12 二元一次不等式與線性規劃

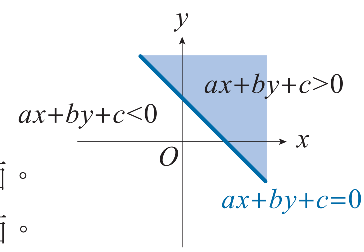
雲端教室

12-1 》二元一次不等式

重點一 二元一次不等式

1. 設 a、b、c 為實數，則 $ax+by+c>0$（或 ≥ 0），$ax+by+c<0$（或 ≤ 0）稱為二元一次不等式。

2. **二元一次不等式之幾何意義：**



(1) 左、右側半平面的判定：設直線 L：$ax+by+c=0$ 且 $a>0$

① $ax+by+c\geq 0$ 表在 L 右方且含 L（沒等號就不含 L）之半平面。

② $ax+by+c\leq 0$ 表在 L 左方且含 L（沒等號就不含 L）之半平面。

觀念補充 //

當二元一次不等式中 x 的係數 $a<0$ 時，可經由不等式規則使 x 的係數變正，再依上述結論判斷其圖形。

(2) 上、下側半平面的判定：設直線 L：$ax+by+c=0$ 且 $a=0$，則化成 $y=k$

① $y\geq k$ 表在 L 上方且含 L（沒等號就不含 L）之半平面。

② $y\leq k$ 表在 L 下方且含 L（沒等號就不含 L）之半平面。

3. **圖解聯立不等式：**

聯立不等式 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1\geq 0 \\ a_2x+b_2y+c_2\geq 0 \end{cases}$ 的圖解包含：$a_1x+b_1y+c_1\geq 0$ 與 $a_2x+b_2y+c_2\geq 0$ 兩半平面重疊區域。

4. 同側與異側：

設兩點 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，直線 $L：ax+by+c=0$

(1) A、B 在 L 之同側 $\Leftrightarrow$ $(ax_1+by_1+c)(ax_2+by_2+c)>0$。（即 $\overline{AB}$ 與 L 不相交）

(2) A、B 在 L 之異側 $\Leftrightarrow$ $(ax_1+by_1+c)(ax_2+by_2+c)<0$。

1　老師講解　圖解二元一次不等式　學生練習

圖示二元一次不等式 $3x+2y-6>0$ 的解。

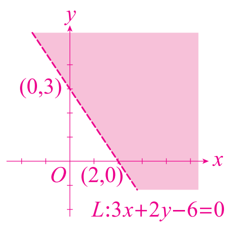
想法　直線 $L：ax+by+c>0$ 表在 L 右方且不含 L 之半平面。

[答：見解析]

解　作直線 $L：3x+2y-6=0$

則 $3x+2y-6>0$ 的圖形在 L 的右半平面（不含 L）

如圖中鋪色部分



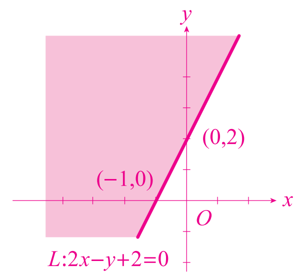
圖示二元一次不等式 $2x-y+2\le 0$ 的解。

[答：見解析]

解　作直線 $L：2x-y+2=0$

則 $2x-y+2\le 0$ 的圖形在 L 的左半平面及直線 L

如圖中鋪色部分



2　老師講解　圖解二元一次聯立不等式　學生練習

圖解二元一次聯立不等式 $\begin{cases}x+y-3\le 0\\x-y-1>0\end{cases}$。

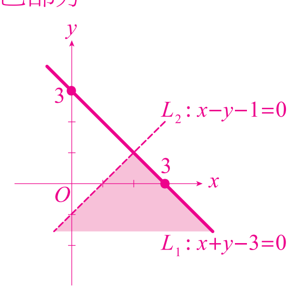
想法　聯立不等式的圖解包含：$x+y-3\le 0$ 與 $x-y-1>0$ 兩半平面重疊區域。

[答：見解析]

解　作出 $x+y-3\le 0$ 與 $x-y-1>0$ 之圖形

取兩者共同部分即所求

如圖中鋪色部分



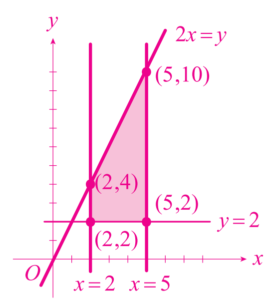
圖解聯立不等式 $\begin{cases}2\le x\le 5\\y\ge 2\\2x\ge y\end{cases}$。

[答：見解析]

解　作出 $2\le x\le 5$，$y\ge 2$ 與 $2x\ge y$ 之圖形

取三者共同部分即所求

如圖中鋪色部分



3 老師講解　圖解二元一次聯立不等式　學生練習

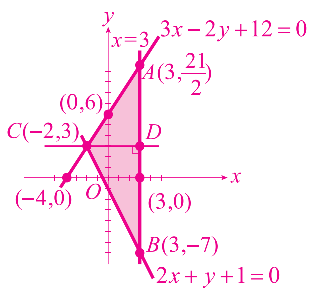
試求 $\begin{cases} x \le 3 \\ 3x-2y+12 \ge 0 \\ 2x+y+1 \ge 0 \end{cases}$ 所圍成的區域面積。

想法　求出聯立不等式圖解區域的頂點坐標，再求面積。

[答：$\dfrac{175}{4}$ 平方單位]

解　作出 $x \le 3$，$3x-2y+12 \ge 0$ 與 $2x+y+1 \ge 0$ 之圖形，取三者共同部分即所求

如圖中鋪色部分



找出三頂點為 $\left(3,\dfrac{21}{2}\right)$、$(3,-7)$、$(-2,3)$

所求三角形面積

$=\dfrac{1}{2}\times$底$\times$高

$=\dfrac{1}{2}\times\left[\dfrac{21}{2}-(-7)\right]\times[3-(-2)]$

$=\dfrac{175}{4}$（平方單位）

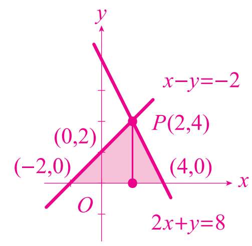
試求不等式 $\begin{cases} y \ge 0 \\ x-y \ge -2 \\ 2x+y \le 8 \end{cases}$ 所圍成之區域面積。

[答：12 平方單位]

解　作出 $y \ge 0$，$x-y \ge -2$ 與 $2x+y \le 8$ 圖形

取三者共同部分即所求

如圖中鋪色部分



找出三頂點為 $(4,0)$、$(2,4)$、$(-2,0)$

所求三角形面積

$=\dfrac{1}{2}\times 6\times 4$

$=12$（平方單位）

4 老師講解　同側與異側　學生練習

設 $P(-2,4)$、$Q(1,5)$，若 P、Q 在直線 $x+y+k=0$ 之同側，則 k 的範圍為何？

想法　若 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$ 兩點在 L 之同側
$\Leftrightarrow (ax_1+by_1+c)(ax_2+by_2+c)>0$。

[答：$k>-2$ 或 $k<-6$]

解　$\because$ P、Q 兩點在直線 $x+y+k=0$ 之同側

代入滿足 $(-2+4+k)(1+5+k)>0$

$\Rightarrow (k+2)(k+6)>0$

$\Rightarrow k>-2$ 或 $k<-6$

設 $P(4,-3)$、$Q(-1,0)$，若 $\overline{PQ}$ 與直線 $2x+y+k=0$ 不相交，試求 k 的範圍。

[答：$k>2$ 或 $k<-5$]

解　$\because$ $\overline{PQ}$ 與直線不相交

$\therefore$ 點 P、Q 在直線的同側

代入滿足 $(8-3+k)(-2+0+k)>0$

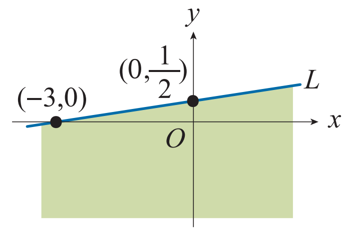
$\Rightarrow (k+5)(k-2)>0$

$\Rightarrow k>2$ 或 $k<-5$

12-1 段落測驗

★表難題

1. 如圖，包含鋪色部分及直線 L 的二元一次不等式為 $\underline{x-6y+3\geq 0}$。



2. 圖解二元一次聯立不等式 $\begin{cases}x+y-5<0\\x-2y-3>0\end{cases}$。$\underline{見解析}$

3. 若點 $(3,2)$、$(2,-1)$ 在直線 $3x-5y+k=0$ 之異側，則 k 的範圍為 $\underline{-11<k<1}$。

4. 滿足聯立不等式 $\begin{cases}2x-3y\geq 6\\x-2y\geq 4\end{cases}$ 的解，其圖形**不含**第 $\underline{二}$ 象限。

5. 若點 $(-1,a)$ 滿足聯立不等式 $\begin{cases}2x-y\leq 6\\x-2y+1>0\end{cases}$ 的解，則合於條件的整數 a 有 $\underline{8}$ 個。

6. 在坐標平面上，不等式方程組 $\begin{cases}y\leq x+2\\x\leq 0\\y\geq 0\end{cases}$ 的區域面積為 $\underline{2}$ 平方單位。

★ 7. 三直線 L_1：$x-y+2=0$，L_2：$2x+3y+9=0$，L_3：$8x+3y-27=0$ 圍成 $\triangle ABC$，若 $P(3,k)$ 為其內部一點，則 k 的範圍為 $\underline{-5<k<1}$。

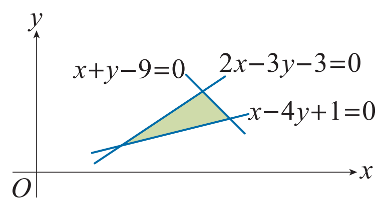
8. 坐標平面上，已知 $A(2,5)$、$B(-2,3)$、$C(3,3)$，試寫出不等式組表示 $\triangle ABC$ 內部區域（含邊界）。$\begin{cases}x-2y+8\geq 0\\2x+y-9\leq 0\\y-3\geq 0\end{cases}$

9. 在直角坐標平面上，設點 $(1,b)$ 滿足不等式 $ax+3y-6\geq 0$，則數對 (a,b) 可為下列何者？
$\underline{B}$ (A) $(1,1)$ (B) $(-5,5)$ (C) $(-1,-1)$ (D) $(5,-5)$。【統測】

10. 下列二元一次聯立不等式中，何者代表圖中所示之三角區域？$\underline{A}$。

(A) $\begin{cases}x-4y+1\leq 0\\2x-3y-3\geq 0\\x+y-9\leq 0\end{cases}$ (B) $\begin{cases}x-4y+1\leq 0\\2x-3y-3\leq 0\\x+y-9\leq 0\end{cases}$

(C) $\begin{cases}x-4y+1\geq 0\\2x-3y-3\geq 0\\x+y-9\geq 0\end{cases}$ (D) $\begin{cases}x-4y+1\geq 0\\2x-3y-3\leq 0\\x+y-9\leq 0\end{cases}$。【統測】



★11. 坐標平面上，滿足不等式方程組 $\begin{cases}2x+y-6\leq 0\\3x-y+3\geq 0\\y\geq 0\end{cases}$ 的區域，其面積為 $\underline{\frac{48}{5}}$。【統測】

12-2 》線性規劃

重點一 線性規劃

1. **線性規劃：**

   將欲討論的數學問題，用二元一次聯立不等式列出限制條件來，再找出目標（一次函數）的最佳解，稱線性規劃。

2. **線性規劃的解法步驟：**

   (1) 根據題意列出滿足條件的聯立不等式並找出目標函數 $f(x,y)$。

   (2) 畫出可行解區域，並求出可行解區域之頂點坐標。

   (3) 利用頂點法，將各頂點坐標代入目標函數 $f(x,y)$ 中，求出最大值或最小值。

觀念補充 //

線性規劃目標函數的最大、最小值必出現在可行解區域之頂點。

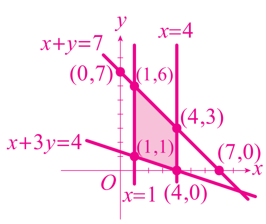
1 老師講解 **聯立不等式求最佳解** 學生練習

若 $\begin{cases} 1 \le x \le 4 \\ x+y \le 7 \\ x+3y \ge 4 \end{cases}$，試求 $f(x,y)=2x+y+5$ 的最大值。

想法 畫出可行解區域，求出可行解區域頂點，利用頂點法將各頂點坐標代入，求出最大值。

[答：16]

解 畫出可行解區域如圖中鋪色部分



求出封閉型可行解之頂點分別為

$(1,6)$、$(4,3)$、$(4,0)$、$(1,1)$

利用頂點法將各頂點坐標

代入 $f(x,y)=2x+y+5$ 中，得

$f(1,6)=13$，$f(4,3)=16$

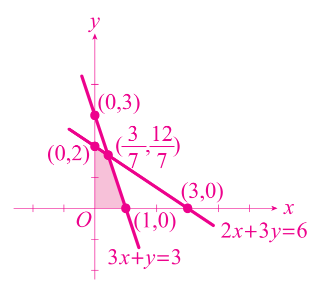
$f(4,0)=13$，$f(1,1)=8$

故最大值為 16

在坐標平面上，若 $x \ge 0$、$y \ge 0$、$3x+y \le 3$ 及 $2x+3y \le 6$，求 $f(x,y)=x+y$ 的最大值。

[答：$\dfrac{15}{7}$]

解 畫出可行解區域如圖中鋪色部分



求出封閉型可行解之頂點分別為

$\left(\dfrac{3}{7},\dfrac{12}{7}\right)$、$(1,0)$、$(0,2)$、$(0,0)$

利用頂點法將各頂點坐標

代入 $f(x,y)=x+y$ 中，得

$f\left(\dfrac{3}{7},\dfrac{12}{7}\right)=\dfrac{15}{7}$（最大）

$f(1,0)=1$，$f(0,2)=2$，$f(0,0)=0$

故最大值為 $\dfrac{15}{7}$

2 老師講解　聯立不等式求最佳解　學生練習

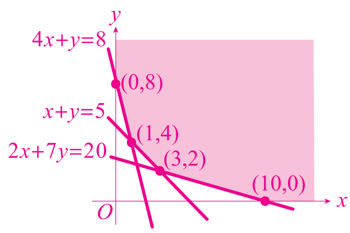
在 $\begin{cases} x \geq 0 , y \geq 0 \\ x + y \geq 5 \\ 2x + 7y \geq 20 \\ 4x + y \geq 8 \end{cases}$ 的條件下，

試求 $f(x , y) = x + 2y$ 的最小值。

想法　畫出可行解區域，求出可行解區域頂點，利用頂點法將各頂點坐標代入，求出最小值。

[答：7]

解　畫出可行解區域如圖中鋪色部分



求出開放型可行解之頂點分別為

$(0 , 8)$、$(1 , 4)$、$(3 , 2)$、$(10 , 0)$

利用頂點法將各頂點坐標

代入 $f(x , y) = x + 2y$ 中，得

$f(0 , 8) = 16$，$f(1 , 4) = 9$

$f(3 , 2) = 7$，$f(10 , 0) = 10$

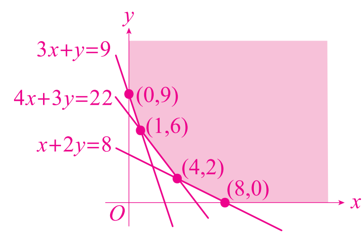
故最小值為 7

在 $\begin{cases} x \geq 0 , y \geq 0 \\ 3x + y \geq 9 \\ x + 2y \geq 8 \\ 4x + 3y \geq 22 \end{cases}$ 的條件下，

試求 $f(x , y) = x + y$ 的最小值。

[答：6]

解　畫出可行解區域如圖中鋪色部分



求出開放型可行解之頂點分別為

$(0 , 9)$、$(1 , 6)$、$(4 , 2)$、$(8 , 0)$

利用頂點法將各頂點坐標

代入 $f(x , y) = x + y$ 中，得

$f(0 , 9) = 9$，$f(1 , 6) = 7$

$f(4 , 2) = 6$，$f(8 , 0) = 8$

故最小值為 6

C

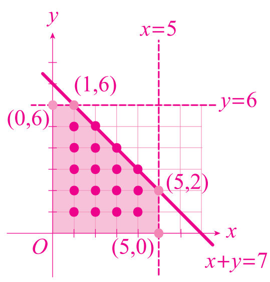
12

圖解二元一次不等式$\begin{cases} 0 < x < 5 \\ 0 < y < 6 \\ x + y \le 7 \end{cases}$，並求在此解區域內有多少個格子點（整數點）。

想法 在可行解區域內逐一討論找出整數點。

[答：圖見解析，17 個]

解 $\begin{cases} 0 < x < 5 \\ 0 < y < 6 \\ x + y \le 7 \end{cases}$ 的圖形為一五邊形，如圖



又 x、y 為整數，討論如下：

(1) $x = 1$ 時，$y = 1 \sim 5$，有 5 組

(2) $x = 2$ 時，$y = 1 \sim 5$，有 5 組

(3) $x = 3$ 時，$y = 1 \sim 4$，有 4 組

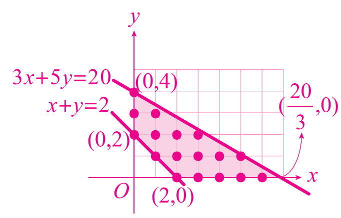
(4) $x = 4$ 時，$y = 1 \sim 3$，有 3 組

故所求為 $5 + 5 + 4 + 3 = 17$

圖解二元一次不等式$\begin{cases} 3x + 5y \le 20 \\ x + y \ge 2 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$，並求在此解區域內有多少個格子點（整數點）。

[答：圖見解析，17 個]

解 不等式組$\begin{cases} 3x + 5y \le 20 \\ x + y \ge 2 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ 的圖形如下



此外，x、y 為整數，討論如下：

$y = 0$ 時，$3x \le 20$

得 $x = 2 \sim 6$，有 5 組

$y = 1$ 時，$3x \le 15$

得 $x = 1 \sim 5$，有 5 組

$y = 2$ 時，$3x \le 10$

得 $x = 0 \sim 3$，有 4 組

$y = 3$ 時，$3x \le 5$

得 $x = 0 \sim 1$，有 2 組

$y = 4$ 時，$3x \le 0$

得 $x = 0$，有 1 組

故所求為 $5 + 5 + 4 + 2 + 1 = 17$ 個格子點

★ 4 老師講解 **解線性規劃** 學生練習

在面積 300 坪的土地上，以不超過 200 萬元的經費建造甲、乙兩種小木屋。已知甲種小木屋每戶占地 20 坪，造價 40 萬元，可獲利 20 萬元；乙種小木屋每戶占地 30 坪，造價 10 萬元，可獲利 25 萬元。試問如何建造的獲利最多？

想法 依題意列式，畫出可行解區域，求出可行解區域頂點，利用頂點法將各頂點坐標代入，找出最大值。

[答：甲小木屋建 3 戶，乙小木屋建 8 戶，獲利最多為 260 萬元]

解 設建造的甲小木屋有 x 戶

乙小木屋有 y 戶

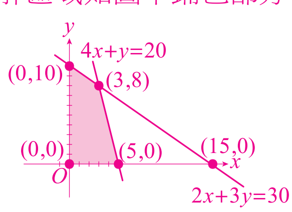
	地坪（坪）	造價（元）	獲利（元）
甲	20	40 萬	20 萬
乙	30	10 萬	25 萬
上限	300	200 萬	

列出聯立不等式 $\begin{cases} x \ge 0, y \ge 0 \\ 20x+30y \le 300 \\ 40x+10y \le 200 \end{cases}$

（x、y 為整數）

與目標函數 $f(x,y)=20x+25y$

畫出可行解區域如圖中鋪色部分



求出可行解之頂點分別為

$(3,8)$、$(0,10)$、$(5,0)$、$(0,0)$

利用頂點法將各頂點坐標代入 $f(x,y)$ 中

得 $f(3,8)=260$，$f(0,10)=250$

$f(5,0)=100$，$f(0,0)=0$

故甲小木屋建 3 戶

乙小木屋建 8 戶

獲利最多為 260 萬元

王老先生有塊五甲地，資金 48000 元，依經驗，種稻產量為 8000 公斤 / 甲，種花生則為 2000 公斤 / 甲；種稻成本為 16000 元 / 甲，種花生為 4000 元 / 甲。今稻米的收益為每公斤 2.6 元，花生為每公斤 6.5 元，試問王老先生該怎麼種才有最大收益？

[答：種稻 $\frac{7}{3}$ 甲，種花生 $\frac{8}{3}$ 甲，最大收益為 83200 元]

解 設王老先生種稻 x 甲，種花生 y 甲

	土地（甲）	每甲成本（元）	產量收益（元）
稻	x	16000	8000×2.6
花生	y	4000	2000×6.5
上限	5	48000	

列出聯立不等式

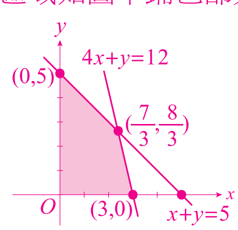
$\begin{cases} x \ge 0, y \ge 0 \\ 16000x+4000y \le 48000 \\ x+y \le 5 \end{cases}$

與目標函數

$f(x,y)=x \times 8000 \times 2.6+y \times 2000 \times 6.5$

$=20800x+13000y$

畫出可行解區域如圖中鋪色部分



求出可行解之頂點分別為

$(3,0)$、$\left(\frac{7}{3},\frac{8}{3}\right)$、$(0,5)$、$(0,0)$

利用頂點法將各頂點坐標代入 $f(x,y)$ 中

得 $f(3,0)=62400$，$f\left(\frac{7}{3},\frac{8}{3}\right)=83200$

$f(0,5)=65000$，$f(0,0)=0$

故種稻 $\frac{7}{3}$ 甲，種花生 $\frac{8}{3}$ 甲

最大收益為 83200 元

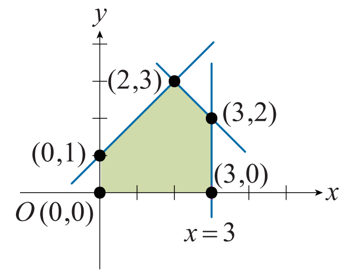
12-2 段落測驗

★表難題

1. 在滿足聯立不等式$\begin{cases}4x+3y\geq 18\\ x+3y\geq 9\\ x\geq 0,y\geq 0\end{cases}$之條件下，$f(x,y)=3x+4y-5$的最小值為＿12＿。

2. 在滿足聯立不等式$\begin{cases}2\leq x\leq 5\\ x+y\leq 6\\ y\geq -2\end{cases}$之條件下，$f(x,y)=2x-y+1$的最大值為＿13＿。

3. 已知一可行解區域如圖中鋪色部分，則 $f(x,y)=x-y+2$ 的最大值為＿5＿。



★ 4. 設(x,y)為二元一次聯立不等式$\begin{cases}x+y\geq -1\\ x-y\geq -3\\ 4x-y\leq 6\end{cases}$圖解上的任一點。已知 $P=x+ky$ 在點$(1,-2)$有唯一最小值，則實數 k 的範圍為＿$k>1$＿。

5. 子涵要為公司規劃鞋子的銷售方式，她有兩種選擇：開設直營店，或在百貨公司設立專櫃。已知直營店每月租金 2 萬元，需聘請店員 6 人，裝潢費用是 80 萬元；在百貨公司設立專櫃每月租金是 6 萬元，需聘請店員 3 人，裝潢費用是 90 萬元。現在公司的預算是每月租金不超過 120 萬元，聘請的店員不超過 150 人，裝潢費用不超過 2400 萬元，從過去的經驗知道直營店每月的利潤為 14 萬元，百貨公司專櫃每月的利潤為 10 萬元。若子涵打算開設直營店 x 間，設立百貨公司專櫃 y 間，則除了 $x\geq 0$，$y\geq 0$（x、y 為整數）兩個條件外，寫下 x，y 必須滿足的不等式組與目標函數分別為＿$\begin{cases}x+3y\leq 60\\ 2x+y\leq 50\\ 8x+9y\leq 240\end{cases}$＿、＿$14x+10y$＿。

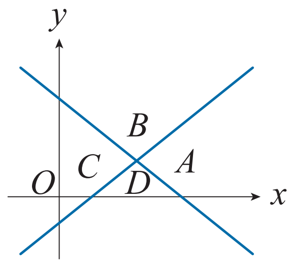
★ 6. 已知一斤牛油含 2000 大卡熱量及 100 克蛋白質，一斤麵包含 1000 大卡熱量及 25 克蛋白質，每人每天至少需要 3000 大卡熱量及 100 克蛋白質。若麵包每斤 12 元，牛油每斤 42 元，若要花最少錢又能保有所需的熱量及蛋白質，要買＿$\frac{1}{2}$＿斤牛油和＿2＿斤麵包。

★ 7. 某肥料公司有兩家工廠生產同一產品，甲工廠每月最多可生產 180 公噸，乙工廠每月最多可生產 120 公噸，該公司希望每月總共最少要生產 220 公噸。依據經驗，甲工廠每生產 1 公噸的產品，則產生 15 公斤的一氧化氮汙染空氣；而乙工廠每生產 1 公噸的產品，則產生 30 公斤的一氧化氮汙染空氣，則甲、乙兩工廠各生產＿180＿、＿40＿公噸的產品才能符合需求，且對空氣的汙染減至最低。

★ 8. 有甲、乙兩種食物，甲每份 20 元，乙每份 10 元，甲每份含 A 營養素 5 單位，B 營養素 10 單位；乙每份含 A 營養素 20 單位，B 營養素 15 單位。若每人一天至少需要 A 營養素 50 單位，B 營養素 60 單位，在費用最少原則下，應買甲、乙兩種食物分別為___0___、___4___份，以獲得足夠的營養。

9. 坐標平面上，若不等式組 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y \leq 6 \\ 2x+y \leq 8 \end{cases}$ 所圍區域為 R，則 $f(x,y)=-2x+3y$ 在 R 上的最大值為___18___。【統測】

10. 聯立不等式 $\begin{cases} x+y \geq 10 \\ x-y \leq 1 \end{cases}$ 的可行解區域是圖中的___B___部分。（填 A、B、C 或 D）



【統測】

C

12

題目

某工廠採購甲、乙兩種規格的鎳板來製作「皮卡丘」徽章、「哆啦 A 夢」徽章和「米老鼠」徽章。已知每塊甲規格的鎳板可以製作 8 個「皮卡丘」徽章、4 個「哆啦 A 夢」徽章及 8 個「米老鼠」徽章；每塊乙規格的鎳板可以製作 4 個「皮卡丘」徽章、4 個「哆啦 A 夢」徽章及 16 個「米老鼠」徽章，且每塊甲規格的鎳板成本為 400 元；每塊乙規格的鎳板成本為 320 元。然而零售商需要 28 個「皮卡丘」徽章、20 個「哆啦 A 夢」徽章及 48 個「米老鼠」徽章，為了滿足零售商的需求，設工廠要買進 x 塊甲規格鎳板、y 塊乙規格鎳板，其中 x 和 y 為非負整數，試問如何購買才能達到最低成本。

關　鍵　字　甲、乙兩種規格的鎳板
每塊甲規格的鎳板成本為 400 元，每塊乙規格的鎳板成本為 320 元
零售商需要 28 個「皮卡丘」徽章、20 個「哆啦 A 夢」徽章
及 48 個「米老鼠」徽章

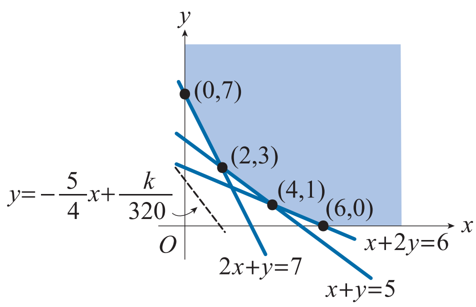
單 元 公 式　將可行解區域之頂點坐標代入目標函數 $f(x,y)$，求出最大、最小值

翻譯成數學式　已知 $\begin{cases}8x+4y\ge 28\\4x+4y\ge 20\\8x+16y\ge 48\end{cases}$，$x$、$y$ 為非負整數，求 $400x+320y$ 的最小值為何？

解 題　依照題意敘述，我們列式得

$$\begin{cases}8x+4y\ge 28\\4x+4y\ge 20\\8x+16y\ge 48\end{cases}，x、y 為非負整數 \Rightarrow \begin{cases}2x+y\ge 7\\x+y\ge 5\\x+2y\ge 6\end{cases}，x、y 為非負整數$$

找出目標函數為 $f(x,y)=400x+320y$
再畫出可行解區域如圖
接著求出四個頂點坐標分別為
$(0,7)$、$(2,3)$、$(4,1)$、$(6,0)$
逐一代入目標函數 $f(x,y)=400x+320y$ 中
可得 $f(0,7)=2240$，$f(2,3)=1760$，$f(4,1)=1920$，$f(6,0)=2400$
所以當 $x=2$，$y=3$ 時達到最低成本為 1760 元



● **回顧：**線性規劃的題目字句冗長，容易卡關之處就是讀出題意，閱讀要耐心看懂，再依題意列出限制條件。線性規劃的最佳解總是發生在可行解的頂點上，解題步驟就是將頂點代入目標函數逐一檢驗，但為什麼會發生在頂點要通透理解，訓練解題貴在分析與錘鍊思考，千萬不要貪多速解，而淪為死背規則。

★表難題

★ 1. 某農業公司計畫向政府承租一筆平地和一筆山坡地，分別種植平地作物 A 和山坡地作物 B。已知平地每一單位面積的年租金是 30 萬元，山坡地每一單位面積的年租金是 20 萬元，公司一年能夠提供土地租金的上限是 80 萬元。平地作物 A 的種植成本每單位面積一年是 40 萬元，山坡地作物 B 的種植成本每單位面積一年是 50 萬元，公司一年能夠提供種植成本的上限是 130 萬元。每年收成後，作物 A 每單位面積的利潤是 120 萬元，作物 B 每單位面積的利潤是 90 萬元。試問公司一年應租平地和山坡地各多少單位面積，收成後可以獲得最大利潤？又此時的最大利潤為何？（註：所租土地的面積並不限制一定要是整數單位）

答：租平地 2 單位面積，山坡地 1 單位面積
可得最大利潤 330 萬元

2. 某歌唱訓練班根據以往的經驗得知：每花 10 萬元在雜誌上替歌手打廣告可以提升歌手的形象指數 5 點，知名度指數 10 點；若是同樣花 10 萬元在電臺上替歌手打廣告則可以提升歌手的形象指數 6 點，知名度指數 4 點。根據市場調查發現，欲成為知名歌手的形象指數至少 160 點，知名度指數亦至少 160 點，而且綜合指數（形象指數與知名度指數的和）至少 360 點。試問：歌唱訓練班要讓一位新歌手（其形象指數與知名度指數皆為 0）成為知名歌手至少應該花多少廣告費其效果最好。

答：290 萬元

高三人的智慧
成功者專注一事，失敗者盲目嘗試，把該做的事做到極致。人人都希望一帆風順，若沒風，就自己動手划吧！

(D) 1. 坐標平面上，若點 $A(a,-6)$ 在直線 $L：2x-y+12=0$ 之右半平面，則下列何者為 a 的可能值？

(A) -15　(B) -12　(C) -10　(D) -7。　【111(C)】

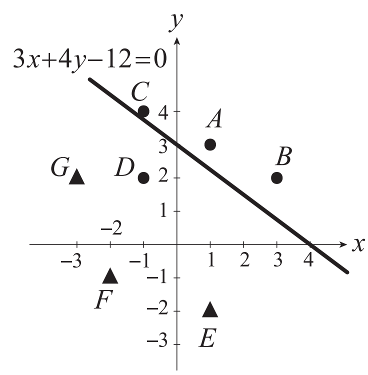
(B) 2. 一家具公司有 60 個書櫃，存放於桃園 20 個及雲林 40 個。從桃園送到台北及台南的運費各為每個書櫃 200 元及 400 元，而雲林送到台北及台南的運費各為每個書櫃 600 元及 300 元。該公司收到兩筆訂單，要送到台北 30 個以及台南 20 個。試問該公司運送書櫃的最少運費為多少元？

(A) 12000　(B) 16000　(C) 18000　(D) 20000。　【111(B)】

(D) 3. 下列數對 (x,y) 何者滿足聯立不等式 $\begin{cases}100x+2y-100\geq 0\\2x+100y+100\leq 0\end{cases}$？

(A) $(0,0)$　(B) $(1,1)$　(C) $(2,1)$　(D) $(2,-2)$。　【110(B)】

★(D) 4. 在人工智慧的分類技術中，用到以直線分類不同物件的概念。設平面上有七個點 $A(1,3)$、$B(3,2)$、$C(-1,4)$、$D(-1,2)$、$E(1,-2)$、$F(-2,-1)$、$G(-3,2)$ 分屬●、▲二類，其中直線 $L：3x+4y-12=0$ 未能將它們正確分類，如圖標示。若將 L 平行移動至新的位置成為新直線 L_1 且能達到正確分類目的，則下列何者可為 L_1 的直線方程式？



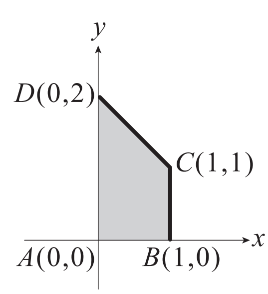
(A) $3x+4y+2=0$　(B) $3x+4y-6=0$　(C) $6x+8y+3=0$　(D) $6x+8y-3=0$。

【109(C)】

(A) 5. 在 $\begin{cases}x+2y-6\geq 0\\x+y-10\leq 0\\2\leq x\leq 9\end{cases}$ 的條件下，求其可行解區域的面積（平方單位）為何？

(A) $\dfrac{119}{4}$　(B) $\dfrac{59}{2}$　(C) $\dfrac{117}{4}$　(D) $\dfrac{55}{2}$。　【109(C)】

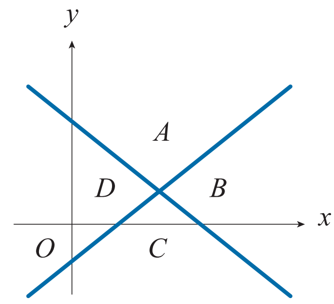
(D) 6. 如圖所示，四邊形 $ABCD$ 的四個頂點為 $A(0,0)$、$B(1,0)$、$C(1,1)$ 及 $D(0,2)$，則四邊形 $ABCD$ 區域為下列哪一個聯立不等式的圖解？



(A) $\begin{cases}0\leq x\leq 1\\0\leq y\leq 2\\x+2y\leq 2\end{cases}$　(B) $\begin{cases}0\leq x\leq 1\\0\leq y\\2x+y\leq 2\end{cases}$　(C) $\begin{cases}0\leq x\leq 1\\0\leq y\leq 1\\x+y\leq 2\end{cases}$　(D) $\begin{cases}0\leq x\leq 1\\0\leq y\\x+y\leq 2\end{cases}$。

【109(B)】

(　B　) 7. 有兩條直線 L_1：$3x-5y=2$、L_2：$x+2y=3$ 將平面分成四個區域，如圖所示，試問區域 A 可用哪一組不等式表示？



(A) $\begin{cases}3x-5y\ge 2\\ x+2y\ge 3\end{cases}$ (B) $\begin{cases}3x-5y\le 2\\ x+2y\ge 3\end{cases}$ (C) $\begin{cases}3x-5y\ge 2\\ x+2y\le 3\end{cases}$

(D) $\begin{cases}3x-5y\le 2\\ x+2y\le 3\end{cases}$。 【108(C)】

(　C　) 8. 設 (x,y) 滿足 $y\ge 0$，$0\le x\le 4$，$-2\le x-2y\le 2$，試問 $f(x,y)=x-y$ 之最大值為何？

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4 。 【108(B)】

(　B　) 9. 坐標平面上滿足不等式 $\begin{cases}2x+y\le 10\\ x+2y\le 8\\ x\ge 0, y\ge 0\end{cases}$ 的區域面積為何？

(A) 12　(B) 13　(C) 15　(D) 16。 【107(C)】

★(　B　) 10. 滿足二元一次聯立不等式 $\begin{cases}x+y\le 4\\ 3x-y\le 6\\ 5x+2y\ge 10\end{cases}$ 的整數解 (x,y) 共有幾個？

(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 6。 【105(C)】

(　B　) 11. 若在聯立不等式 $\begin{cases}2x-y\ge 0\\ x+3y\le 7\\ x-4y\le 0\end{cases}$ 的條件下，目標函數 $f(x,y)=2x-3y-2$ 的最大值為 M，最小值為 m，則 $M+m=$

(A) -5　(B) -3　(C) 3　(D) 5。 【104(C)】

★(　C　) 12. 在聯立不等式組 $x\ge 0$，$y\ge 0$，$2x+y-6\le 0$，$x+2y-6\le 0$ 的可行解區域中，x、y 均為整數解的點坐標 (x,y) 共有多少個？

(A) 8　(B) 9　(C) 11　(D) 無限多個。 【統測】

★(　D　) 13. 某汽車公司擁有甲、乙兩家工廠，生產 A、B 兩種不同型的汽車，若甲廠每天可完成 10 台 A 型的汽車與 20 台 B 型的汽車，乙廠每天可完成 30 台 A 型的汽車與 10 台 B 型的汽車。如果公司要製造 150 台 A 型汽車與 100 台 B 型汽車，則兩工廠各工作幾天，才能使兩工廠所花費的工作天數之和最少？

(A) 甲廠 0 天，乙廠 10 天　(B) 甲廠 1 天，乙廠 6 天

(C) 甲廠 15 天，乙廠 0 天　(D) 甲廠 3 天，乙廠 4 天。 【統測】

★(　B　) 14. 在坐標平面上，求二元一次聯立不等式 $\begin{cases}|x-2y|\le 2\\ |x+2y|\le 2\end{cases}$ 的解所成的區域面積。

(A) 2　(B) 4　(C) 6　(D) 8。 【統測】