓 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ 有共同焦點，且正焦弦長為 12，試求此雙曲線方程式。

[答：$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{12}=1$]

解　橢圓 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ 的中心為 $(0,0)$

焦點為 $(0,4)$、$(0,-4)$

故雙曲線的中心亦為 $(0,0)$，$c=4$

為上下型，則

$b^2=16-a^2$ 代入正焦弦長 $\frac{2b^2}{a}=12$

$\Rightarrow\ 16-a^2=6a$

$\Rightarrow\ a^2+6a-16=0$

$\Rightarrow\ (a-2)(a+8)=0$

$\Rightarrow\ a=2$ 或 -8（不合）

$\Rightarrow\ b^2=12$

故方程式為 $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{12}=1$

5 老師講解　求漸近線　學生練習

試求雙曲線 $x^2-9y^2-12x-36y-9=0$ 的漸近線方程式。

想法　將標準式 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 之常數項用 0 取代，即得兩漸近線。

[答：$x-3y-12=0$，$x+3y=0$]

解　原式配成標準式

$\Rightarrow\ (x-6)^2-9(y+2)^2=9$

$\Rightarrow\ \frac{(x-6)^2}{3^2}-\frac{(y+2)^2}{1^2}=1$

將常數項用 0 取代

得漸近線方程式為 $\frac{x-6}{3}\pm\frac{y+2}{1}=0$

即 $x-3y-12=0$，$x+3y=0$

試求雙曲線 $9x^2-4y^2-18x-16y-43=0$ 的漸近線方程式。

[答：$3x+2y+1=0$，$3x-2y-7=0$]

解　原式配成標準式

$\Rightarrow\ 9(x-1)^2-4(y+2)^2=36$

$\Rightarrow\ \frac{(x-1)^2}{2^2}-\frac{(y+2)^2}{3^2}=1$

將常數項用 0 取代

得漸近線方程式為 $\frac{x-1}{2}\pm\frac{y+2}{3}=0$

即 $3x+2y+1=0$，$3x-2y-7=0$

C

13

進階例題

6 老師講解 已知兩漸近線求雙曲線方程式 學生練習

試求兩漸近線方程式為 $x+y=0$ 與 $x-y=0$，且過點 $(1,2)$ 之雙曲線方程式。

[答：$x^2-y^2+3=0$]

解 設雙曲線：$(x+y)(x-y)=k$

將點 $(1,2)$ 代入

$\Rightarrow \ (1+2)(1-2)=k=-3$

故方程式為 $(x+y)(x-y)=-3$

$\Rightarrow \ x^2-y^2+3=0$

已知雙曲線的兩漸近線方程式為 $x-2y=0$ 與 $x+2y-4=0$，且過點 $(10,6)$， 試求其雙曲線方程式。

[答：$x^2-4y^2-4x+8y+36=0$]

解 設雙曲線：$(x-2y)(x+2y-4)=k$

將點 $(10,6)$ 代入

$\Rightarrow \ (10-12)(10+12-4)=k$

$\Rightarrow \ k=-36$

故方程式為 $(x-2y)(x+2y-4)=-36$

$\Rightarrow \ x^2-4y^2-4x+8y+36=0$

13-3 段落測驗

★表難題

1. 試求雙曲線 $4x^2-16y^2+4x+16y+1=0$ 的正焦弦長為 $\underline{\quad 4 \quad}$。

2. 試求在坐標平面上到兩定點 $(-13,0)$ 及 $(13,0)$ 的距離差為 24 之所有點所形成的圖形方程式為 $\underline{\quad \dfrac{x^2}{144}-\dfrac{y^2}{25}=1 \quad}$。

3. 設雙曲線 $16y^2-25x^2-96y-50x-281=0$ 的兩焦點為 F_1、F_2，又 P 為雙曲線上任一點，則 $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=\underline{\quad 10 \quad}$。

4 已知雙曲線的兩焦點相距 12，貫軸長 8，則正焦弦長為 $\underline{\quad 10 \quad}$。

5. 平面上二定點 $F_1(7,2)$、$F_2(-5,2)$，點 P 滿足 $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=8$，則 P 之軌跡方程式為 $\underline{\quad \dfrac{(x-1)^2}{16}-\dfrac{(y-2)^2}{20}=1 \quad}$。

6. 以 $x-y+3=0$、$x+y-1=0$ 為漸近線之雙曲線的中心在第 $\underline{\quad 二 \quad}$ 象限。

★ 7. 兩焦點為 $(-2,-2)$、$(8,-2)$，且一漸近線的斜率為 $-\dfrac{4}{3}$ 之雙曲線方程式為 $\underline{\quad \dfrac{(x-3)^2}{9}-\dfrac{(y+2)^2}{16}=1 \quad}$。

8. 已知雙曲線的中心在 $(1,2)$，正焦弦長為 4，兩焦點在直線 $x=1$ 上，且焦點間的距離為 $2\sqrt{15}$，則此雙曲線的方程式為 $\underline{\quad \dfrac{(y-2)^2}{9}-\dfrac{(x-1)^2}{6}=1 \quad}$。

9. 若雙曲線 $H: 9x^2-4y^2-72x+8y+176=0$，則下列直線何者是雙曲線 H 的漸近線？ $\underline{\quad C \quad}$

(A) $L_1: 2x+3y-14=0$ (B) $L_2: 2x-3y+10=0$
(C) $L_3: 3x+2y-14=0$ (D) $L_4: 3x-2y+10=0$。 【統測】

10. 已知 $A\left(\dfrac{15}{4},3\right)$ 為雙曲線 $16x^2-9y^2=144$ 上一點，若 P 與 Q 為此雙曲線的兩焦點，則 $\left|\overline{AP}-\overline{AQ}\right|=\underline{\quad 6 \quad}$。 【統測】

13-3 高手過招

1. 設 P 為雙曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 上一點且位在第一象限。若 F_1、F_2 為此雙曲線兩焦點，且 $\overline{PF_1}:\overline{PF_2}=1:3$，則 $\triangle F_1PF_2$ 的周長為 $\underline{\quad 22 \quad}$。

CH 13 素養練功坊

題目

已知距離小明家正東邊 210 公尺處有座公園，另外有 A、B 兩家相距 110 公尺的便利商店，離家較近的便利商店 A 位在便利商店 B 的正西邊。小明發現，從家出發無論到哪家便利商店買飲料，然後再走到公園的總距離都是 330 公尺。假設平面上公園坐標為 $(105,0)$，便利商店 B 坐標為 $(55,k)$ 且 $k>0$，試求 k 之值。

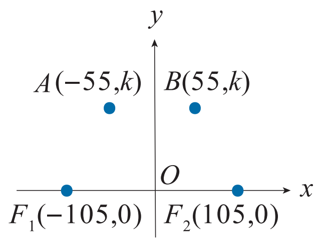
關鍵字 從家出發無論到哪家便利商店，再走到公園的總距離都是 330 公尺
平面上公園坐標為 $(105,0)$，便利商店 B 坐標為 $(55,k)$ 且 $k>0$

單元公式 橢圓方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 中，滿足 $a^2=b^2+c^2$

翻譯成數學式 設橢圓兩焦點為 $F_1(-105,0)$ 與 $F_2(105,0)$，且橢圓上任一點到兩焦點之距離和為 330，試求橢圓上一點 $(55,k)$ 之 k 值為何？

解題 根據題意，我們定坐標後轉成代數方程式來處理

制定坐標如圖示



假設小明家為 $F_1(-105,0)$，公園為 $F_2(105,0)$

並令便利商店 A 為 $(-55,k)$，$k>0$

由題意可知：$\overline{AF_1}+\overline{AF_2}=\overline{BF_1}+\overline{BF_2}=330$（想到橢圓定義）

即 A、B 兩點在以 F_1、F_2 為焦點的橢圓上

且長軸長為 330，可得 $a=165$，$c=105$

由橢圓關係式 $a^2=b^2+c^2$ 得 $b=\sqrt{a^2-c^2}=90\sqrt{2}$

可得橢圓的方程式為 $\dfrac{x^2}{165^2}+\dfrac{y^2}{\left(90\sqrt{2}\right)^2}=1$

因 B 在橢圓上，將 $B(55,k)$ 代入橢圓方程式，得

$$\frac{55^2}{165^2}+\frac{k^2}{\left(90\sqrt{2}\right)^2}=1 \Rightarrow k^2=120^2 \Rightarrow k=120$$

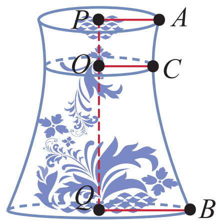
- **回顧：**這一題解題的線索藏得比較深，考驗同學對橢圓定義的理解程度，當然參考解答都很簡單，重點是要養成應試時自己獨立思考的能力才行。在此重申圓錐曲線不能只記標準式，對相關定義也要掌握到位，定義式是考試常出現的熱點，求解時最好能養成圖式合一的思維習慣，這樣才是正確的學習之道。

★表難題

★ 1. 棒球比賽中，一選手將球擊出，球沿著拋物線軌跡飛向外野。已知球被擊中時，在本壘板上方 90 公分處，且當球飛行的水平距離為 20 公尺時，有最大高度 2.5 公尺。若球在外野落地，則落地處與本壘板的距離為何？

答：45 公尺

★ 2. 已知一個雙曲線型的仿清朝乾隆粉彩描金花鳥的花瓶，如圖，其側面是雙曲線的一部分繞其中心線（即共軛軸）旋轉所得的曲面，花瓶的頸部半徑 $\overline{OC}=4$ 公分，上口半徑 $\overline{AP}=5$ 公分且與焦距等長，今裝水至頸部 $\overline{OC}$，且水深 $\overline{OQ}=9$ 公分，試求下底半徑 $\overline{BQ}$ 長度？（提示：建立坐標系）

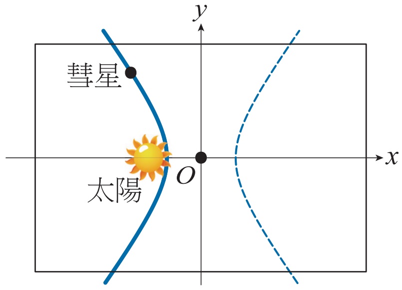


答：$4\sqrt{10}$ 公分

3. 某遊樂場仿小叮噹科學主題樂園之設施「ET 飛碟屋」，其場地之俯看圖為一橢圓。在飛碟屋的地面上有 2 個焦點 F_1、F_2，一人站在點 F_1 處發出聲音，另一人於點 F_2 處可以清晰聽見。已知兩人相距 20 公尺，且橢圓長軸長為短軸長之 $\frac{13}{12}$ 倍，試求正焦弦長為何？

答：$\frac{576}{13}$

4. 有一張雙曲線型的彗星軌道圖片，在圖片上設定坐標軸如圖，將中心置放在原點上，在中心左方 6 cm 處為軌道之頂點，8 cm 處為太陽及軌道焦點的位置，若彗星在 y 軸左方 12 cm 處，試求圖片中彗星與太陽的距離為何？



答：10 cm

高三人的理念

肯投入就會深入，肯付出就會傑出，做一個讓自己感覺驕傲的人。

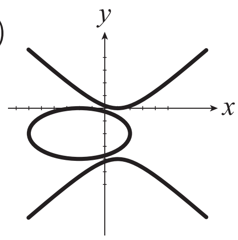
學習沒有 Magic，只有 Basic，做好 Basic，才有 Magic ！

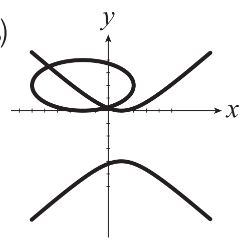
統測解題影音

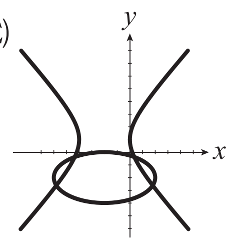
★表難題

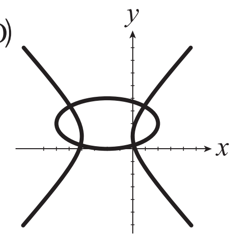
(D) 1. 若 $P(x, y)$ 為橢圓 $4x^2 + 6y^2 - 12y - 6 = 0$ 上任意一點，則 $x + 3y$ 的最大值為何？
(A) $3 + 7\sqrt{3}$　(B) $3 + 5\sqrt{3}$　(C) $3 + 3\sqrt{5}$　(D) $3 + \sqrt{21}$。　【111(C)】

(D) 2. 若有兩個二次曲線方程式，分別為 $x^2 + 4y^2 + 4x - 16y + 4 = 0$ 與 $\dfrac{(x+2)^2}{4} - \dfrac{(y-1)^2}{5} = 1$，則下列何者為此兩曲線的圖形組合？　【110(C)】

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(D) 3. 若橢圓曲線上的任意點到兩點 $(2, -3)$、$(-4, -3)$ 的距離和為 10，則此橢圓之短軸長為何？　(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 8。　【110(B)】

(D) 4. 若給定一橢圓標準式 $\dfrac{(x-4)^2}{25} + \dfrac{(y+2)^2}{144} = 1$，則下列何者正確？
(A) $(4, -2)$ 為其中一焦點　(B) $(9, -2)$ 為其中一長軸頂點
(C) $(4, 10)$ 為其中一短軸頂點　(D) 正焦弦長為 $\dfrac{25}{6}$。　【109(C)】

(B) 5. 已知 $A(-1, 4)$、$B(5, 4)$ 為坐標平面上兩點。若拋物線 $H: y = C(x-h)^2$ 通過 A、B 兩點，則 $C + h =$ ？　(A) $\dfrac{13}{5}$　(B) $\dfrac{22}{9}$　(C) $\dfrac{18}{7}$　(D) $\dfrac{17}{4}$。　【109(B)】

(D) 6. 若 C 為坐標平面上的雙曲線，且其方程式為 $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{16} = 1$，則下列哪一條直線與 C **沒有**交點？　(A) $y = \dfrac{-2}{5}x$　(B) $y = \dfrac{-1}{5}x$　(C) $y = \dfrac{3}{5}x$　(D) $y = \dfrac{4}{5}x$。　【109(B)】

(D) 7. 已知點 F 及直線 L 分別為橢圓 $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1$ 的焦點及短軸。若以直線 L 為準線及點 F 為焦點所作出拋物線的方程式為 $4c(x-h) = (y-k)^2$，則 $|chk| =$
(A) 12　(B) 8　(C) 6　(D) 4。　【108(C)】

(B) 8. 已知 F_1、F_2 為橢圓 $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$ 的焦點，且 F_3、F_4 為雙曲線 $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ 的焦點。若 P 點為上述橢圓與雙曲線之交點，則下列何者正確？　【108(C)】
(A) $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 24$　(B) $\overline{PF_3} + \overline{PF_4} = 26$　(C) $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 6$　(D) $\left|\overline{PF_3} - \overline{PF_4}\right| = 6$。

(D) 9. 若一拋物線之準線為 $x = -1$，焦點為 $(3, 3)$，則此拋物線之方程式為何？
(A) $y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$　(B) $y^2 - 4x - 2y + 13 = 0$
(C) $y^2 - 8x - 2y + 25 = 0$　(D) $y^2 - 8x - 6y + 17 = 0$。　【107(B)】

(D) 10. 若雙曲線 $4x^2-16y^2+4x+16y+1=0$ 的貫軸長及正焦弦長分別為 i、j，則 $i+j=$

(A) $\frac{3}{2}$ (B) 2 (C) $\frac{5}{2}$ (D) 5。【106(C)】

(C) 11. 已知雙曲線 $H:\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ 兩頂點的距離為 a，橢圓 $E:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ 長軸長為 b，則 $a+b=$ (A) 16 (B) 18 (C) 20 (D) 22。【106(B)】

(B) 12. 已知橢圓 $E:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 與圓 $C:x^2+y^2-8x+12=0$，則橢圓 E 與圓 C 有多少個交點？ (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。【106(B)】

(A) 13. 已知一橢圓之焦點分別為 $(3,3)$ 及 $(-1,3)$，且過點 $(3,6)$，則下列何者為橢圓上的點？ (A) $(-1,0)$ (B) $(1,2)$ (C) $(2,3)$ (D) $(4,5)$。【105(C)】

(C) 14. 若橢圓 $x^2+4y^2-4x-16y+a=0$ 不與 x 軸相交，且與 y 軸相切，則 a 之值為何？

(A) 4 (B) 8 (C) 16 (D) 24。【105(B)】

(D) 15. 橢圓 $25x^2+16y^2-100x+32y-284=0$ 之兩焦點在哪兩個象限？

(A) 一、二 (B) 二、三 (C) 三、四 (D) 一、四。【104(C)】

(C) 16. 設 F、F' 為橢圓 $25x^2+9y^2=225$ 的二焦點，點 $P(-3,0)$ 為橢圓上一點，則 $\overline{PF}+\overline{PF'}$ 之值為何？ (A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 15。【統測】

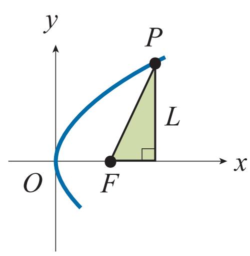
(B) 17. 已知平面上有一雙曲線方程式為 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$，下列何者為其漸近線？

(A) $\frac{x}{4}+\frac{y}{9}=0$ (B) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=0$ (C) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ (D) $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$。【統測】

(B) 18. 設雙曲線的兩焦點分別為 $F(-3,2)$、$F'(5,2)$，且此雙曲線過點 $P\left(5,\frac{13}{3}\right)$，則此雙曲線的貫軸長為何？ (A) 3 (B) 6 (C) 7 (D) 14。【統測】

(A) 19. 已知 $P(x,6)$ 為拋物線 $y^2=8x$ 上一點，F 為此拋物線焦點，L 為過 P 且與 x 軸垂直的直線，如圖。求由 $\overline{PF}$、L 與 x 軸所圍成三角形面積為？

(A) $\frac{15}{2}$ (B) 8 (C) $\frac{17}{2}$ (D) 9。



【統測】

(A) 20. 若橢圓的兩焦點為 $(-2,1)$、$(4,1)$ 且長軸長為 10，求其方程式。

(A) $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$ (B) $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$

(C) $\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$ (D) $\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$。【統測】