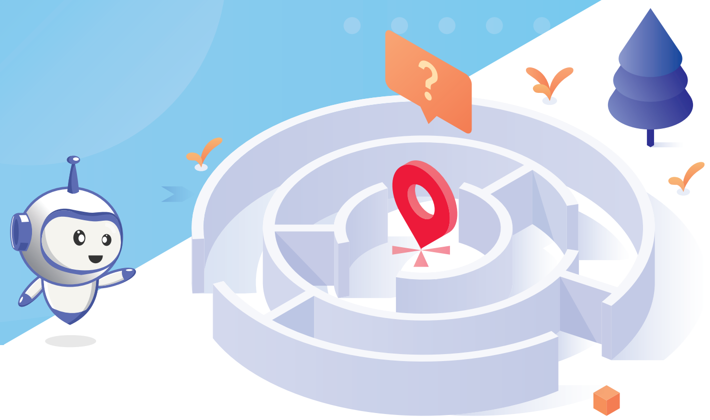
11



一次聯立方程式與矩陣

雲端教室

11-1 》一次方程組與矩陣列運算

課綱即時報	
新增	矩陣列運算、矩陣的運算
刪除	無

重點一 二元一次方程組

1. **聯立方程式：**

   將多個方程式並列一起，其解代表各圖形的交點坐標。

2. **二元一次方程組：**

   $$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \cdots\cdots ① \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

   一般解法為：加減消去法、代入消去法及行列式解法。

3. **加減消去法：**

   利用等量公理把兩式相加或相減以消去某一未知數，再逐步將其餘未知數解出。

4. **二元一次方程組之解的型態：**

   (1) 兩直線相交於一點，則方程組恰有一組解。
   （又稱相容方程組）

   (2) 兩直線重合，則方程組有無限多組解。
   （又稱相依方程組）

   (3) 兩直線平行，表兩直線無交點，則方程組無解。
   （又稱矛盾方程組）

觀念補充 //

L_1：$a_1x+b_1y+c_1=0$，L_2：$a_2x+b_2y+c_2=0$

❶ 當 $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ $\Rightarrow$ 兩直線相交。

❷ 當 $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ $\Rightarrow$ 兩直線重合。

❸ 當 $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ $\Rightarrow$ 兩直線平行。

5. **二元一次方程組之克拉瑪公式：**

二元一次方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$，令 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

(1) $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ 恰有一組解，$(x,y)=\left(\dfrac{\Delta_x}{\Delta},\dfrac{\Delta_y}{\Delta}\right)$，為兩條相交直線。

(2) $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0 \Rightarrow$ 有無限多組解，為兩條重合直線。

(3) $\Delta=0$，但 $\Delta_x\neq 0$ 或 $\Delta_y \neq 0 \Rightarrow$ 無解，為兩條平行直線。

1 老師講解　二元一次方程組之解的型態

已知 $\begin{cases} 4x+ay-1=0 \\ 2x-6y+b=0 \end{cases}$，試求下列各題中 a、b 之條件：

(1) 恰有一組解。

(2) 無限多組解。

(3) 無解。

想法

$\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$（恰有一組解）；

$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$（無限多組解）；

$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$（無解）。

[答：(1) $a\neq-12$，b 為任意實數

(2) $a=-12$，$b=-\dfrac{1}{2}$

(3) $a=-12$，$b\neq-\dfrac{1}{2}$]

解 (1) $\dfrac{4}{2}\neq\dfrac{a}{-6}$

$\Rightarrow a\neq-12$，b 為任意實數

(2) $\dfrac{4}{2}=\dfrac{a}{-6}=\dfrac{-1}{b}$

$\Rightarrow a=-12$，$b=-\dfrac{1}{2}$

(3) $\dfrac{4}{2}=\dfrac{a}{-6}\neq\dfrac{-1}{b}$

$\Rightarrow a=-12$，$b\neq-\dfrac{1}{2}$

學生練習

已知 $\begin{cases} 2x-y-a=0 \\ bx+2y-3=0 \end{cases}$，試求下列各題中 a、b 之條件：

(1) 恰有一組解。

(2) 無限多組解。

(3) 無解。

[答：(1) $b\neq-4$，a 為任意實數

(2) $a=-\dfrac{3}{2}$，$b=-4$

(3) $a\neq-\dfrac{3}{2}$，$b=-4$]

解 (1) $\dfrac{2}{b}\neq\dfrac{-1}{2}$

$\Rightarrow b\neq-4$，a 為任意實數

(2) $\dfrac{2}{b}=\dfrac{-1}{2}=\dfrac{-a}{-3}$

$\Rightarrow a=-\dfrac{3}{2}$，$b=-4$

(3) $\dfrac{2}{b}=-\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{-a}{-3}$

$\Rightarrow a\neq-\dfrac{3}{2}$，$b=-4$

2　老師講解　克拉瑪公式解方程組　學生練習

若方程組$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$之解為$(1,2)$，

則$\begin{cases}2a_1x+5b_1y+3c_1=0\\2a_2x+5b_2y+3c_2=0\end{cases}$之解為何？

想法　當$\Delta\neq0\Rightarrow(x,y)=\left(\dfrac{\Delta_x}{\Delta},\dfrac{\Delta_y}{\Delta}\right)$。

[答：$\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{6}{5}\right)$]

解　依題意代克拉瑪公式得

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}c_1&b_1\\c_2&b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}}=1$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}a_1&c_1\\a_2&c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}}=2$$

代入所求方程組之解

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}-3c_1&5b_1\\-3c_2&5b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2a_1&5b_1\\2a_2&5b_2\end{vmatrix}}=\frac{-15\times\begin{vmatrix}c_1&b_1\\c_2&b_2\end{vmatrix}}{10\times\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}}$$

$$=-\frac{3}{2}$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}2a_1&-3c_1\\2a_2&-3c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2a_1&5b_1\\2a_2&5b_2\end{vmatrix}}=\frac{-6\times\begin{vmatrix}a_1&c_1\\a_2&c_2\end{vmatrix}}{10\times\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}}$$

$$=-\frac{6}{5}$$

故$(x,y)=\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{6}{5}\right)$

若方程組$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$之解為$(4,3)$，

則$\begin{cases}a_1x-3b_1y+2c_1=0\\a_2x-3b_2y+2c_2=0\end{cases}$之解為何？

[答：$(-8,2)$]

解　依題意代克拉瑪公式得

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}c_1&b_1\\c_2&b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}}=4$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}a_1&c_1\\a_2&c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}}=3$$

代入所求方程組之解

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}-2c_1&-3b_1\\-2c_2&-3b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1&-3b_1\\a_2&-3b_2\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{6\times\begin{vmatrix}c_1&b_1\\c_2&b_2\end{vmatrix}}{(-3)\times\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}}=-8$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}a_1&-2c_1\\a_2&-2c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1&-3b_1\\a_2&-3b_2\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{(-2)\times\begin{vmatrix}a_1&c_1\\a_2&c_2\end{vmatrix}}{(-3)\times\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}}=2$$

故$(x,y)=(-8,2)$

C

11

重點二　三元一次方程組

1. 三元一次方程組一般解法：

加減消去法、行列式解法。

2. 三元一次方程組之克拉瑪公式：

三元一次方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$

令 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$\Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$\Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$

(1) $\Delta\neq 0$ 時，恰有一組解，$(x,y,z)=\left(\dfrac{\Delta_x}{\Delta},\dfrac{\Delta_y}{\Delta},\dfrac{\Delta_z}{\Delta}\right)$。

(2) $\Delta=0$ 時，分以下兩種情況：

① 若 Δ_x、Δ_y、Δ_z 中有一不為 0，則無解。

② 若 $\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$，則可能無限多組解或無解。

3. 齊次方程組：常數項均為 0 的方程組

三元一次方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$

齊次方程組必有 $(0,0,0)$ 之解，其解的型態只有唯一解或無限多組解兩種。

觀念補充 //

若 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \end{cases}$ 且 $xyz\neq 0$，則 $x:y:z=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$。

3 老師講解　運用加減消去法解方程組　學生練習

試求下列方程組的解：

(1) $\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 2x-y+z=1 \\ 3x-2y-z=6 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 2x-y-z=-1 \\ x-2y+z=2 \\ x+y-2z=3 \end{cases}$

想法　利用加減消去法先消去其中一個未知數化成二元一次方程組再求其解。

[答：(1) $x=2$，$y=1$，$z=-2$　(2) 無解]

解 (1) $\begin{cases} x+2y+z=2\cdots\cdots ① \\ 2x-y+z=1\cdots\cdots ② \\ 3x-2y-z=6\cdots\cdots ③ \end{cases}$

用加減消去法先消 z：

$\begin{cases} ①-②：-x+3y=1 \\ ①+③：4x=8 \end{cases}$

解得 $x=2$，$y=1$，再代回得 $z=-2$

(2) $\begin{cases} 2x-y-z=-1\cdots\cdots ① \\ x-2y+z=2\cdots\cdots ② \\ x+y-2z=3\cdots ③ \end{cases}$

用加減消去法先消 z：

$\begin{cases} ①+②：3x-3y=1 \\ ①\times 2-③：3x-3y=-5 \end{cases}$

兩式矛盾，故原式無解

試求三元一次聯立方程式的解：

(1) $\begin{cases} x-y+2z=3 \\ 2x+2y+3z=5 \\ 3x+y+2z=5 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x+2y+3z=3 \\ x+y+2z=13 \\ -x+2y+z=7 \end{cases}$

[答：(1) $x=1$，$y=0$，$z=1$　(2) 無解]

解 (1) $\begin{cases} x-y+2z=3\cdots\cdots ① \\ 2x+2y+3z=5\cdots\cdots ② \\ 3x+y+2z=5\cdots\cdots ③ \end{cases}$

用加減消去法消去 x：

$\begin{cases} ②-①\times 2：4y-z=-1 \\ ③-①\times 3：4y-4z=-4 \end{cases}$

解得 $y=0$，$z=1$，再代回得 $x=1$

(2) $\begin{cases} x+2y+3z=3\cdots\cdots ① \\ x+y+2z=13\cdots\cdots ② \\ -x+2y+z=7\cdots\cdots ③ \end{cases}$

用加減消去法消去 x：

$\begin{cases} ①-②：y+z=-10 \\ ②+③：3y+3z=20 \end{cases}$

兩式矛盾，故原式無解

用克拉瑪公式解聯立方程式

$$\begin{cases}2x+2y-z=0\\3x+y+2z=2\\4x+2y+z=2\end{cases}$$ 。

想法 克拉瑪公式：

$x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$，$z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}$。

[答：$x=1$，$y=-1$，$z=0$]

解 $\because$ $\Delta=\begin{vmatrix}2&2&-1\\3&1&2\\4&2&1\end{vmatrix}$

$=2+16-6-8-6-(-4)$

$=2\neq 0$

$\therefore$ 此聯立方程式恰有一組解，又

$\Delta_x=\begin{vmatrix}0&2&-1\\2&1&2\\2&2&1\end{vmatrix}$

$=0+8-4-0-4-(-2)$

$=2$

$\Delta_y=\begin{vmatrix}2&0&-1\\3&2&2\\4&2&1\end{vmatrix}$

$=4+0-6-8-0-(-8)$

$=-2$

$\Delta_z=\begin{vmatrix}2&2&0\\3&1&2\\4&2&2\end{vmatrix}$

$=4+16+0-8-12-0$

$=0$

得 $x=\dfrac{2}{2}=1$，$y=\dfrac{-2}{2}=-1$，$z=\dfrac{0}{2}=0$

利用克拉瑪公式解聯立方程式

$$\begin{cases}2x+y+2z=1\\x+y-z=1\\x+2y-3z=0\end{cases}$$ 。

[答：$x=3$，$y=-3$，$z=-1$]

解 $\because$ $\Delta=\begin{vmatrix}2&1&2\\1&1&-1\\1&2&-3\end{vmatrix}$

$=-6-1+4-(-4)-(-3)-2$

$=2\neq 0$

$\therefore$ 此聯立方程式恰有一組解，又

$\Delta_x=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&1&-1\\0&2&-3\end{vmatrix}$

$=-3+0+4-(-2)-(-3)-0$

$=6$

$\Delta_y=\begin{vmatrix}2&1&2\\1&1&-1\\1&0&-3\end{vmatrix}$

$=-6-1+0-0-(-3)-2$

$=-6$

$\Delta_z=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&1&1\\1&2&0\end{vmatrix}$

$=0+1+2-4-0-1$

$=-2$

得 $x=\dfrac{6}{2}=3$，$y=\dfrac{-6}{2}=-3$

$z=\dfrac{-2}{2}=-1$

★ 5 老師講解　解應用問題　學生練習

甲、乙、丙三人做一工程。若三人同時做，10 天可完工；只有乙、丙二人做，則 15 天可完工；若甲先做 15 天，再由丙接手，則需再 30 天才能完成。試問若由乙單獨做，多少天能完工？

想法　若單獨做需 x 天完工，則每天完成全部的 $\frac{1}{x}$。

[答：20 天]

解　設甲、乙、丙單獨做各需 x、y、z 天完工

$$\text{則}\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{10}\cdots\cdots①\\[2mm]\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{15}\cdots\cdots②\\[2mm]\dfrac{15}{x}+\dfrac{30}{z}=1\cdots\cdots③\end{cases}$$

由 ① − ② 得

$\frac{1}{x}=\frac{1}{30}\ \Rightarrow\ x=30$

代入 ③ 得 $z=60$

再代回 ② 得 $y=20$

故乙一人做要 20 天完工

某月份麵粉批發之買賣價格如下：低筋麵粉一斤、中筋麵粉三斤、高筋麵粉二斤，售價 215 元；低筋麵粉二斤、中筋麵粉一斤、高筋麵粉三斤，售價也是 215 元；低筋麵粉三斤、中筋麵粉二斤、高筋麵粉一斤，售價則為 200 元。試求低筋、中筋、高筋麵粉一斤之售價各為多少？

[答：30 元、35 元、40 元]

解　設低筋麵粉一斤 x 元

中筋麵粉一斤 y 元

高筋麵粉一斤 z 元

由題意可列得聯立方程式為

$$\begin{cases}x+3y+2z=215\cdots\cdots①\\2x+y+3z=215\cdots\cdots②\\3x+2y+z=200\cdots\cdots③\end{cases}$$

利用加減消去法消 x：

$$\begin{cases}①\times2-②：5y+z=215\\①\times3-③：7y+5z=445\end{cases}$$

解得 $y=35$，$z=40$，再代回解得 $x=30$

故低筋麵粉一斤 30 元

中筋麵粉一斤 35 元

高筋麵粉一斤 40 元

C

11

6 老師講解　齊次方程組　學生練習

已知$\begin{cases}5x-4y+2z=0\\4x-y-5z=0\end{cases}$ （$xyz\neq 0$），試求 $x:y:z$。

想法　若$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=0\\a_2x+b_2y+c_2z=0\end{cases}$，

則 $x:y:z=\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\b_2 & c_2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}c_1 & a_1\\c_2 & a_2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}$。

[答：2：3：1]

解　$x:y:z=\begin{vmatrix}-4 & 2\\-1 & -5\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}2 & 5\\-5 & 4\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}5 & -4\\4 & -1\end{vmatrix}$

$=22:33:11$

$=2:3:1$

若 $x+y+z=x-y+2z=3x+2y-5z$ （$xyz\neq 0$），試求 $\dfrac{x+2y}{2x-3z}$。

[答：$\dfrac{3}{2}$]

解　$x+y+z=x-y+2z$

$\Rightarrow\ 2y-z=0$

$x-y+2z=3x+2y-5z$

$\Rightarrow\ 2x+3y-7z=0$

$x:y:z=\begin{vmatrix}2 & -1\\3 & -7\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-1 & 0\\-7 & 2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}0 & 2\\2 & 3\end{vmatrix}$

$=(-11):(-2):(-4)$

$=11:2:4$

故 $\dfrac{x+2y}{2x-3z}=\dfrac{15}{10}=\dfrac{3}{2}$

7 老師講解　利用解方程組求二次函數的三個係數　學生練習

已知二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形通過 $(1,1)$，$(2,3)$，$(3,7)$三點，試求 a、b、c 的值。

想法　將點代入 $y=ax^2+bx+c$ 再解三元一次聯立方程式。

[答：$a=1$，$b=-1$，$c=1$]

解　$(1,1)$、$(2,3)$、$(3,7)$三點代入

$y=ax^2+bx+c$，列出方程組

$\begin{cases}a+b+c=1\cdots\cdots①\\4a+2b+c=3\cdots\cdots②\\9a+3b+c=7\cdots\cdots③\end{cases}$

用加減消去法消去 c：

$\begin{cases}②-①：3a+b=2\\③-②：5a+b=4\end{cases}$

解得 $a=1$，$b=-1$

再代回解得 $c=1$

故 $a=1$，$b=-1$，$c=1$

已知圓 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 通過 $(-1,-1)$、$(3,5)$、$(-2,4)$三點，試求 d、e、f 的值。

[答：$d=-2$，$e=-4$，$f=-8$]

解　$(-1,-1)$，$(3,5)$，$(-2,4)$三點代入

$x^2+y^2+dx+ey+f=0$，列出方程組

$\begin{cases}-d-e+f+2=0\cdots\cdots①\\3d+5e+f+34=0\cdots\cdots②\\-2d+4e+f+20=0\cdots\cdots③\end{cases}$

用加減消去法消去 f：

$\begin{cases}②-①：2d+3e+16=0\\③-①：-d+5e+18=0\end{cases}$

解得 $d=-2$，$e=-4$

再代回解得 $f=-8$

故 $d=-2$，$e=-4$，$f=-8$

★ 8 老師講解　**聯立方程式之解的型態**　學生練習

已知聯立方程式 $\begin{cases} x-y-2z=3 \\ 2x+3y+z=1 \\ ax+2y-z=4 \end{cases}$ 有無限多組解，試求 a 的值。

想法　聯立方程式有無限多組解之條件 $\Delta=0$。

[答：3]

解　因 $\Delta_x=\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0$

聯立方程式有無限多組解之條件

$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ a & 2 & -1 \end{vmatrix}=0$，展開得

$-3-a-8-2-2-(-6a)=0$

$\Rightarrow\ 5a-15=0$

$\Rightarrow\ a=3$

已知聯立方程式 $\begin{cases} x-2y-z=3 \\ 3x+y+z=1 \\ ax-3y-z=4 \end{cases}$ 無解，試求 a 的值。

[答：5　]

解　因聯立方程式無解，且

$\Delta_x=\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix}\neq 0$

則滿足無解之條件為 $\Delta=0$

令 $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ a & -3 & -1 \end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow\ -1-2a+9-(-3)-6-(-a)=0$

$\Rightarrow\ -a+5=0$

$\Rightarrow\ a=5$

C

11

11-1 段落測驗

★表難題

1. 利用加減消去法解聯立方程式$\begin{cases}3x-y=-2\\2x+3y=17\end{cases}$，則 $x=$ $\underline{\quad 1 \quad}$，$y=$ $\underline{\quad 5 \quad}$。

2. 利用克拉瑪公式解方程組$\begin{cases}3x-4y=7\\6x+7y=8\end{cases}$，則 $x=$ $\underline{\quad \dfrac{9}{5} \quad}$，$y=$ $\underline{\quad -\dfrac{2}{5} \quad}$。

3. 若方程組$\begin{cases}2a_1x+b_1y=c_1\\2a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$之解為$(3,4)$，則$\begin{cases}a_1x+2b_1y+5c_1=0\\a_2x+2b_2y+5c_2=0\end{cases}$之解為 $x=$ $\underline{\quad -30 \quad}$，$y=$ $\underline{\quad -10 \quad}$。

4. 若$\begin{cases}x+2y=-3\\ax+by=-3\end{cases}$與$\begin{cases}3ax-2by=11\\6x+y=4\end{cases}$有相同的解，則 $a+b=$ $\underline{\quad 3 \quad}$。

5. 解三元一次聯立方程式$\begin{cases}x+2y+2z=13\\2x+3y+5z=28\\x+3y+3z=19\end{cases}$，則 $x=$ $\underline{\quad 1 \quad}$，$y=$ $\underline{\quad 2 \quad}$，$z=$ $\underline{\quad 4 \quad}$。

6. 利用克拉瑪公式解方程組$\begin{cases}2x-3y-4z=1\\x+2y+2z=5\\x+y-3z=-4\end{cases}$，則 $x=$ $\underline{\quad 3 \quad}$，$y=$ $\underline{\quad -1 \quad}$，$z=$ $\underline{\quad 2 \quad}$。

7. 解三元一次聯立方程式$\begin{cases}x-y+2z=3\\3x-2y+5z=6\\2x-5y+7z=10\end{cases}$。答：$\underline{\quad \text{無解} \quad}$。

8. 若$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5\\\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3\\\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=4\end{cases}$，則 $x=$ $\underline{\quad \dfrac{1}{3} \quad}$，$y=$ $\underline{\quad \dfrac{1}{2} \quad}$，$z=$ $\underline{\quad 1 \quad}$。

★ 9. 王先生去歐洲三小國旅行，他在荷蘭每天的食、宿、保險費分別為 2500 元、2000 元、300 元；在比利時的食、宿、保險費分別為 2200 元、2800 元、300 元；在盧森堡的食、宿、保險費分別為 2000 元、2000 元、300 元，已知他在這三個國家不計機票錢，總共的食、宿、保險費各花了 25100 元、24400 元、3300 元，則他在這三個國家分別停留的時間為荷蘭 $\underline{\quad 5 \quad}$ 天、比利時 $\underline{\quad 3 \quad}$ 天、盧森堡 $\underline{\quad 3 \quad}$ 天。

10. 已知 $A(5,1)$、$B(1,3)$、$C(1,1)$，若通過 A、B、C 三點之圓方程式為 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$，則序組 $(d,e,f)=$ $\underline{\quad (-6,-4,8) \quad}$。

11-2 》矩陣的運算

重點一　矩陣

1. **矩陣：**

設 A 是一個 $m\times n$ 階的矩陣，$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$，簡記為 $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$，其中 a_{ij} 為 A 的第 (i,j) 元。

例如：矩陣 $A=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{第 1 列} \\ \longrightarrow \text{第 2 列} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{第 1 行} & \text{第 2 行} & \text{第 3 行} \end{array} \end{array}$

A 是 2×3 階矩陣，其中第 $(1,2)$ 元為 3，第 $(2,1)$ 元為 4，第 $(2,3)$ 元為 0。

2. **係數矩陣與增廣矩陣：**

將方程組之係數依序列出稱係數矩陣；將係數及常數項依序列出稱增廣矩陣。

例如：$\begin{cases} 2x-y+z=4 \\ x+y+2z=5 \\ 3x+5y+9z=5 \end{cases}$　　**係數矩陣** $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}$　　**增廣矩陣** $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 9 & 5 \end{array}\right]$

3. **矩陣的列運算：**

用加減消去法將解聯立方程組簡化成只寫出各項係數間的計算過程。

(1) 矩陣中的某兩列互換位置。

(2) 矩陣中的某一列乘以一個不為 0 的數。

(3) 矩陣中的某一列乘以一個數後再加到另一列。

4. **高斯消去法：**

利用矩陣列運算解方程組之方法。將增廣矩陣執行下面列運算：

(1) 將第一列第一行的元化為 1，且使第二列及第三列的第一行數字全為 0。

(2) 將第二列第二行的元化為 1，且使第三列第二行的數字為 0。

(3) 將第三列第三行的元化為 1。

其步驟歸納如下 $\left[\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right] \xrightarrow{(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array}\right] \xrightarrow{(2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right] \xrightarrow{(3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right]$

觀念補充 //

用列運算將增廣矩陣左下方元簡化成 0，稱為「三角化矩陣」，此為高斯消去法之解題技巧。

1 老師講解　矩陣列運算　學生練習

已知矩陣 $\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 3 & 14\\ 3 & -1 & 7 & 26\end{array}\right]$ 經過列運算後，得 $\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & a\\ 0 & 0 & 1 & b\end{array}\right]$，試求 a、b 的值。

想法

矩陣列運算：
(1) 矩陣中的某兩列互換；
(2) 矩陣中某一列乘上一個不為 0 的數；
(3) 矩陣中的某一列乘以一數後再加到另一列。

[答：$a=7$，$b=3$]

解　執行矩陣列運算

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 3 & 14\\ 3 & -1 & 7 & 26\end{array}\right] \quad \times(-1) \quad \times(-3)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 4 & 13\\ 0 & -7 & 10 & 23\end{array}\right] \quad \times 7$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 4 & 13\\ 0 & 0 & 38 & 114\end{array}\right] \leftarrow \times\frac{1}{38}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 4 & 13\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right] \quad \times(-2)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 7\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right]$$

比較後得 $a=7$，$b=3$

設矩陣 $\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & -2 & -4\\ 2 & 1 & 3 & 6\\ 3 & -2 & 5 & 6\end{array}\right]$ 經過列運算後，得 $\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & -2 & -4\\ 0 & 1 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1 & b\end{array}\right]$，則數對 (a,b) 為何？

[答：$(2,1)$]

解　執行矩陣列運算

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & -2 & -4\\ 2 & 1 & 3 & 6\\ 3 & -2 & 5 & 6\end{array}\right] \quad \times(-2) \quad \times(-3)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & -2 & -4\\ 0 & 7 & 7 & 14\\ 0 & 7 & 11 & 18\end{array}\right] \quad \times(-1)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & -2 & -4\\ 0 & 7 & 7 & 14\\ 0 & 0 & 4 & 4\end{array}\right] \begin{array}{l}\leftarrow \times\frac{1}{7}\\ \leftarrow \times\frac{1}{4}\end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & -2 & -4\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right]$$

得 $a=2$，$b=1$

故 $(a,b)=(2,1)$

2 老師講解　利用矩陣列運算解方程組　學生練習

利用高斯消去法解方程組

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y+z=4 \\ 4x+9y+z=16 \end{cases}$$ 。

想法　將增廣矩陣執行矩陣列運算化簡成

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right]$$ 。

[答：$x=-3$，$y=3$，$z=1$]

解　執行矩陣列運算

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 9 & 1 & 16 \end{array}\right] \quad \times(-2) \quad \times(-4)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & 12 \end{array}\right] \quad \times(-1) \quad \times(-5)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \quad \times\frac{1}{2} \quad \times(-1)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

所對應方程組為 $\begin{cases} x=-3 \\ y=3 \\ 2z=2 \end{cases}$

故解得 $x=-3$，$y=3$，$z=1$

利用高斯消去法解方程組

$$\begin{cases} x+y+2z=3 \\ 2x-y+z=6 \\ 3x+5y+10z=11 \end{cases}$$ 。

[答：$x=2$，$y=-1$，$z=1$]

解　執行矩陣列運算

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 10 & 11 \end{array}\right] \quad \times(-2) \quad \times(-3)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right] \quad \times\left(-\frac{1}{3}\right) \quad \times\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \quad \times(-1) \quad \times(-1)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \times(-1) \quad \times(-1)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

所對應方程組為 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=1 \end{cases}$

故解得 $x=2$，$y=-1$，$z=1$

利用高斯消去法解方程組

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+2y+z=3 \\ 2x+5y+2z=5 \end{cases}$$

。

想法 利用增廣矩陣執行矩陣列運算，再探討其解的意義。

[答：無解]

解 將增廣矩陣作列運算：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 5 \end{array}\right] \times(-1) \quad \times(-2)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \times(-1) \quad \times(-3)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

所對應方程組為 $\begin{cases} x+z=1 \\ y=1 \\ 0=-2 \end{cases}$

$\because$ $0=-2$（矛盾）

$\therefore$ 原方程組無解

利用高斯消去法解方程組

$$\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 3x-y+2z=1 \\ 7x-4y+5z=4 \end{cases}$$

。

[答：無解]

解 將增廣矩陣作列運算：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 7 & -4 & 5 & 4 \end{array}\right] \times(-3) \quad \times(-7)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & -8 \\ 0 & 10 & -2 & -17 \end{array}\right] \times(-2)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

所對應方程組為 $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 5y-z=-8 \\ 0=-1 \end{cases}$

$\because$ $0=-1$（矛盾）

$\therefore$ 原方程組無解

★ 4　老師講解　**探討方程組之解的意義**　學生練習

試解方程組 $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 2x+5y-2z=5 \\ x+4y-7z=1 \end{cases}$。

想法　將增廣矩陣執行矩陣列運算，再探討其解的意義。

[答：$\begin{cases} x=5-9t \\ y=-1+4t \\ z=t \end{cases}$（$t$ 為任意實數），有無限多組解]

解　將增廣矩陣作列運算：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -7 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \times(-2) \\ \times(-1) \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & -8 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \times(-2) \\ \\ \times(-2) \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

所對應方程組為

$\begin{cases} x+9z=5\cdots\cdots ① \\ y-4z=-1\cdots\cdots ② \\ 0=0\cdots\cdots ③ \end{cases}$

因 $0=0$ 必成立，令 $z=t$ 代回第 ①、② 式

則方程組解為 $\begin{cases} x=5-9t \\ y=-1+4t \\ z=t \end{cases}$（$t$ 為任意實數）

故有無限多組解

試解方程組 $\begin{cases} x+2y+z=-1 \\ 2x+y-z=4 \\ 5x+7y+2z=1 \end{cases}$。

[答：$\begin{cases} x=3+t \\ y=-2-t \\ z=t \end{cases}$（$t$ 為任意實數），有無限多組解]

解　將其增廣矩陣作列運算：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 5 & 7 & 2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \times(-2) \\ \times(-5) \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \times\frac{2}{3} \\ \\ \times(-1) \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

所對應方程組為 $\begin{cases} x-z=3\cdots\cdots ① \\ y+z=-2\cdots\cdots ② \\ 0=0\cdots\cdots ③ \end{cases}$

因 $0=0$ 必成立，令 $z=t$ 代回第 ①、② 式

則方程組解為 $\begin{cases} x=3+t \\ y=-2-t \\ z=t \end{cases}$（$t$ 為任意實數）

故有無限多組解

重點二 矩陣的運算

1. 矩陣相等：

兩個矩陣 A 和 B 同階數，且相同位置的元均相等時，稱矩陣 A 與 B 相等，記作 $A=B$。

2. 矩陣的加減法：

A 和 B 都是 $m\times n$ 階矩陣，則 $A+B$、$A-B$ 也是 $m\times n$ 階矩陣，其中 $A+B$ 每個元均為 A 與 B 中相同位置元的和，$A-B$ 每個元均為 A 與 B 中相同位置元的差。

3. 矩陣加法的交換律與結合律：

A、B 與 C 是同階的矩陣，則

(1) $A+B=B+A$（加法交換律）

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$（加法結合律）

4. 零矩陣：

若矩陣的各個元素都是 0，稱為零矩陣，記作零矩陣 O。

5. 矩陣的加法單位元素：

任意矩陣 A 與其同階的零矩陣 O 的和仍為 A，即 $A+O=O+A=A$，稱零矩陣為矩陣加法單位元素。

6. 矩陣的係數積：

A 是 $m\times n$ 階矩陣，係數積 rA，也是 $m\times n$ 階矩陣，且 rA 每個元均為 A 中相同位置元的 r 倍。

7. 矩陣係數積的性質：

r、s 是實數，且 A、B 是階數相同的矩陣，則

(1) $r(sA)=(rs)A$。

(2) $(r+s)A=rA+sA$。

(3) $r(A+B)=rA+rB$。

8. 矩陣等式的移項法則：

對矩陣等式兩邊行使等量公理（同加或同減相同矩陣），以達化簡目的。

5 矩陣表法

老師講解

已知矩陣 $A=\left[a_{ij}\right]_{2\times 3}$，且每一個元 $a_{ij}=i+2j$，試求矩陣 A。

想法 a_{ij} 為矩陣 A 的第 (i,j) 元。

[答：$\begin{bmatrix}3&5&7\\4&6&8\end{bmatrix}$]

解 $a_{ij}=i+2j$，得

$a_{11}=1+2\times 1=3$

$a_{12}=1+2\times 2=5$

$a_{13}=1+2\times 3=7$

$a_{21}=2+2\times 1=4$

$a_{22}=2+2\times 2=6$

$a_{23}=2+2\times 3=8$

故 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&5&7\\4&6&8\end{bmatrix}$

學生練習

已知矩陣 $B=\left[b_{ij}\right]_{2\times 3}$，且每一個元 $b_{ij}=i^2+j$，試求矩陣 B。

[答：$\begin{bmatrix}2&3&4\\5&6&7\end{bmatrix}$]

解 $b_{ij}=i^2+j$，得

$b_{11}=1^2+1=2$

$b_{12}=1^2+2=3$

$b_{13}=1^2+3=4$

$b_{21}=2^2+1=5$

$b_{22}=2^2+2=6$

$b_{23}=2^2+3=7$

故 $B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3&4\\5&6&7\end{bmatrix}$

6 矩陣相等

老師講解

已知 $\begin{bmatrix}a+b&3c-d\\3a-b&c+d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&5\\5&7\end{bmatrix}$，試求 a、b、c、d 的值。

想法 兩個矩陣同階數，且相同位置的元均相等，則兩矩陣相等。

[答：$a=2$，$b=1$，$c=3$，$d=4$]

解 根據矩陣相等的定義，得

$\begin{cases}a+b=3\\3a-b=5\end{cases}$ 及 $\begin{cases}3c-d=5\\c+d=7\end{cases}$

$\Rightarrow\ a=2$，$b=1$，$c=3$，$d=4$

學生練習

已知 $\begin{bmatrix}2a+b&c+d\\a-b&c-d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&5\\-1&1\end{bmatrix}$，試求 a、b、c、d 的值。

[答：$a=1$，$b=2$，$c=3$，$d=2$]

解 根據矩陣相等的定義，得

$\begin{cases}2a+b=4\\a-b=-1\end{cases}$ 及 $\begin{cases}c+d=5\\c-d=1\end{cases}$

$\Rightarrow\ a=1$，$b=2$，$c=3$，$d=2$

已知 $A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & 5 & 0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}4 & 5 & 2\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}$，

試求 $A+B$ 及 $A-B$。

想法 $A+B$、$A-B$ 每個元均為 A 與 B 中相同位置元的和及差。

[答：$A+B=\begin{bmatrix}7 & 3 & 3\\ 5 & 4 & 1\end{bmatrix}$，

$A-B=\begin{bmatrix}-1 & -7 & -1\\ -1 & 6 & -1\end{bmatrix}$]

解 因 A 與 B 都是 2×3 階矩陣

可以相加減，則

$$A+B=\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & 5 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 5 & 2\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3+4 & -2+5 & 1+2\\ 2+3 & 5+(-1) & 0+1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7 & 3 & 3\\ 5 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & 5 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & 5 & 2\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3-4 & -2-5 & 1-2\\ 2-3 & 5-(-1) & 0-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & -7 & -1\\ -1 & 6 & -1\end{bmatrix}$$

已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2 & -3 & 5\\ 3 & 2 & -1\end{bmatrix}$，

試求 $A+B$ 與 $A-B$。

[答：$A+B=\begin{bmatrix}3 & -1 & 8\\ 7 & 3 & 1\end{bmatrix}$，

$A-B=\begin{bmatrix}-1 & 5 & -2\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}$]

解 因 A 與 B 都是 2×3 階矩陣

可以相加減，則

$$A+B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -3 & 5\\ 3 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+2 & 2+(-3) & 3+5\\ 4+3 & 1+2 & 2+(-1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & -1 & 8\\ 7 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -3 & 5\\ 3 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1-2 & 2-(-3) & 3-5\\ 4-3 & 1-2 & 2-(-1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 5 & -2\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}$$

8 老師講解　矩陣的係數積　學生練習

已知 $A=\begin{bmatrix}2&0\\3&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&3\\-2&-1\end{bmatrix}$，試求下列各矩陣：

(1) $(-2)A$　(2) $2A+3B$　(3) $3A-2B$

想法　rA 每個元均為 A 中相同位置元的 r 倍。

[答：(1) $\begin{bmatrix}-4&0\\-6&-2\end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix}7&9\\0&-1\end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix}4&-6\\13&5\end{bmatrix}$]

解 (1) $(-2)A=\begin{bmatrix}-2\times2&-2\times0\\-2\times3&-2\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&0\\-6&-2\end{bmatrix}$

(2) $2A+3B=2\begin{bmatrix}2&0\\3&1\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1&3\\-2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0\\6&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&9\\-6&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&9\\0&-1\end{bmatrix}$

(3) $3A-2B=3\begin{bmatrix}2&0\\3&1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1&3\\-2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&0\\9&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&6\\-4&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-6\\13&5\end{bmatrix}$

已知 $A=\begin{bmatrix}2&1\\3&0\\3&-1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&3\\2&1\\-1&2\end{bmatrix}$，試求下列各矩陣：

(1) $3A+2B$　(2) $2A-3B$

[答：(1) $\begin{bmatrix}6&9\\13&2\\7&1\end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix}4&-7\\0&-3\\9&-8\end{bmatrix}$]

解 (1) $3A+2B=3\begin{bmatrix}2&1\\3&0\\3&-1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0&3\\2&1\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&3\\9&0\\9&-3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&6\\4&2\\-2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&9\\13&2\\7&1\end{bmatrix}$

(2) $2A-3B=2\begin{bmatrix}2&1\\3&0\\3&-1\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}0&3\\2&1\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&2\\6&0\\6&-2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&9\\6&3\\-3&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-7\\0&-3\\9&-8\end{bmatrix}$

C

11

已知 $A=\begin{bmatrix}0 & 3\\3 & 6\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2 & 4\\6 & 2\end{bmatrix}$，且 $3(2X+B)=2A$，試求矩陣 X。

想法 利用移項法則，解矩陣方程式。

[答：$\begin{bmatrix}-1 & -1\\-2 & 1\end{bmatrix}$]

解 $3(2X+B)=2A$

$\Rightarrow 6X+3B=2A$

$\Rightarrow 6X=2A-3B$

$\Rightarrow X=\frac{1}{6}(2A-3B)$

$=\frac{1}{6}\left(2\begin{bmatrix}0 & 3\\3 & 6\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}2 & 4\\6 & 2\end{bmatrix}\right)$

$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-6 & -6\\-12 & 6\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-1 & -1\\-2 & 1\end{bmatrix}$

若 $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\4 & 2 & 3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-1 & 4 & 1\\1 & 4 & -3\end{bmatrix}$，且 $3(X-A)=X+B$，試求矩陣 X。

[答：$\begin{bmatrix}1 & -1 & -4\\\frac{13}{2} & 5 & 3\end{bmatrix}$]

解 $3(X-A)=X+B$

$\Rightarrow 3X-3A=X+B$

$\Rightarrow 2X=3A+B$

$\Rightarrow X=\frac{3}{2}A+\frac{1}{2}B$

$=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -3 & -\frac{9}{2}\\6 & 3 & \frac{9}{2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2}\\\frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2}\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1 & -1 & -4\\\frac{13}{2} & 5 & 3\end{bmatrix}$

重點三 矩陣乘法與二階反方陣

1. 矩陣乘積的定義

A 是 $m\times n$ 階矩陣，B 是 $n\times p$ 階矩陣，則 $AB=C$ 為 $m\times p$ 階矩陣，且 C 中的每個 (i,j) 元均為 A 的第 i 列中各元與 B 的第 j 行中各對應元之乘積和，即

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p}\\b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p}\\c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2p}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ip}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mp}\end{bmatrix}$$

其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$。

觀念補充 //

當 A 的行數等於 B 的列數時，乘積 AB 才存在，矩陣乘法運算類似 A 的行與 B 的列執行向量內積。

$$\underset{m\times n}{A}\qquad \underset{n\times p}{B} = \underset{m\times p}{C}$$

相等

乘積的階數

2. **矩陣乘法的基本性質：**

r 為實數，A、B、C 為矩陣，且下列各矩陣運算都有意義，則

(1) $(AB)C=A(BC)$（矩陣乘法的結合律）

(2) $A(B+C)=AB+AC$（矩陣乘法的左分配律）

(3) $(A+B)C=AC+BC$（矩陣乘法的右分配律）

(4) $r(AB)=(rA)B=A(rB)$（矩陣乘法對係數積的結合律）

(5) $AB\neq BA$（矩陣乘法不滿足交換律）

3. **矩陣的乘法單位元素**

一個 n 階方陣，從左上到右下的對角線上各元都是 1，而其餘各元都為 0，稱為 n 階單位方陣，以 I_n 表之。

例如：$I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$。

觀念補充 //

❶ 矩陣 A 與 B 均為非零矩陣，其乘積 AB 可能是零矩陣。

例如：矩陣 $A=\begin{bmatrix}1&-2\\2&-4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&4\\1&2\end{bmatrix}$，而 $AB=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=O$。

❷ 矩陣乘法不滿足消去律，即若 $AB=AC$ 且 $A\neq O$ 時，$B=C$ 未必成立。

例如：$A=\begin{bmatrix}1&-2\\2&-4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&4\\1&2\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}6&10\\3&5\end{bmatrix}$，而 $AC=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=O$，

雖然 $AB=AC=O$ 且 $A\neq O$，但 $B\neq C$。

4. **二階反方陣：**

二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，且行列式 $\det(A)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$，若有一 n 階方陣 B，

滿足 $AB=BA=I_n$，則 B 為 A 的反方陣，以 A^{-1} 表示。

(1) 當 $\det(A)\neq 0$ 時，A 有乘法反方陣 A^{-1}，且 $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$。

(2) 當 $\det(A)=0$ 時，A 沒有反方陣。

10 老師講解 **矩陣乘法運算** 學生練習

已知矩陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$，

試求 AB 與 BA。

想法 AB 中的每個 (i,j) 元均為 A 的第 i 列中各元與 B 的第 j 行中各對應元之乘積和。

[答：$AB=\begin{bmatrix} 9 & 2 & -1 \\ 8 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 7 \end{bmatrix}$，$BA=\begin{bmatrix} 14 & 16 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$]

解 A 是 3×2 階矩陣，且 B 是 2×3 階矩陣

則 AB 是 3×3 階矩陣，BA 是 2×2 階矩陣

$$AB=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1\times 1+4\times 2 & 1\times 2+4\times 0 & 1\times 3+4\times(-1) \\ 2\times 1+3\times 2 & 2\times 2+3\times 0 & 2\times 3+3\times(-1) \\ 3\times 1+2\times 2 & 3\times 2+2\times 0 & 3\times 3+2\times(-1) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 9 & 2 & -1 \\ 8 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1\times 1+2\times 2+3\times 3 & 1\times 4+2\times 3+3\times 2 \\ 2\times 1+0\times 2+(-1)\times 3 & 2\times 4+0\times 3+(-1)\times 2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 14 & 16 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

已知矩陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$，

試求 AB 與 BA。

[答：$AB=\begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 20 & 10 \end{bmatrix}$，$BA=\begin{bmatrix} 6 & 16 \\ 7 & 17 \end{bmatrix}$]

解 $$AB=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1\times 4+3\times 3 & 1\times 1+3\times 2 \\ 2\times 4+4\times 3 & 2\times 1+4\times 2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 20 & 10 \end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 4\times 1+1\times 2 & 4\times 3+1\times 4 \\ 3\times 1+2\times 2 & 3\times 3+2\times 4 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 6 & 16 \\ 7 & 17 \end{bmatrix}$$

11 老師講解　**二階反方陣**　學生練習

設 $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$，且矩陣

$X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$滿足 $AX=B$，試求：

(1) A 的反方陣 A^{-1}。

(2) 矩陣 X。

想法　A^{-1} 存在，則反方陣 $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$。

[答：(1) $\begin{bmatrix}-3&2\\2&-1\end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix}-6\\5\end{bmatrix}$]

解 (1) $\because$　$\det(A)=\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}=1\times3-2\times2$

$=-1\neq0$

$\therefore$　A 有反方陣

得 $A^{-1}=\dfrac{1}{-1}\begin{bmatrix}3&-2\\-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&2\\2&-1\end{bmatrix}$

(2) 將 $AX=B$ 等號兩邊同時左乘 A^{-1}，得

$A^{-1}(AX)=A^{-1}B$

左式化簡為

$A^{-1}(AX)=(A^{-1}A)X=I_2X=X$

故 $X=A^{-1}B=\begin{bmatrix}-3&2\\2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\5\end{bmatrix}$

設 $A=\begin{bmatrix}9&7\\4&3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$，且矩陣

$X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$滿足 $AX=B$，試求：

(1) A 的反方陣 A^{-1}。

(2) 矩陣 X。

[答：(1) $\begin{bmatrix}-3&7\\4&-9\end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix}18\\-23\end{bmatrix}$]

解 (1) $\because$　$\det(A)=\begin{vmatrix}9&7\\4&3\end{vmatrix}=27-28$

$=-1\neq0$

$\therefore$　$A^{-1}=\dfrac{1}{-1}\begin{bmatrix}3&-7\\-4&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&7\\4&-9\end{bmatrix}$

(2) 將 $AX=B$ 等號兩邊同時左乘 A^{-1}，得

$A^{-1}(AX)=A^{-1}B$

左式化簡為

$A^{-1}(AX)=(A^{-1}A)X=I_2X=X$

故 $X=A^{-1}B=\begin{bmatrix}-3&7\\4&-9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18\\-23\end{bmatrix}$

C

11

12 二階反方陣的性質

老師講解

設矩陣 $A=\begin{bmatrix} t+2 & 1 \\ 4 & 2t-3 \end{bmatrix}$，若 A^{-1} 不存在，試求 t。

想法 當 $\det(A)=0$ 時，A^{-1} 不存在。

[答：$-\frac{5}{2}$ 或 2]

解 $\because$ A^{-1} 不存在

$\therefore$ $\det(A)=0$

則 $\begin{vmatrix} t+2 & 1 \\ 4 & 2t-3 \end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow$ $(t+2)(2t-3)-4=0$

$\Rightarrow$ $2t^2+t-10=0$

$\Rightarrow$ $(2t+5)(t-2)=0$

$\Rightarrow$ $t=-\frac{5}{2}$ 或 2

學生練習

設矩陣 $A=\begin{bmatrix} t^2-10 & 2 \\ t-5 & 1 \end{bmatrix}$，若 A^{-1} 不存在，試求 t。

[答：0 或 2]

解 $\because$ A^{-1} 不存在

$\therefore$ $\det(A)=0$

則 $\begin{vmatrix} t^2-10 & 2 \\ t-5 & 1 \end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow$ $t^2-10-2(t-5)=0$

$\Rightarrow$ $t^2-2t=0$

$\Rightarrow$ $t(t-2)=0$

$\Rightarrow$ $t=0$ 或 2

13 二階反方陣的應用

老師講解

利用二階反方陣，解方程組 $\begin{cases} 2x-5y=9 \\ 3x+4y=2 \end{cases}$。

想法 $AX=B$，則 $X=A^{-1}B$。

[答：$x=2$，$y=-1$]

解 原方程組用矩陣表為

$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\because$ $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\neq 0$

$\therefore$ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix}$

$=\frac{1}{23}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix}$

$=\frac{1}{23}\begin{bmatrix} 46 \\ -23 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

故原方程組的解為 $x=2$，$y=-1$

學生練習

利用二階反方陣，解方程組 $\begin{cases} 3x+4y=1 \\ 5x-3y=21 \end{cases}$。

[答：$x=3$，$y=-2$]

解 原方程組用矩陣表為

$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 21 \end{bmatrix}$

$\because$ $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}=-29\neq 0$

$\therefore$ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 21 \end{bmatrix}$

$=\frac{1}{-29}\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 21 \end{bmatrix}$

$=\frac{1}{-29}\begin{bmatrix} -87 \\ 58 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

故原方程組的解為 $x=3$，$y=-2$

11-2 段落測驗

★表難題

1. 若 $\begin{bmatrix} xy \\ x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 10 \end{bmatrix}$，則 $x-y=$ $\underline{\ \pm 4\ }$。

2. 已知矩陣 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$ 經過列運算，可化成矩陣 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 7 \\ 0 & 1 & b & -2 \\ 0 & 0 & 8 & c \end{array}\right]$，則數對 $(a,b,c)=$ $\underline{\ (-4,3,-8)\ }$。

3. 利用高斯消去法解聯立方程式 $\begin{cases} 3x+8y+5z=3 \\ x+2y+z=1 \\ x+y+2z=3 \end{cases}$，則 $(x,y,z)=$ $\underline{\ (2,-1,1)\ }$。

4. 已知 $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，則 $A^2+A^3=$ $\underline{\begin{bmatrix} 36 & 24 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}}$。

5. 已知 $A=[a_{ij}]_{3\times 2}$，$B=[b_{ij}]_{3\times 2}$ 都是 3×2 階矩陣，且 $a_{ij}=i+j$，$b_{ij}=3i-2j$，則 $A+B=$ $\underline{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 6 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}}$。

6. 已知矩陣 $A=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$，且矩陣 X 滿足 $A-X=2(X-B)$，則 $X=$ $\underline{\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}}$。

7. 已知矩陣 $A=\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$，則 $AC+BC=$ $\underline{\begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$。

8. 已知矩陣 $A=\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 6 \\ 6 & 12 & 15 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 10 & -5 & 0 \\ -5 & 15 & -5 \\ 0 & -10 & 5 \end{bmatrix}$，則 $AB=$ $\underline{\begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}}$。

9. 已知 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$，則反方陣 $A^{-1}=$ $\underline{\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}$。

10. 設 $A=\begin{bmatrix} a-1 & 3 \\ -1 & 3-a \end{bmatrix}$，若 A^{-1} 不存在，則 $a=$ $\underline{\ 0\text{ 或 }4\ }$。

★11. 已知 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} k & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$，且滿足 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$，則 $k=$ $\underline{\ -2\ }$。

CH 11 素養練功坊

題目

情報員常用矩陣方程式交換密碼，首先用矩陣進行編碼：a 以 $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 表示，b 以 $\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$ 表示，c 以 $\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$ 表示，…，z 以 $\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}$ 表示，如單字「yes」以 $\begin{bmatrix}2&0&1\\5&5&9\end{bmatrix}$ 表示，其餘類推。今天 007 情報員與線民要約定一個地點交換情報，為了保密，將某英文字以矩陣 X 表示，透過計算 AX 的加密動作後再傳出，而 $A=\begin{bmatrix}3&2\\2&1\end{bmatrix}$，假設兩人收到的內容為矩陣 $B=\begin{bmatrix}6&18&2\\3&9&1\end{bmatrix}$，則他們必須到哪裡交換情報？（請寫出其英文名稱）

關　鍵　字　$A=\begin{bmatrix}3&2\\2&1\end{bmatrix}$，兩人收到的內容為矩陣 $B=\begin{bmatrix}6&18&2\\3&9&1\end{bmatrix}$

單 元 公 式　令二階方陣 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，若 A^{-1} 存在

則 $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$

翻譯成數學式　已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}3&2\\2&1\end{bmatrix}$，若矩陣 X 滿足 $AX=B=\begin{bmatrix}6&18&2\\3&9&1\end{bmatrix}$，試求矩陣 X 為何？

解 題　這題考反方陣的運算，反方陣是矩陣單元裡常考的熱點之一

題目敘述看似複雜，但排除干擾後，解題脈絡可以化約成兩個步驟：

步驟一：矩陣 $A=\begin{bmatrix}3&2\\2&1\end{bmatrix}$，求出 A 的反方陣 $A^{-1}=\dfrac{1}{3-4}\begin{bmatrix}1&-2\\-2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&2\\2&-3\end{bmatrix}$

步驟二：利用矩陣性質可得 $X=A^{-1}B=\begin{bmatrix}-1&2\\2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&18&2\\3&9&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\3&9&1\end{bmatrix}$

最後依題意敘述，解讀出其英文名稱為 cia

● **回顧：**矩陣是邁向工程數學的重要工具，許多演算式都可以利用矩陣來進行串連，尤其在解聯立方程式的運算上，比起克拉瑪公式更是簡潔方便。由於矩陣在某些性質上很不同於「數字運算」，容易混淆，同學在學習時應特別小心注意。

素養競技場

★表難題

★ 1. 一礦物內含 A、B、C 三種放射性物質，放射出同一種輻射。已知 A、B、C 每公克分別會釋放出 1 單位、2 單位、1 單位的輻射強度，又知 A、B、C 每過半年其質量分別變為原來質量的 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$ 倍。於一年前測得此礦物的輻射強度為 66 單位，而半年前測得此礦物的輻射強度為 22 單位，且目前此礦物的輻射強度為 8 單位，試求目前此礦物中 A、B、C 物質之質量分別為多少公克？

答：A：4 公克，B：1 公克，C：2 公克

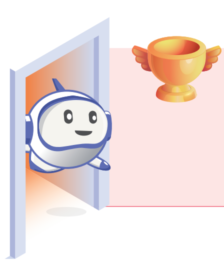
2. 今年南部的雨水量偏少，影響了蔬果產量。已知某果園種植水果的產量為：荔枝生產 900 斤，龍眼 1000 斤，西瓜 1200 斤，且 A、B、C、D 四個市場每斤批發價如下表。若由果園運往 A、B、C、D 四個市場的運輸費相等，試問應將這些水果運到哪一個市場可獲利最多？

果類 元／斤 市場	荔枝	龍眼	西瓜
A	40	20	30
B	50	10	20
C	40	30	20
D	30	20	50

答：D 市場

3. 設某病毒的突變是由 X 與 Y 兩類病毒訊息碼決定，當前一代訊息碼為 X、Y 時，下一代的訊息碼會變成 $2X-Y$ 及 $3X-2Y$。設該病毒第 n 代的訊息碼為 X_n、Y_n，且已知第 1 代訊息碼為 $X_1=3$，$Y_1=2$，若二階矩陣 A 滿足 $\begin{bmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix}$，試求 A 與 A^2。

答：$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$，$A^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



高三人的認真

頂眞，是一種對自己負責的生活哲學，事事頂眞，處處認眞。觀念對了，分數就對了，觀念開了，信心就來了。

CH 11 統測考古題

統測解題影音

★表難題

(A) 1. 在一個園遊會的攤位遊戲中，遊戲規則如下：在一個桶子裡有三種球，抽中紅球可得 x 點，抽中黃球可得 y 點，但抽中黑球則必須扣掉 z 點。每個人抽 10 次，每次抽一個球，最後依照得到的點數來兌換獎品。已知小華抽中 3 個紅球、3 個黃球、4 個黑球，共得 10 點；小明抽中 4 個紅球、3 個黃球、3 個黑球，共得 21 點；小玲抽中 2 個紅球、6 個黃球、2 個黑球，共得 26 點。若小蘭抽中 3 個紅球、5 個黃球、2 個黑球，則小蘭得到的點數為何？

(A) 28　(B) 30　(C) 32　(D) 39。　【111(C)】

(C) 2. 若矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix} 2 & c \\ b & d \end{bmatrix}$，且 $AB=A+B$，則 $c=$ ？

(A) -1　(B) $\dfrac{-1}{2}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) 1。　【111(C)】

(C) 3. 若 k 為實數，且二元一次聯立方程組 $\begin{cases} kx+3y+k+1=0 \\ x+4(k+1)y+8k^2+1=0 \end{cases}$ 有無限多組解，則 k 可為下列何值？

(A) $-\dfrac{3}{2}$　(B) $-\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{3}{2}$。　【110(C)】

(B) 4. 設 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$。若 $A^4=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，則 $a+b+c+d$ 之值為下列哪一個選項？

(A) 158　(B) 162　(C) 166　(D) 170。　【改自 110 學測】

★(A) 5. 某家口罩工廠擁有 5 臺 A 型機器和 3 臺 B 型機器來製造口罩，平時每日總產量為 11070 個口罩。今因應肺炎疫情日趨嚴重，緊急添購 3 臺 A 型機器和 9 臺 B 型機器，並提高所有機器的每日產能至原先的 150%，使得該工廠每日總產量增為 42120 個口罩，試問一臺 A 型機器原先的每日產能為多少個？

(A) 1350　(B) 1380　(C) 1410　(D) 1440。　【109(C)】

(D) 6. 令 $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$，$B=I+A+A^{-1}$，試選出代表 BA 的選項。

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 18 & 24 \end{bmatrix}$。　【改自 109 學測】

(B) 7. 已知下列兩個聯立方程組有相同的解 (x,y,z)，試問 a 的值為何？

$\begin{cases} 3x-4y+z=4 \\ 5x+2y-2z=3 \end{cases}$、$\begin{cases} 2x+3y-2z=a \\ 4x+5y-3z=1 \end{cases}$

(A) -1　(B) 0　(C) 1　(D) 2。　【108(C)】

(B) 8. 設 x、y 為實數，且滿足 $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}$，則 $x+3y=$

(A) -2 (B) -4 (C) -6 (D) 2。【改自 108 學測】

(B) 9. 設 $\begin{cases} 3x+5y+z=15 \\ 2x+4y+z=12 \\ 5x+y+2z=3 \end{cases}$，則 $y=$

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5。【107(C)】

★(C) 10. 設 t 為實數，且三元一次方程組 $\begin{cases} (t+1)x+(t-1)z=1 \\ (t+1)y+z=3 \\ (t+1)y+tz=5 \end{cases}$ 無解，則 t 可為下列何者？

(A) -2 (B) 0 (C) 1 (D) 2。【106(C)】

(B) 11. 設 x、y、z 為整數，且 $2|x+y|+3|x-y-4|+5|2x+3y-z|=4$，則 z 可為下列何者？

(A) 0 (B) 3 (C) 5 (D) 11。【106(C)】

★(D) 12. 若三元一次聯立方程式 $\begin{cases} ax-ay=5 \\ ax-y+(1-a)z=3 \\ (1-a)y+(2a-3)z=1 \end{cases}$ 恰有一解，則 a 可能為下列何值？

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3。【105(C)】

(A) 13. 若二元一次方程組 $\begin{cases} 2x+3y=-4 \\ 3x-4y=5 \end{cases}$ 的解為 $x=a$、$y=b$，則 $a+b=$

(A) $\dfrac{-23}{17}$ (B) $\dfrac{-21}{17}$ (C) $\dfrac{21}{17}$ (D) $\dfrac{23}{17}$。【104(C)】

(B) 14. 設 P、Q、R 為二階方陣，已知 $PQ=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$，$PR=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$，且 $Q+R=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$，則 $P=$

(A) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$。【改自 103 年指考數乙】