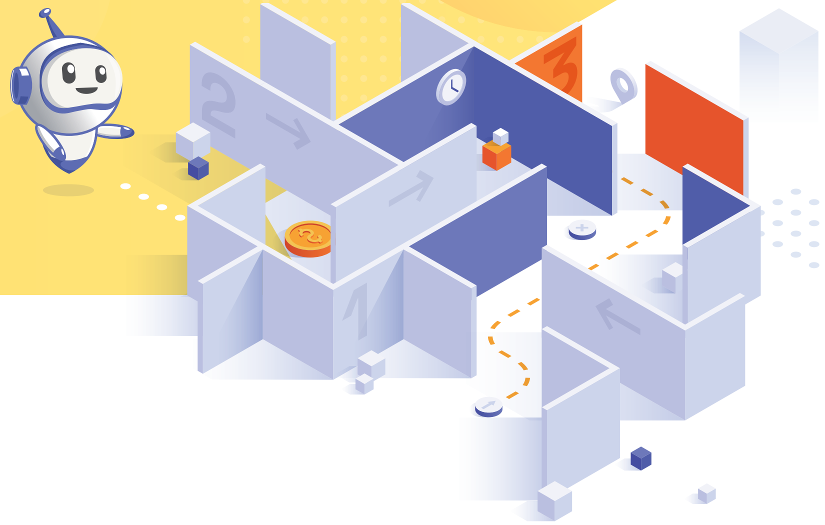
10



空間向量

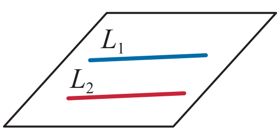
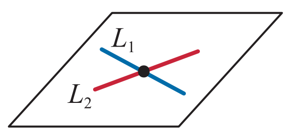
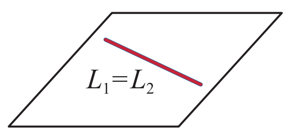
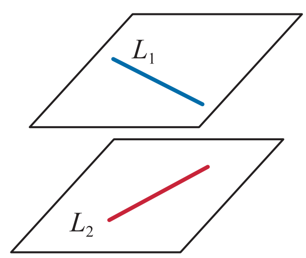
雲端教室

10-1 空間概念

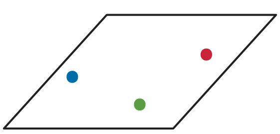
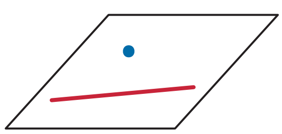
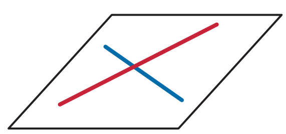
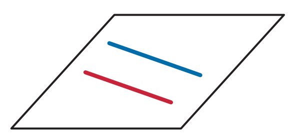
課綱即時報	
新增	空間概念、空間坐標系、空間向量、空間中的平面
刪除	無

重點一 空間概念

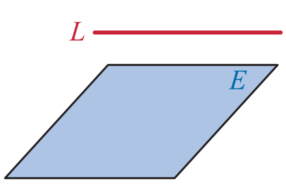
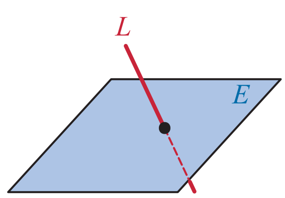
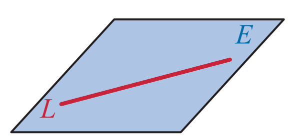
1. 空間中兩直線 L_1、L_2 之相交情形：

L_1、L_2 在同一平面上			L_1、L_2 不在同一平面
兩線平行	兩線恰交於一點	兩線重合	兩線歪斜
			

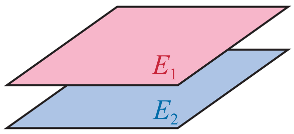
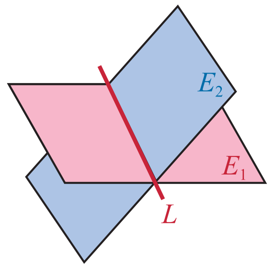
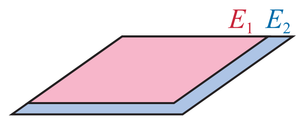
2. 空間中決定一平面的條件：

不共線的三點	一直線與線外一點	兩相交直線	兩平行直線
			

3. 空間中直線 L 與平面 E 之相交情形：

L 與 E 平行	L 與 E 恰交於一點	L 在 E 上
		

4. **空間中兩平面 E_1、E_2 之關係：**

兩平面平行	兩平面相交於一線	兩平面重合
		

5. **兩面角：**

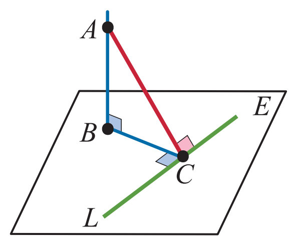
在兩平面交線 L 上任取一點 P，分別作兩條和 L 垂直的射線 $\overrightarrow{PA}$ 與 $\overrightarrow{PB}$，定義 $\angle APB$ 為兩面角。

觀念補充 //

兩面角為兩個半平面的夾角所以夾角只有一個，當兩面角為直角時，稱為直兩面角，當兩面角為銳角或鈍角時，分別稱為銳兩面角與鈍兩面角。

6. **三垂線定理：**

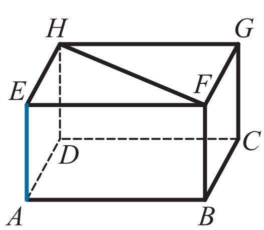
設直線 AB 垂直平面 E 於 B 點，在平面 E 上取一直線 L，若直線 BC 垂直 L 於 C 點，則直線 AC 也會垂直 L 於 C 點，如圖。



1　老師講解　空間中兩直線之關係　學生練習

附圖是一個長方體，試問下列哪些直線與直線 AE 歪斜？

(1) 直線 AB。
(2) 直線 DH。
(3) 直線 FG。
(4) 直線 FH。



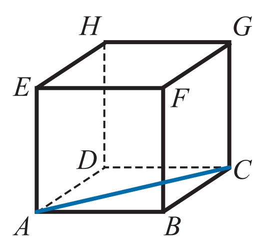
想法　兩直線不在同一平面，不平行也不相交，則兩直線歪斜。

[答：(3)(4)]

解　(1) 直線 AB 與直線 AE 相交於 A 點
(2) 直線 DH 與直線 AE 兩線平行
(3) 直線 FG 和直線 AE 既不平行且不相交
故兩直線歪斜
(4) 同理，直線 FH 和直線 AE 歪斜
故正確選項為 (3)(4)

附圖是一個正立方體，試問下列哪些直線與直線 AC 歪斜？

(1) 直線 CG。
(2) 直線 FG。
(3) 直線 DH。
(4) 直線 EG。

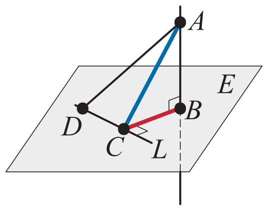


[答：(2)(3)]

解　(1) 直線 CG 與直線 AC 相交於 C 點
(2) 直線 FG 與直線 AC 歪斜
(3) 直線 DH 和直線 AC 歪斜
(4) 直線 EG 和直線 AC 平行
故正確選項為 (2)(3)

2 老師講解　三垂線定理　學生練習

設直線 AB 垂直平面 E 於 B 點，且 L 是平面 E 上直線，D 是 L 上一點，如圖所示。



若直線 BC 垂直 L 於 C 點，且 $\overline{AC}=2$，$\overline{DC}=1$，則 $\overline{AD}$ 的長度為何？

想法　直線 AB 垂直平面 E 於 B，若 L 在 E 上且直線 BC 垂直 L 於 C，則直線 AC 垂直 L 於 C。

[答：$\sqrt{5}$]

解　由三垂線定理，得直線 AC 垂直 L 於 C 點

即 $\triangle ACD$ 是直角三角形

利用畢氏定理得

$$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{CD}^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

設直線 AB 垂直平面 E 於 B 點，且 L 是平面 E 上直線，D 是 L 上一點，若直線 BC 垂直 L 於 C 點，且 $\overline{AD}=3$，$\overline{BC}=\overline{CD}=2$，則 $\overline{AB}$ 的長度為何？

[答：1]

解　由三垂線定理

得直線 AC 垂直 L 於 C 點

即 $\triangle ACD$ 是直角三角形

由 $\overline{AD}^2=\overline{AC}^2+\overline{CD}^2$

$\Rightarrow\ 3^2=\overline{AC}^2+2^2$

$\Rightarrow\ \overline{AC}=\sqrt{5}$

又 $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$

$\Rightarrow\ (\sqrt{5})^2=\overline{AB}^2+2^2$

$\Rightarrow\ \overline{AB}=1$

3 老師講解　三垂線定理　學生練習

已知 A、B 為直線 L 上兩點，O 為 L 外一點，直線 OC 垂直平面 OAB 於 O 點，且 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=5$，$\overline{AB}=8$， 試求點 C 到直線 L 的最短距離。

想法　三垂線定理的應用。

[答：$\sqrt{34}$]

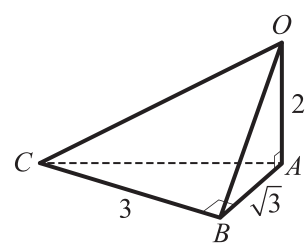
解　設 O 到 L 之垂足為 D

由畢氏定理 $\overline{OD}=\sqrt{5^2-\left(\frac{1}{2}\overline{AB}\right)^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$

故點 C 到直線 L 的最短距離

$\overline{CD}=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$

將三明治斜切成如圖之四面體 $OABC$，$\overline{OA}\perp\overline{AB}$ 且 $\overline{AB}\perp\overline{BC}$，已知 $\overline{OA}=2$，$\overline{AB}=\sqrt{3}$，$\overline{BC}=3$，試求 $\overline{OC}$。



[答：4]

解　$\overline{OB}=\sqrt{2^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{7}$

由三垂線定理得 $\overline{OB}\perp\overline{BC}$

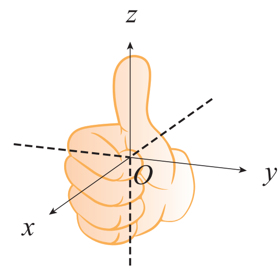
$\therefore$ $\triangle OBC$ 為直角三角形

故 $\overline{OC}=\sqrt{\sqrt{7}^2+3^2}=4$

重點二 空間坐標系

1. **空間坐標系：**

如圖，在空間中選取原點 O，過 O 點作兩兩垂直的三條直線，當作 x 軸、y 軸與 z 軸，組成了空間坐標系，並依右手法則來定義 z 軸的正方向。



2. 由 x 軸、y 軸決定的平面稱 xy 平面，x 軸、z 軸決定的平面稱 xz 平面，y 軸、z 軸決定的平面稱 yz 平面。

觀念補充 //

xy 面、yz 面與 xz 面將空間分割成八個卦限，其中 x、y、z 均正的部分稱第一卦限。

3. 空間中一點 P，P 對 x 軸、y 軸、z 軸之投影坐標分別為 a、b、c，則定義 P 點的坐標為 (a,b,c)。

4. 點 $P(a,b,c)$ 在坐標軸或坐標平面上的投影坐標如下：

投影位置	x 軸	y 軸	z 軸	xy 平面	yz 平面	xz 平面
點坐標	$(a,0,0)$	$(0,b,0)$	$(0,0,c)$	$(a,b,0)$	$(0,b,c)$	$(a,0,c)$

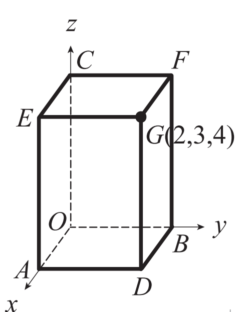
5. **空間中兩點距離：**

已知兩點 $A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$，則距離 $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$。

4 空間坐標系

老師講解

附圖是空間中的一個長方體，已知 G 坐標為 $(2,3,4)$，試求 D、E、F 之坐標。



想法 點 P 對 x 軸、y 軸、z 軸之投影坐標分別為 $(a,0,0)$、$(0,b,0)$、$(0,0,c)$，則 P 點坐標為 (a,b,c)。

[答：D 點為 $(2,3,0)$，E 點為 $(2,0,4)$，F 點為 $(0,3,4)$]

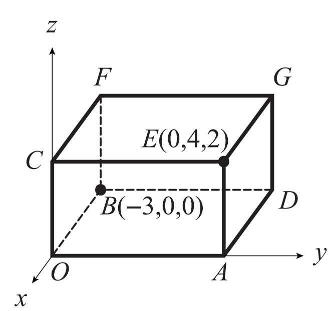
解 先求出 $A(2,0,0)$、$B(0,3,0)$、$C(0,0,4)$

故 D 點為 $(2,3,0)$，E 點為 $(2,0,4)$

F 點為 $(0,3,4)$

學生練習

附圖是空間中一個長方體，已知 B 坐標為 $(-3,0,0)$，E 坐標為 $(0,4,2)$，試求 D、F、G 的坐標。



[答：D 點為 $(-3,4,0)$，F 點為 $(-3,0,2)$，G 點為 $(-3,4,2)$]

解 求出 A 點為 $(0,4,0)$，C 點為 $(0,0,2)$

則 D 點為 $(-3,4,0)$，F 點為 $(-3,0,2)$

G 點為 $(-3,4,2)$

5 空間中兩點距離公式

老師講解

已知 $A(1,2,-1)$、$B(2,1,3)$ 且 P 點在 z 軸上，若 $\overline{AP}=\overline{BP}$，試求 P 點坐標。

想法 已知兩點 $P(x_1,y_1,z_1)$、$Q(x_2,y_2,z_2)$，則 $\overline{PQ}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$。

[答：$(0,0,1)$]

解 設 P 點的坐標為 $(0,0,c)$

$\because\ \overline{AP}=\overline{BP}$

$\therefore\ \sqrt{(0-1)^2+(0-2)^2+[c-(-1)]^2}=\sqrt{(0-2)^2+(0-1)^2+(c-3)^2}$

$\Rightarrow\ 8c=8$

$\Rightarrow\ c=1$

故 P 點坐標為 $(0,0,1)$

學生練習

已知 $A(2,-2,-1)$、$B(3,-1,3)$ 且 P 點在 z 軸上，若 $\overline{AP}=2\overline{AB}$，試求 P 點坐標。

[答：$(0,0,7)$ 或 $(0,0,-9)$]

解 設 P 點的坐標為 $(0,0,c)$

$\because\ \overline{AP}=2\overline{AB}$

$\therefore\ \sqrt{(0-2)^2+[0-(-2)]^2+[c-(-1)]^2}=2\sqrt{(3-2)^2+[(-1)-(-2)]^2+[3-(-1)]^2}$

$\Rightarrow\ (c+1)^2=64$

$\Rightarrow\ c+1=\pm 8$

$\Rightarrow\ c=7$ 或 $c=-9$

故 P 點的坐標為 $(0,0,7)$ 或 $(0,0,-9)$

6 空間中點到坐標平面之投影坐標

老師講解

空間中 A 點為 $(5,-7,12)$，P 為 A 點在 xy 平面上的投影點，Q 為 A 點在 yz 平面上的投影點，試求 $\overline{PQ}$ 長。

想法 點 $A(x,y,z)$ 在 xy 平面、yz 平面、zx 平面上之投影點分別為 $A_1(x,y,0)$、$A_2(0,y,z)$、$A_3(x,0,z)$。

[答：13]

解 A 點在 xy 平面上的投影點 P 為 $(5,-7,0)$

A 點在 yz 平面上的投影點 Q 為 $(0,-7,12)$

故 $\overline{PQ}=\sqrt{(0-5)^2+[-7-(-7)]^2+(12-0)^2}$

$=13$

學生練習

空間中，A 點為 $(1,-3,\sqrt{2})$，P 為 A 點在 xy 平面上的投影點，試求 P 點到 z 軸的距離。

[答：$\sqrt{10}$]

解 $\because\ P$ 為 A 點在 xy 平面上的投影點

$\therefore\ P$ 點的坐標為 $(1,-3,0)$

又 P 點到 z 軸的距離即為 P 到原點距離

$=\sqrt{1^2+(-3)^2+0^2}$

$=\sqrt{10}$

故 P 點到 z 軸的距離為 $\sqrt{10}$

10-1 段落測驗

★表難題

1. 關於空間中的敘述，下面選項中正確的有幾個？<u>　2　</u>
   (甲) 同時與一直線垂直的兩相異直線必互相平行
   (乙) 同時與一平面垂直的兩相異直線必互相平行
   (丙) 同時與一直線平行的兩相異直線必互相平行
   (丁) 同時與一平面平行的兩相異直線必互相平行。
2. 已知一個長方體的長、寬與高分別為 12、3 與 4，如圖 (一)，則其任意兩頂點間最長的距離為 <u>　13　</u>。
3. 設直線 AB 垂直平面 E 於 B 點，L 是平面 E 上一條直線，且 D 是 L 上一點，如圖 (二)。若直線 BC 垂直 L 於 C 點，且 $\overline{AD}=13$，$\overline{DC}=12$，$\overline{BC}=3$，則 $\overline{AB}=$ <u>　4　</u>。
4. 圖 (三) 是一個長方體，$\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=\sqrt{3}$，$\overline{CG}=\sqrt{2}$，則 $\overline{AG}=$ <u>　3　</u>。

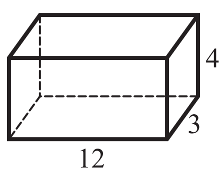


圖 (一)

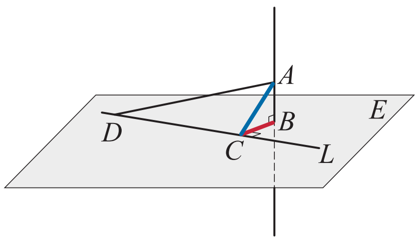


圖 (二)

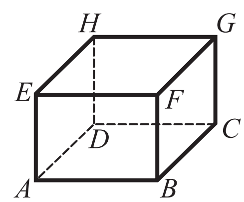


圖 (三)

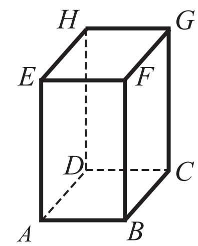
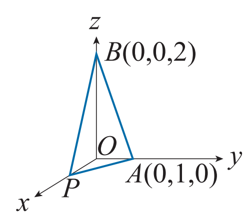


圖 (四)

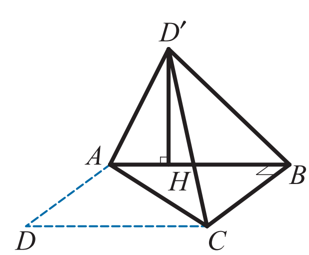
5. 已知 $A(4,1,-3)$、$B(-2,3,1)$為坐標空間中兩點，P 為 y 軸上一點，且 $\overline{AP}=\overline{BP}$，則 P 點的坐標為 <u>　$(0,-3,0)$　</u>。
6. 空間中，A 點為$(3,-4,5)$，P 為 A 點在 xy 平面上的投影點，則 P 點到 z 軸的距離為 <u>　5　</u>。
7. 空間中，點 P 在 xy 平面上的投影點為$Q(2,-3,c)$，在 yz 平面上的投影點為 $R(a,b,4)$，則 P 點坐標為 <u>　$(2,-3,4)$　</u>，$\overline{QR}=$ <u>　$2\sqrt{5}$　</u>。
8. ★ 空間中，設 P 是 x 軸正向上的一點，A 點為$(0,1,0)$，B 點為$(0,0,2)$，如圖所示。若 $\triangle ABP$ 是等腰三角形，則 P 點的坐標為 <u>　$(1,0,0)$或$(2,0,0)$　</u>。（有兩解）



9. 圖 (四) 中，$ABCD-EFGH$ 是一個長方體，$ABCD$ 是一個邊長為 2 的正方形。若 $\overline{AG}=2\sqrt{6}$，則長方體的體積為 <u>　16　</u> 立方單位。
10. ★ 若 P 為平面 ABC 外一點且 $\overline{PA}$ 垂直 $\triangle ABC$ 所在平面於 A，若 $\overline{AB}=\overline{AC}=10$，$\overline{BC}=8$，$\overline{PA}=5$，則點 P 到 $\overline{BC}$ 的最短距離為 <u>　$\sqrt{109}$　</u>。

10-1 高手過招

1. 在一矩形紙板 $ABCD$，沿 $\overline{AC}$ 上折至 ACD' 位置，由 D' 作 ABC 平面之垂線 $\overline{D'H}$，其垂足 H 恰好在 $\overline{AB}$ 邊上，如圖。若 $\overline{AB}=\sqrt{3}$，$\overline{BC}=1$，則 $\overline{BD'}=$ <u>　$\sqrt{2}$　</u>。



10-2 》空間向量的內積

重點一　空間向量

1. 空間向量的坐標表法

空間中起點在原點 O，終點為 A，若 A 坐標為 (x,y,z)，令 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}$，則 $\overrightarrow{a}=(x,y,z)$，其中 x、y、z 分別稱為 $\overrightarrow{a}$ 的 x 分量、y 分量與 z 分量，且向量 $\overrightarrow{a}$ 的長度 $|\overrightarrow{a}|=\overline{OA}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

2. 向量的絕對值：

空間中相異兩點 $A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$ 則 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$，且

$|\overrightarrow{AB}|=\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$。

3. 空間向量的加減法與實數積：

設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$、$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$

(1) 加法：$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$。

(2) 減法：$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$。

(3) 實數積：設 r 為實數，則 $r\overrightarrow{a}=(ra_1,ra_2,ra_3)$。

觀念補充 //

實數積的幾何意義：一個非零向量 $\overrightarrow{a}$ 寫成另一個非零向量 $\overrightarrow{b}$ 的實數積時，稱 $\overrightarrow{a}\,/\!/\,\overrightarrow{b}$。

4. 若兩非零向量 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$，當 $\overrightarrow{a}\,/\!/\,\overrightarrow{b}$ 且 $b_1b_2b_3\neq 0$ 時，則 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$。

5. 單位向量：

任何長度為 1 的向量，其中 x 軸上單位向量 $\overrightarrow{i}=(1,0,0)$，

y 軸上單位向量 $\overrightarrow{j}=(0,1,0)$，

z 軸上單位向量 $\overrightarrow{k}=(0,0,1)$。

1 老師講解 空間向量之坐標表法 學生練習

已知 $P(1,3,5)$、$Q(3,7,z)$ 為空間中兩點，且 $|\overrightarrow{PQ}|=6$，試求 $\overrightarrow{PQ}$。

想法 已知兩點 $P(x_1,y_1,z_1)$、$Q(x_2,y_2,z_2)$，
則 $\overrightarrow{PQ}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$，
且 $|\overrightarrow{PQ}|=\overline{PQ}$
$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$。

[答：$(2,4,-4)$ 或 $(2,4,4)$]

解 $\overrightarrow{PQ}=(3-1,7-3,z-5)=(2,4,z-5)$

因 $|\overrightarrow{PQ}|=6$

$\Rightarrow \sqrt{2^2+4^2+(z-5)^2}=6$

兩邊平方得

$z^2-10z+9=0$

$\Rightarrow (z-1)(z-9)=0$

$\Rightarrow z=1$ 或 $z=9$

故 $\overrightarrow{PQ}=(2,4,-4)$ 或 $(2,4,4)$

已知 $P(1,2,3)$、$Q(-1,4,z)$ 為空間中兩點，且 $|\overrightarrow{PQ}|=3$，試求 $\overrightarrow{PQ}$。

[答：$(-2,2,1)$ 或 $(-2,2,-1)$]

解 $\overrightarrow{PQ}=(-1-1,4-2,z-3)$
$=(-2,2,z-3)$

$\Rightarrow |\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{(-2)^2+2^2+(z-3)^2}=3$

$\Rightarrow 4+4+(z-3)^2=9$

$\Rightarrow (z-3)^2=1$

$\Rightarrow z-3=\pm1$

$\Rightarrow z=4$ 或 2

故 $\overrightarrow{PQ}=(-2,2,1)$ 或 $(-2,2,-1)$

2 老師講解 空間向量的加減法運算 學生練習

已知向量 $\vec{a}=(2,1,1)$、$\vec{b}=(-3,3,-1)$、$\vec{c}=(-5,5,-1)$，試求 $\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c}$ 及其長度。

想法 向量加法：$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$，
向量減法：$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$。

[答：$\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c}=(1,2,2)$，
$|\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c}|=3$]

解 $\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c}$
$=(2,1,1)-3(-3,3,-1)+2(-5,5,-1)$
$=(2,1,1)-(-9,9,-3)+(-10,10,-2)$
$=(1,2,2)$

其長度為 $|\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c}|=\sqrt{1^2+2^2+2^2}$
$=\sqrt{9}$
$=3$

已知向量 $\vec{a}=(2,1,-2)$、$\vec{b}=(3,-1,-6)$，試求 $3\vec{a}-\vec{b}$ 及 $|3\vec{a}-\vec{b}|$。

[答：$3\vec{a}-\vec{b}=(3,4,0)$，$|3\vec{a}-\vec{b}|=5$]

解 $3\vec{a}-\vec{b}$
$=(6-3,3-(-1),-6-(-6))$
$=(3,4,0)$

故 $|3\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3^2+4^2+0^2}=5$

C

10

重點二　空間向量的內積

1. 空間向量的內積：

設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 且夾角為 θ（$0\leq\theta\leq\pi$），定義內積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$。

2. 內積的坐標表法：

設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$，則 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$。

3. 若 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 為非零向量，且夾角為 θ 時（$0\leq\theta\leq\pi$），

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$ 。

4. 內積的性質：

(1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}$（交換律）。

(2) $\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}$（分配律）。

(3) $r(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})=(r\overrightarrow{a})\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\cdot(r\overrightarrow{b})$（結合律）。

5. 空間中兩向量垂直的判定：

設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 為空間中兩非零向量，若 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$，則
$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$。

6. $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影：

設 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影為 $\overrightarrow{c}$，則 $\overrightarrow{c}=\left(\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|^2}\right)\overrightarrow{b}$，且正射影長為 $\dfrac{|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{b}|}$。

3 空間向量的內積

老師講解

已知 $\vec{a}=(1,1,2)$ 與 $\vec{b}=(1,-2,-1)$，試求：

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ (2) $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角。

想法 設 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，

則 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$，

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$，$0\le\theta\le\pi$。

[答：(1) -3 (2) 120°]

解 (1) 利用空間向量內積得

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times1+1\times(-2)+2\times(-1)=-3$

(2) 設 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為 θ

$\because$ $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$

$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$

$\therefore$ $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-3}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=-\dfrac{1}{2}$

故 $\theta=120^\circ$

學生練習

已知 $A(1,2,1)$、$B(3,5,2)$、$C(6,-1,0)$ 為空間中三點，試求：

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ (2) $\angle BAC$

[答：(1) 0 (2) 90°]

解 $\overrightarrow{AB}=(3-1,5-2,2-1)=(2,3,1)$

$\overrightarrow{AC}=(6-1,-1-2,0-1)=(5,-3,-1)$

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times5+3\times(-3)+1\times(-1)$

$=0$

(2) $\cos A=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=0$

故 $\angle BAC=90^\circ$

4 空間中兩向量垂直的判定

老師講解

設向量 $\vec{a}=(2,1,-6)$，$\vec{b}=(3,2,-1)$，若 $(\vec{a}+t\vec{b})\perp\vec{b}$，則實數 t 的值為何？

想法 若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，則 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$。

[答：-1]

解 $\because$ $(\vec{a}+t\vec{b})\perp\vec{b}$，且

$\vec{a}+t\vec{b}=(2,1,-6)+t(3,2,-1)$

$=(2+3t,1+2t,-6-t)$

$\therefore$ $(\vec{a}+t\vec{b})\cdot\vec{b}$

$=(2+3t,1+2t,-6-t)\cdot(3,2,-1)$

$=0$

$\Rightarrow$ $(2+3t)\times3+(1+2t)\times2$

$+(-6-t)\times(-1)=0$

$\Rightarrow$ $14+14t=0$

$\Rightarrow$ $t=-1$

學生練習

已知 $\vec{a}=(3,2,-2)$ 與 $\vec{b}=(t,-t,2t+3)$ 垂直，試求實數 t 的值。

[答：-2]

解 $\because$ $\vec{a}\perp\vec{b}$

$\therefore$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=(3,2,-2)\cdot(t,-t,2t+3)$

$=0$

$\Rightarrow$ $3\times t+2\times(-t)+(-2)\times(2t+3)=0$

$\Rightarrow$ $-3t-6=0$

$\Rightarrow$ $t=-2$

5 老師講解　空間中的向量正射影　學生練習

已知 $\vec{a}=(4,5,2)$，$\vec{b}=(1,2,2)$，試求 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影及正射影長。

想法　設 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影為 $\vec{c}$，

則 $\vec{c}=\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}$ 且 $|\vec{c}|$ 為 $\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}$。

[答：正射影為 $(2,4,4)$，正射影長為 6]

解　$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\times1+5\times2+2\times2=18$

$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$

設 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影為 $\vec{c}$

則 $\vec{c}=\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}=\left(\dfrac{18}{9}\right)\vec{b}$

$=2(1,2,2)$

$=(2,4,4)$

正射影長為 $|\vec{c}|=\sqrt{2^2+4^2+4^2}=6$

已知 $\vec{a}=(0,2,2)$，$\vec{b}=(2,1,1)$，試求 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影及正射影長。

[答：正射影為 $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$

正射影長為 $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$]

解　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\times2+2\times1+2\times1=4$

$|\vec{b}|=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$

設 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影為 $\vec{c}$

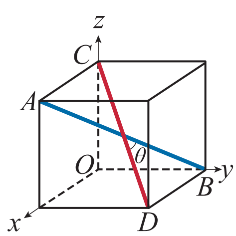
則 $\vec{c}=\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}=\dfrac{2}{3}\vec{b}=\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$

正射影長 $|\vec{c}|=\dfrac{2}{3}\times\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

進階例題

6 老師講解　建立坐標系求向量夾角　學生練習

如圖，正方體邊長為 a，設兩對角線 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 所夾之銳角為 θ，試求 $\sin\theta$ 之值。



[答：$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$]

解　令 $A(a,0,a)$、$B(0,a,0)$、$C(0,0,a)$、$D(a,a,0)$

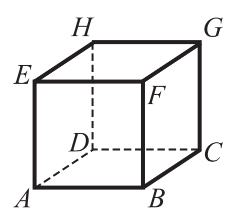
則 $\overrightarrow{AB}=(-a,a,-a)$，$\overrightarrow{CD}=(a,a,-a)$

代夾角公式得

$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}|}=\dfrac{a^2}{\sqrt{3}a\times\sqrt{3}a}=\dfrac{1}{3}$

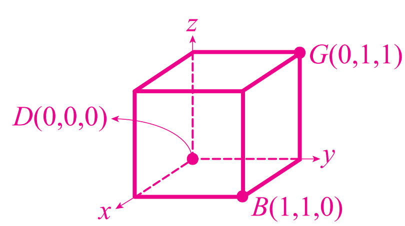
故 $\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

附圖是空間中邊長為 1 的正立方體，試求向量 $\overrightarrow{BD}$ 與 $\overrightarrow{BG}$ 的夾角。



[答：60°]

解　令 $B(1,1,0)$、$D(0,0,0)$、$G(0,1,1)$



$\overrightarrow{BD}=(-1,-1,0)$，$\overrightarrow{BG}=(-1,0,1)$

設 $\overrightarrow{BD}$ 與 $\overrightarrow{BG}$ 的夾角為 θ，得

$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BG}}{|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{BG}|}$

$=\dfrac{(-1)\times(-1)+(-1)\times0+0\times1}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+0^2}\times\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow\ \theta=60^\circ$

10-2 段落測驗

★表難題

1. 已知 $P(1,3,5)$、$Q(a,b,4)$ 為空間中兩點，且 $\overrightarrow{QP}=(2,2,c)$，則 $\left|\overrightarrow{PQ}\right|=$ $\underline{\quad 3 \quad}$。

2. 已知向量 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 滿足 $3\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}=(2,9,-2)$，其中 $\overrightarrow{b}=(-2,3,2)$，則 $\overrightarrow{a}=$ $\underline{\quad (2,1,-2) \quad}$。

3. 設 $\overrightarrow{a}=(1,2,2)$，$\overrightarrow{b}=(-2,3,-1)$，則 $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})=$ $\underline{\quad 6 \quad}$。

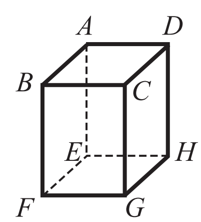
4. 已知 $\overrightarrow{a}=(1,1,2)$ 與 $\overrightarrow{b}=(-1,2,1)$，試求：
   (1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=$ $\underline{\quad 3 \quad}$。
   (2) $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 $\underline{\quad 60^\circ \quad}$。

5. 已知 $\overrightarrow{a}=(1,-2,-1)$，$\overrightarrow{b}=(0,-3,-3)$，試求：
   (1) $\overrightarrow{a}\cdot(2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})=$ $\underline{\quad 3 \quad}$。
   (2) $\overrightarrow{a}$ 與 $2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 的夾角為 $\underline{\quad 60^\circ \quad}$。

6. 已知 $\overrightarrow{a}=(1,-2,4)$，$\overrightarrow{b}=(-3,1,5)$，若 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 之夾角為 θ，則 $\sin\theta=$ $\underline{\quad \dfrac{\sqrt{34}}{7} \quad}$。

7. 設 A 是 x 軸上一點，且已知兩點 $B(1,1,1)$、$C(6,3,1)$。若 $\angle BAC=90^\circ$，則 A 點的坐標為 $\underline{\quad (2,0,0)\text{或}(5,0,0) \quad}$。

8. 如圖，設 $ABCD-EFGH$ 為空間中長、寬、高分別為 2、3、5 的長方體。已知 $\overline{AB}=2$，$\overline{AD}=\overline{BC}=3$，且 $\overline{DH}=5$，則 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=$ $\underline{\quad 9 \quad}$。

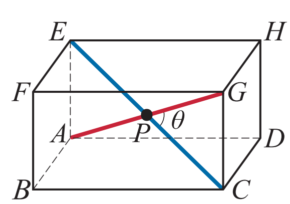


★ 9. 已知 $\overrightarrow{a}=(2,1,0)$，$\overrightarrow{b}=(2,3,-6)$，則 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影為 $\underline{\quad \left(\dfrac{2}{7},\dfrac{3}{7},-\dfrac{6}{7}\right) \quad}$，正射影的長為 $\underline{\quad 1 \quad}$。

★ 10. 已知 $A(3,-1,2)$、$B(1,2,3)$、$C(-1,2,1)$，試求：
   (1) $\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上的正射影為 $\underline{\quad \left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}\right) \quad}$。
   (2) A 點在直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 上的投影點之坐標為 $\underline{\quad \left(\dfrac{3}{2},2,\dfrac{7}{2}\right) \quad}$。

10-2 高手過招

1. 右圖是一個 $\overline{AB}=\overline{AE}=1$，$\overline{AD}=2$ 的長方體，且兩對角線 $\overline{AG}$ 與 $\overline{CE}$ 相交於 P 點，已知 $\angle CPG=\theta$，則 $\cos\theta=$ $\underline{\quad \dfrac{2}{3} \quad}$。



10-3 空間向量的外積

重點一 向量外積

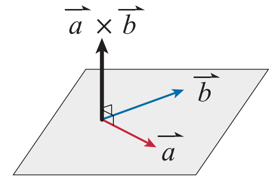
1. 外積的性質：

(1) 外積的大小：

$|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\theta$。

(2) 外積的方向：

依右手法則，利用右手四指由 $\overrightarrow{a}$ 轉至 $\overrightarrow{b}$，大拇指方向即為 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 方向。



(3) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 為 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 之公垂向量，即 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{a}$ 且 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{b}$。

(4) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=-(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a})$。（外積沒有交換律）

(5) 若 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 為空間中兩非零向量且互相平行，則 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$。

2. 空間向量的外積：

空間中兩向量 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$，則 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)$。

觀念補充 //

利用下法方便記憶向量外積：

將 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 各寫兩次，將頭尾數字去掉，交叉部分所形成的二階行列式就是 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 的三個分量。

$$\begin{array}{c|ccccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}$$

3. 設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 與 $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 之夾角 θ，則由 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 所張出的平行四邊形面積為

$$|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=\sqrt{\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}^2}\text{。}$$

1　老師講解　向量外積運算　學生練習

已知向量 $\overrightarrow{a}=(1,1,2)$，$\overrightarrow{b}=(1,-2,-1)$，試求 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}$ 。

想法　$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)$。

[答：$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(3,3,-3)$，$\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}=(-3,-3,3)$]

解　根據外積的定義得

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\left(\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}\right)=(3,3,-3)$$

$$\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}=\left(\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right)=(-3,-3,3)$$

已知向量 $\overrightarrow{a}=(1,0,1)$，$\overrightarrow{b}=(2,-2,1)$，試求 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}$ 。

[答：$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(2,1,-2)$，$\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}=(-2,-1,2)$]

解　根據外積的定義得

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\left(\begin{vmatrix}0 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -2\end{vmatrix}\right)=(2,1,-2)$$

$$\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}=\left(\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 0\end{vmatrix}\right)=(-2,-1,2)$$

2　老師講解　外積運算與公垂向量　學生練習

已知 $\overrightarrow{n}$ 同時與 $\overrightarrow{a}=(2,-1,0)$ 和 $\overrightarrow{b}=(4,-1,-1)$ 垂直，且 $|\overrightarrow{n}|=6$，試求 $\overrightarrow{n}$ 。

想法　$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 和 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 均垂直。

[答：$(2,4,4)$ 或 $(-2,-4,-4)$]

解　∵ $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 和 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 均垂直

∴ $\overrightarrow{n}$ 與 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 平行，即 $\overrightarrow{n}=t(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})$

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\left(\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & -1\end{vmatrix}\right)=(1,2,2)$$

得 $\overrightarrow{n}=t(1,2,2)=(t,2t,2t)$

因 $|\overrightarrow{n}|=\sqrt{t^2+(2t)^2+(2t)^2}=3|t|$

又 $|\overrightarrow{n}|=6$，得 $|t|=2$

$\Rightarrow\ t=\pm2$

故 $\overrightarrow{n}$ 為 $(2,4,4)$ 或 $(-2,-4,-4)$

已知 $\overrightarrow{n}$ 同時與 $\overrightarrow{a}=(0,-2,1)$ 和 $\overrightarrow{b}=(3,0,-1)$ 垂直，且 $|\overrightarrow{n}|=7$，試求 $\overrightarrow{n}$ 。

[答：$(2,3,6)$ 或 $(-2,-3,-6)$]

解　∵ $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 和 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 均垂直

∴ $\overrightarrow{n}$ 與 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 平行，即 $\overrightarrow{n}=t(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})$

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\left(\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0 & -2\\ 3 & 0\end{vmatrix}\right)=(2,3,6)$$

得 $\overrightarrow{n}=t(2,3,6)=(2t,3t,6t)$

因 $|\overrightarrow{n}|=\sqrt{(2t)^2+(3t)^2+(6t)^2}=7|t|$

又 $|\overrightarrow{n}|=7$，得 $|t|=1$

$\Rightarrow\ t=\pm1$

故 n 為 $(2,3,6)$ 或 $(-2,-3,-6)$

老師講解

已知 $A(1,-1,1)$、$B(-3,2,1)$、$C(5,-4,3)$，試求由 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 所張出平行四邊形面積。

想法　空間中由 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 所張出平行四邊形面積 $=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$。

[答：10 平方單位]

解　計算 $\overrightarrow{AB}=(-4,3,0)$，$\overrightarrow{AC}=(4,-3,2)$

則 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

$$=\left(\begin{vmatrix}3 & 0\\ -3 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0 & -4\\ 2 & 4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-4 & 3\\ 4 & -3\end{vmatrix}\right)$$

$=(6,8,0)$

故由 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 所張出平行四邊形面積

$=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$

$=\sqrt{6^2+8^2+0^2}$

$=10$（平方單位）

學生練習

已知 $A(-3,1,2)$、$B(1,0,1)$、$C(1,1,0)$，試求由 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 所張出平行四邊形面積。

[答：6 平方單位]

解　計算 $\overrightarrow{AB}=(4,-1,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(4,0,-2)$

則 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

$$=\left(\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 0 & -2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & 4\\ -2 & 4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}4 & -1\\ 4 & 0\end{vmatrix}\right)$$

$=(2,4,4)$

故由 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 所張出平行四邊形面積

$=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$

$=\sqrt{2^2+4^2+4^2}$

$=6$（平方單位）

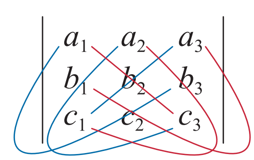
重點二　行列式

1. 二階行列式的定義：

$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$$。（行列式中直的叫行，橫的叫列）

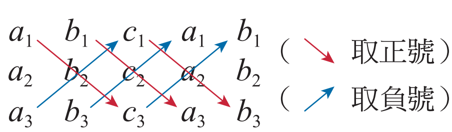
2. 三階行列式定義：

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3$$。



觀念補充 //

三階行列式展開為方便記憶可將原行列式多抄兩行，再如下畫斜線：



3. **三階行列式的性質：**

(1) 行列互換，其值不變。

(2) 任兩行（列）對調，其值變號。

(3) 任一行（列）可提出公因數。

(4) 任兩行（列）成比例時，其值為 0。

(5) 將任一行（列）的 k 倍加到另一行（列），其值不變。

(6) 任一行（列）之每個元素可分成兩行（列）的元素和，則此行列式可拆成兩行列式之和。

例如：$\begin{vmatrix} a_1+d_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+e_1 & b_2 & b_3 \\ c_1+f_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & a_2 & a_3 \\ e_1 & b_2 & b_3 \\ f_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$。

(7) 降階：行列式可依某行（或列）進行降階。例如：三階行列式 $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 中

① 將 A 中第 i 列與第 j 行的元素全部刪除，可得二階行列式 A_{ij}。例如：$A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$。

② $(-1)^{i+j}A_{ij}$ 稱為 a_{ij} 的餘因子。

③ 餘因子的符號為 $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$。

④ 將某行（或列）的元素分別乘上其餘因子，再相加，此計算過程叫降階。

例如：對第一行降階 $\Rightarrow \begin{vmatrix} a & 1 & 4 \\ b & 2 & 5 \\ c & 3 & 6 \end{vmatrix} = a\times\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - b\times\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + c\times\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$。

4 老師講解　二階行列式的展開　學生練習

設行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 2$，試求 $\begin{vmatrix} 3b & 15a \\ d & 5c \end{vmatrix}$ 的值。

想法　二階行列式展開為 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$。

[答：-30]

解

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3b & 15a \\ d & 5c \end{vmatrix} &= 3\times5\times\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} \\ &= (-15)\times\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \\ &= (-15)\times2 \\ &= -30 \end{aligned}$$

已知 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 3$，試求 $\begin{vmatrix} 4c & 12d \\ a & 3b \end{vmatrix}$ 的值。

[答：-36]

解

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 4c & 12d \\ a & 3b \end{vmatrix} &= 4\times3\times\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} \\ &= 12\times\left(-\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right) \\ &= 12\times(-3) \\ &= -36 \end{aligned}$$

5 老師講解 三階行列式求值 學生練習

試求行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 11 & 14 & 17 \\ 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 7 & 12 & 25 \\ -7 & 4 & 0 \\ 14 & 8 & -10 \end{vmatrix}$

想法　先依三階行列式的性質進行化簡再展開。

[答：(1) 0　(2) -3920]

$\times(-1)$　$\times(-1)$

解 (1) $\begin{vmatrix} 11 & 14 & 17 \\ 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 3 & 6 \\ 12 & 3 & 6 \\ 13 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$

(2) 第一行提公因數 7

第二行提公因數 4

第三行提公因數 5

第三列提公因數 2

則原式 $= 7 \times 4 \times 5 \times 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= 280 \times (-14)$

$= -3920$

試求行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 11 & 22 & 33 \\ 113 & 223 & 333 \end{vmatrix}$

[答：(1) 0　(2) 0]

$\times(-1)$　$\times(-1)$

解 (1) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$

(2) 第一列提公因數 5

第二列提公因數 11

則原式 $= 5 \times 11 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 113 & 223 & 333 \end{vmatrix}$

$= 0$

6　老師講解　三階行列式的性質　學生練習

試求下列三階行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 22 & 3 & 4 \\ 33 & 4 & 5 \\ 55 & 6 & 7 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 3 & 43 & 31 \\ -1 & -11 & 23 \\ -5 & -53 & 116 \end{vmatrix}$

想法　將某行（或列）乘 k 倍加到另一行（或列），其值不變。

[答：(1) 0　(2) −190]

解 (1) 將第一行提出公因數 11
再將第一行乘以 (-1)
分別加入第二行及第三行得

$$\begin{vmatrix} 22 & 3 & 4 \\ 33 & 4 & 5 \\ 55 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 11\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 11\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 0$
（第二、三兩行成比例）

(2) 將第二列分別乘以 3 及 (-5)
加入第一列及第三列得

$$\begin{vmatrix} 3 & 43 & 31 \\ -1 & -11 & 23 \\ -5 & -53 & 116 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 10 & 100 \\ -1 & -11 & 23 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1) \times \begin{vmatrix} 10 & 100 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$ （依第一行降階展開）

$= -190$

試求下列三階行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 7 & 42 & 2 \\ 5 & 30 & 3 \\ 8 & 48 & 4 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 12 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 3 \\ -19 & -4 & -13 \end{vmatrix}$

[答：(1) 0　(2) −3]

解 (1) 第二行提公因數 6

$$\begin{vmatrix} 7 & 42 & 2 \\ 5 & 30 & 3 \\ 8 & 48 & 4 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 7 & 7 & 2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 8 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

（第一、二兩行成比例）

(2) 將第二列分別乘以 (-2) 及 4
加入第一列及第三列得

$$\begin{vmatrix} 12 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 3 \\ -19 & -4 & -13 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$ （依第二行降階展開）

$= -3$

若$\begin{vmatrix} x+1 & x+3 & x+5 \\ x+3 & x+5 & x+1 \\ x+5 & x+1 & x+3 \end{vmatrix}=0$，則$x=$？

想法 依三階行列式的性質先化簡再進行降階。

[答：-3]

解 將第二行、第三行全部加入第一行

$$\begin{vmatrix} x+1 & x+3 & x+5 \\ x+3 & x+5 & x+1 \\ x+5 & x+1 & x+3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3x+9 & x+3 & x+5 \\ 3x+9 & x+5 & x+1 \\ 3x+9 & x+1 & x+3 \end{vmatrix}$$

$$=(3x+9)\begin{vmatrix} 1 & x+3 & x+5 \\ 1 & x+5 & x+1 \\ 1 & x+1 & x+3 \end{vmatrix}\text{（提公因式）}$$

$$=(3x+9)\begin{vmatrix} 1 & x+3 & x+5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}\text{（降階）}$$

$$=(3x+9)\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}=0$$

故$3x+9=0 \Rightarrow x=-3$

試求滿足$\begin{vmatrix} 9+x & 2 & 3 \\ 9 & 2+x & 3 \\ 9 & 2 & 3+x \end{vmatrix}=0$之解。

[答：$x=0$ 或 -14]

解 將第二行、第三行全部加入第一行

$$\begin{vmatrix} 9+x & 2 & 3 \\ 9 & 2+x & 3 \\ 9 & 2 & 3+x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 14+x & 2 & 3 \\ 14+x & 2+x & 3 \\ 14+x & 2 & 3+x \end{vmatrix}$$

$\times 1$　$\times 1$

$$=(14+x)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2+x & 3 \\ 1 & 2 & 3+x \end{vmatrix}$$

$\times(-1)$　$\times(-1)$

$$=(14+x)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix}=(14+x)\begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{vmatrix}$$

$$=(14+x)\times x^2=0$$

$\Rightarrow x=0$或-14

重點三 三階行列式的應用

1. 平面上不共線三點$A(a_1,a_2)$、$B(b_1,b_2)$、$C(c_1,c_2)$，則$\triangle ABC$面積$\Delta=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}\right|$。

2. 空間中三向量$\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$與$\overrightarrow{c}=(c_1,c_2,c_3)$所展出平行六面體體積

$V=\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right|$。

3. 若空間中$\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$與$\overrightarrow{c}=(c_1,c_2,c_3)$三向量共平面，則

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$。

觀念補充 //

因當$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$三個向量共平面時，所展出之平行六面體體積V為 0。

8 老師講解　運用三階行列式求三角形面積　學生練習

已知 $A(2,5)$、$B(4,1)$、$C(-1,3)$ 為平面上三點，試求 $\triangle ABC$ 的面積。

想法　$\triangle ABC$ 面積 $\Delta=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}\right|$。

[答：8 平方單位]

解　$\triangle ABC$ 的面積

$$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\times|2-5+12-6-20+1|$$

$$=\frac{1}{2}\times|-16|$$

$=8$（平方單位）

已知 $A(2,4)$、$B(1,-3)$、$C(5,k)$ 為平面上三點，且 $\triangle ABC$ 的面積為 3 平方單位，試求 k 的值。

[答：19 或 31]

解　$\triangle ABC$ 面積 $=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 5 & k & 1 \end{vmatrix}\right|=3$，即

$$\frac{1}{2}\times|-6+20+k-2k-4-(-15)|=3$$

$\Rightarrow\ |25-k|=6$

$\Rightarrow\ k-25=\pm 6$

$\Rightarrow\ k=19$ 或 31

9 老師講解　運用三階行列式求平行六面體體積　學生練習

試求由三向量 $\overrightarrow{a}=(-1,2,3)$，$\overrightarrow{b}=(2,-1,-2)$，$\overrightarrow{c}=(3,-2,1)$ 所展出的平行六面體體積。

想法　三向量 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 與 $\overrightarrow{c}=(c_1,c_2,c_3)$ 所展出之平行六面體體積為 $\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right|$。

[答：14 立方單位]

解　平行六面體體積代公式

$$=\left|\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}\right|$$

$$=|1-12-12+4-4+9|$$

$=|-14|=14$（立方單位）

已知由三向量 $\overrightarrow{a}=(1,1,2)$、$\overrightarrow{b}=(-2,k,1)$、$\overrightarrow{c}=(1,3,1)$ 所展出之平行六面體體積為 5 立方單位，試求 k 之值。

[答：-7 或 -17]

解　平行六面體體積

$$=\left|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & k & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}\right|=5$$

$\Rightarrow\ |k+1-12-3-(-2)-2k|=5$

$\Rightarrow\ |-k-12|=5$

$\Rightarrow\ k+12=\pm 5$

$\Rightarrow\ k=-7$ 或 -17

C

10

10-3 段落測驗

★表難題

1. 已知向量 $\overrightarrow{a}=(1,2,-1)$，$\overrightarrow{b}=(3,1,1)$，則 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=$ $\underline{(3,-4,-5)}$，$\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}=$ $\underline{(-3,4,5)}$。

2. 已知 $A(1,-1,1)$、$B(2,-3,2)$、$C(5,-4,1)$ 為空間中三點，則由 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 所張出平行四邊形面積為 $\underline{5\sqrt{2}}$ 平方單位。

3. 試求下列行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix}\sin\theta & \cos\theta\\ \cos\theta & -\sin\theta\end{vmatrix}=$ $\underline{-1}$。 (2) $\begin{vmatrix}1 & \sqrt{2} & \sqrt{3}\\ 1 & -\sqrt{2} & \sqrt{3}\\ 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{3}\end{vmatrix}=$ $\underline{4\sqrt{6}}$。

4. 設 $\begin{vmatrix}x & 3\\ 4 & 2\end{vmatrix}=2$，則 $\begin{vmatrix}4-x & 2 & -1\\ -7 & -3-x & 3\\ 1 & 2 & 7\end{vmatrix}=$ $\underline{336}$。

5. 由三向量 $\overrightarrow{a}=(4,1,1)$，$\overrightarrow{b}=(2,-1,2)$，$\overrightarrow{c}=(3,0,3)$ 所展出之平行六面體體積為 $\underline{9}$ 立方單位。

6. 行列式 $\begin{vmatrix}1 & 10 & 20\\ 5 & 50 & 1\\ 10 & 1 & 5\end{vmatrix}=$ $\underline{A}$ (A) -99^2 (B) -100^2 (C) 99^2 (D) 100^2。 【統測】

7. 設 a、b、c、d、e、f 均為實數，若行列式 $\begin{vmatrix}a & 1 & d\\ b & 1 & e\\ c & 1 & f\end{vmatrix}=2$，則 $\begin{vmatrix}2a & -3 & 4d\\ 2b & -3 & 4e\\ -10c & 15 & -20f\end{vmatrix}=$ $\underline{240}$。 【統測】

★ 8. 設 k 為自然數，若行列式 $\begin{vmatrix}1-k & 2 & 3\\ 1 & 2-k & 3\\ 1 & 2 & 3-k\end{vmatrix}=0$，則 $k=$ $\underline{6}$。 【統測】

9. 設 $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ x & 1 & 2\\ 3 & x & 1\end{vmatrix}=36$ 的解為 a 與 b，則 $a+b=$ $\underline{\frac{4}{3}}$。 【統測】

10. 若 $\begin{vmatrix}x & 1 & 2\\ x-1 & 2 & 4\\ x-2 & 4 & 7\end{vmatrix}=0$，則 $x=$ $\underline{-1}$。 【統測】

10-3 高手過招

1. 已知由三向量 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\overrightarrow{c}=(c_1,c_2,c_3)$ 所展出之平行六面體體積為 4 立方單位，則由三向量 $2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{b}-2\overrightarrow{c}$、$\overrightarrow{c}$ 所展出之平行六面體體積為 $\underline{8}$ 立方單位。

10-4 空間中的平面

重點一 平面方程式

1. **法向量：**

當一非零向量 n 所在的直線與平面 E 垂直時，則稱 $\overrightarrow{n}$ 為平面 E 的一個法向量。

觀念補充 //

平面 E 的法向量並不唯一，但這些法向量彼此會互相平行。

2. **平面方程式的表法：**

(1) 點法式：過 $A(x_0, y_0, z_0)$ 且法向量 $\overrightarrow{n}=(a, b, c)$ 之平面 E 方程式為

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$。

觀念補充 //

常見的特殊平面方程式：

平面	xy 平面	yz 平面	xz 平面
平面方程式	$z=0$	$x=0$	$y=0$

(2) 截距式：若平面 E 與三坐標軸交於點 $A(a, 0, 0)$、$B(0, b, 0)$、$C(0, 0, c)$（$abc \neq 0$），則 E 方程式為 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$。

3. **兩平面的夾角：**

設平面 E_1、E_2 的法向量分別為 $\overrightarrow{n_1}$、$\overrightarrow{n_2}$，若 $\overrightarrow{n_1}$ 與 $\overrightarrow{n_2}$ 夾角為 θ，則平面 E_1 與 E_2 的夾角為 θ 與 $180^\circ-\theta$，其中 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$。

4. **點到平面的距離公式：**

點 $P(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 E：$ax+by+cz=d$ 的距離為 $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$。

5. **兩平行平面的距離公式：**

兩平行平面 E_1：$ax+by+cz=d_1$ 和 E_2：$ax+by+cz=d_2$ 的距離為 $\dfrac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$。

1 老師講解　點法式求平面方程式　學生練習

試求過點 $A(1,2,3)$，且以 $\overrightarrow{n}=(3,-2,1)$ 為法向量之平面 E 方程式。

想法 過 $A(x_0,y_0,z_0)$ 且法向量為 $\overrightarrow{n}=(a,b,c)$ 之平面方程式為 $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$。

[答：$3x-2y+z=2$]

解 代點法式得平面方程式為

$3(x-1)+(-2)(y-2)+1(z-3)=0$

$\Rightarrow\ 3x-2y+z=2$

設 $A(1,2,3)$、$B(2,1,1)$ 是空間中兩點，已知直線 AB 和平面 E 垂直於 B 點，試求平面 E 方程式。

[答：$x-y-2z=-1$]

解 直線 AB 和平面 E 垂直

所以 $\overrightarrow{AB}=(1,-1,-2)$ 是平面 E 的法向量

又 E 通過點 $B(2,1,1)$，由點法式得

$1(x-2)+(-1)(y-1)+(-2)(z-1)=0$

$\Rightarrow\ x-y-2z=-1$

2 老師講解　點法式求平面方程式　學生練習

試求過點 $A(3,2,1)$ 且與平面 $E_1：x-2y+3z=-4$ 平行之平面 E_2 的方程式。

想法 若平面 E_1 平行 E_2，則 E_2 法向量與 E_1 法向量也平行。

[答：$x-2y+3z=2$]

解 $E_1 // E_2$

$\overrightarrow{n}=(1,-2,3)$ 是 E_1 的法向量

$\therefore\ \overrightarrow{n}$ 也是 E_2 的法向量

令 E_2 的方程式為 $x-2y+3z=d$

將 $A(3,2,1)$ 代入此式

得 $d=1\times3+(-2)\times2+3\times1=2$

故 E_2 方程式為 $x-2y+3z=2$

試求過點 $A(2,0,-1)$ 且與平面 $E_1：4x-y+2z=1$ 平行之平面 E_2 的方程式。

[答：$4x-y+2z=6$]

解 $E_1 // E_2$

$\overrightarrow{n}=(4,-1,2)$ 是 E_1 的法向量

$\therefore\ \overrightarrow{n}$ 也是 E_2 的法向量

令 E_2 的方程式為 $4x-y+2z=d$

將 $A(2,0,-1)$ 代入此式

得 $d=4\times2-0+2\times(-1)=6$

故 E_2 的方程式為 $4x-y+2z=6$

3 老師講解 過三點求平面方程式 學生練習

試求通過 $A(1,-1,2)$、$B(3,2,5)$、$C(2,0,4)$三點之平面 E 的方程式。

想法 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 均垂直，即為平面 E 的法向量。

[答：$3x-y-z=2$]

解 $\overrightarrow{AB}=(2,3,3)$，$\overrightarrow{AC}=(1,1,2)$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(3,-1,-1)$

$\because$ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 均垂直

$\therefore$ $(3,-1,-1)$為平面 E 的法向量

令 E 方程式為 $3x-y-z=d$

代入點$(1,-1,2)$得

$d=3\times1-1\times(-1)-1\times2=2$

故 E 方程式為 $3x-y-z=2$

試求過 $A(1,3,2)$、$B(2,3,1)$、$C(3,1,2)$三點之平面 E 的方程式。

[答：$x+y+z=6$]

解 $\overrightarrow{AB}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(2,-2,0)$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-2,-2,-2)=(-2)(1,1,1)$

$\because$ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 均垂直

$\therefore$ $(1,1,1)$是平面 E 的法向量

令 E 方程式為 $x+y+z=d$

代入點$(1,3,2)$得

$d=1\times1+1\times3+1\times2=6$

故平面 E 的方程式為 $x+y+z=6$

4 老師講解 平面之截距式 學生練習

試求通過 $A(2,0,0)$、$B(0,3,0)$、$C(0,0,4)$三點之平面 E 的方程式。

想法 截距式：平面 E 與坐標軸交於 $A(a,0,0)$、$B(0,b,0)$、$C(0,0,c)$，則 E 方程式為 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$。

[答：$6x+4y+3z=12$]

解 代截距式可得平面 E 的方程式為

$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$

$\Rightarrow$ $6x+4y+3z=12$

已知平面 E 通過 $A(12,0,0)$、$B(0,3,0)$、$C(0,0,-2)$三點，且 $D(2,1,k)$也在 E 上，試求 k 之值。

[答：-1]

解 代截距式可得平面 E 的方程式為

$\frac{x}{12}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-2}=1$

又 $D(2,1,k)$也在 E 上

所以滿足 $\frac{x}{12}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-2}=1$

得 $\frac{2}{12}+\frac{1}{3}+\frac{k}{-2}=1$

$\Rightarrow$ $k=-1$

C

10

試求兩平面 E_1：$x+2y-z=3$ 和 E_2：$x-y+2z=3$ 的夾角。

想法

E_1、E_2 法向量 $\overrightarrow{n_1}$、$\overrightarrow{n_2}$ 之夾角為 θ，

則 E_1 與 E_2 的夾角為 θ 與 $180^\circ-\theta$，

且 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$。

[答：120° 與 60°]

解 設 θ 為 E_1 法向量 $\overrightarrow{n_1}=(1,2,-1)$ 與 E_2 法向量 $\overrightarrow{n_2}=(1,-1,2)$ 的夾角，則

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{1\times1+2\times(-1)+(-1)\times2}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\times\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}$$

得 $\theta=120^\circ$

故兩平面夾角為 120° 與 $180^\circ-120^\circ=60^\circ$

試求兩平面 E_1：$2x+3y+6z=10$ 和 E_2：$3x-6y+2z=5$ 的夾角。

[答：90°]

解 設 θ 為 E_1 法向量 $\overrightarrow{n_1}=(2,3,6)$ 與 E_2 法向量 $\overrightarrow{n_2}=(3,-6,2)$ 的夾角，則

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{2\times3+3\times(-6)+6\times2}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}\times\sqrt{3^2+(-6)^2+2^2}}=0$$

得 $\theta=90^\circ$

即兩平面互相垂直

6 老師講解　點到平面的距離　學生練習

試求點$(1,2,3)$到平面 $2x+3y-6z=4$ 的距離。

想法　點 $P(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $E：ax+by+cz=d$ 的距離為 $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$。

[答：2]

解　利用點到平面的距離公式得

$$\frac{|2\times1+3\times2-6\times3-4|}{\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}}=\frac{|-14|}{7}=2$$

試求點$(3,2,3)$到平面 $x+2y-2z=4$ 的距離。

[答：1]

解　利用點到平面的距離公式得

$$\frac{|1\times3+2\times2-2\times3-4|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{|-3|}{3}=1$$

7 老師講解　兩平行平面的距離　學生練習

試求兩平行平面 $E_1：3x-4z=1$ 和 $E_2：3x-4z=-9$ 的距離。

想法　兩平行平面 $E_1：ax+by+cz=d_1$ 和 $E_2：ax+by+cz=d_2$ 的距離為 $\dfrac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$。

[答：2]

解　利用兩平行平面的距離公式得平面 E_1 與 E_2 距離為

$$\frac{|1-(-9)|}{\sqrt{3^2+0^2+(-4)^2}}=\frac{10}{5}=2$$

試求兩平行平面 $E_1：x+y-4z=1$ 和 $E_2：x+y-4z=7$ 的距離。

[答：$\sqrt{2}$]

解　利用兩平行平面的距離公式得平面 E_1 與 E_2 距離為

$$\frac{|1-7|}{\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}}=\frac{6}{3\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

10-4 段落測驗

★表難題

1. 已知平面 $E_1：2x-by+cz=d$ 和 $E_2：6x+3y+9z=3$ 平行，且 E_1 通過點 $(2,-3,1)$，則 $b=$ ___-1___，$c=$ ___3___，$d=$ ___4___。

2. 通過 $A(1,3,2)$、$B(2,4,1)$、$C(3,7,1)$ 三點之平面 E 的方程式為 ___$3x-y+2z=4$___。

3. 平面 E 通過 $A(3,0,0)$、$B(0,6,0)$、$C(0,0,-4)$ 三點，而且 $D(1,1,k)$ 也是 E 上的一點，則 $k=$ ___-2___。

4. 兩平面 $E_1：2x-y-z=4$ 和 $E_2：x-2y+z=8$ 的夾角為 ___$60°$ 與 $120°$___。

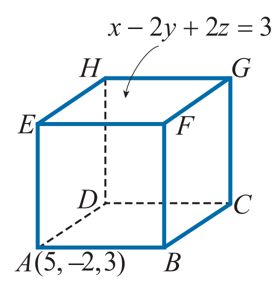
5. 已知點 $(1,1,-1)$ 到平面 $4x-4y-7z=d$ 的距離為 2，則 $d=$ ___25 或 -11___。

6. 設 $A(1,0,1)$、$B(0,1,1)$ 是空間中兩點，已知直線 AB 和平面 E 垂直於 B 點，則平面 E 的方程式為 ___$x-y=-1$___。

7. 通過點 $(1,-2,3)$，且與 x 軸垂直之平面 E 的方程式為 ___$x=1$___。

8. 當一平面通過已知線段的中點且與此線段垂直時，稱此平面為該線段的垂直平分面。已知 $A(1,2,1)$ 與 $B(3,2,-3)$ 為空間中兩點，則 $\overline{AB}$ 之垂直平分面的方程式為 ___$x-2z=4$___。

★ 9. 如圖，$ABCD-EFGH$ 是一個正立方體，它的面 $EFGH$ 所在的平面方程式為 $x-2y+2z=3$，且 A 點坐標為 $(5,-2,3)$，試求：
(1) 正立方體的面 $ABCD$ 所在的平面方程式為 ___$x-2y+2z=15$___。
(2) 正立方體的邊長為 ___4___。



10. 兩平面設 $E_1：x+ky+z=3$，$E_2：x+y+kz=5$，若 E_1 與 E_2 夾角為 $60°$，則 $k=$ ___$-2, 0$ 或 4___。

10-4 高手過招

★ 1. 空間中有兩平面 $E_1：2x+y-z-3=0$ 與 $E_2：x+2y+z=0$，則過點 $(2,1,-1)$ 且與兩平面 E_1 與 E_2 都垂直的平面方程式為 ___$x-y+z=0$___。

2. 已知動點 $P(x,y,z)$ 在平面 $E：2x+y-2z-5=0$ 上移動，則 $\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2+(z+2)^2}$ 之最小值為 ___$\frac{4}{3}$___。

CH 10 素養練功坊

題目

太陽能板，又稱為太陽能晶片，是一種將太陽光透過光伏效應轉換為電能的裝置，在發電的過程中並不會產生二氧化碳或其他溫室氣體，對環境沒有危害，是一種可再生的環保發電方式。為了提高接收效率，太陽能板之板面需一直保持和太陽光垂直，假設地面為 xy 平面，發現通過點 $A(3,2,4)$ 的太陽光射到太陽能板 E 上的點 $B(2,2,3)$，試求平面 E 與地面的夾角。

關鍵字 通過點 $A(3,2,4)$ 的太陽光射到太陽能板 E 上的點 $B(2,2,3)$
試求平面 E 與地面的夾角

單元公式 設 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 之夾角為 θ

則 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\times\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

翻譯成數學式 設 $A(3,2,4)$、$B(2,2,3)$ 為空間中兩點，已知直線 AB 和平面 E 垂直於 B 點，求平面 E 與 xy 平面的夾角

解題 依題意，平面 E 和太陽光垂直

我們可得 $\overrightarrow{BA}=(1,0,1)$ 是 E 的法向量

令 E 方程式為 $x+z=d$，再將點 $B(2,2,3)$ 代入 E 中

得 $d=5$，故求出 E 方程式為 $x+z=5$

假設 xy 平面法向量 $(0,0,1)$ 與 E 法向量 $(1,0,1)$ 的夾角為 θ

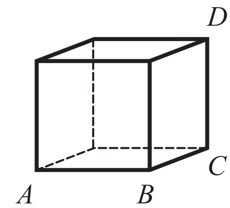
代入向量夾角公式 $\cos\theta=\dfrac{(0,0,1)\cdot(1,0,1)}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}\times\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，得 $\theta=45^\circ$

故 E 與地面夾角為 45° 與 $180^\circ-45^\circ=135^\circ$

- **回顧：** 這一題考空間中兩向量的夾角觀念，我們從平面向量提高維度升級至空間向量，其實平面向量與空間向量的理論是類似的，只是多了 z 方向。歸納求平面方程式的法則，只要找到法向量和平面上的點（點法式），其餘都只是手法上的變化而已，學習上若能釐清這個脈絡，抓住主軸，問題自然都能迎刃而解。

★表難題

★ 1. 某科學研究室觀察一個微小質點速度與牛頓運動力學之關係的實驗中，已知在右圖的正立方體上有兩質點分別自頂點 A、C 同時出發，各自以等速直線運動分別向頂點 B、D 前進，且在 1 秒後同時到達 B、D。試問在出發後幾秒兩質點的距離最小，並求其最小值。



答：出發後 $\frac{1}{2}$ 秒兩質點的距離最小，其值為 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

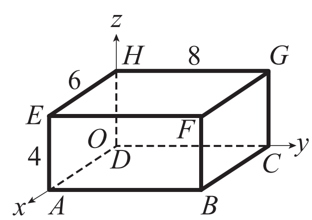
★ 2. 地球雖然是一個球體，但嚴格說來它是一個不規則的扁球體。其特徵是球體半徑因緯度增高而變短，所以它的半徑在赤道最長，兩極半徑最短。假設用一個地球儀來觀察地球，它的球心為空間坐標的原點，有兩個城市的坐標分別為 $A(1,2,2)$、$B(2,-2,1)$。假設地球為半徑等於 6400 公里的圓球，試問飛機從 A 城市直飛至 B 城市的最短航線為幾公里？

答：3200π 公里

3. 利用超音波回聲系統來定位的技術稱為超音波定位。若將一教室空間坐標化，其牆角的三面牆由 xy 面、yz 面和 xz 面組成，令牆角為原點 O，訊號點 A（點 A 在第一卦限）分別向 xy 面、yz 面和 xz 面發射與三平面垂直的超音波，經儀器測出之距離分別為 5、4、3，若 A 點投影在 xy 面上得點 P，試求 P 點到 z 軸之距離為何？

答：5

4. 如圖，有一長方體結構的空間，內部長、寬、高分別為 8 m、6 m、4 m，此空間經 5 級地震後結構受損，因此土木技師打算在此空間內加上兩條鋼條 $\overline{AG}$ 與 $\overline{DF}$，用以撐住最遠的兩頂點來補強結構，若兩鋼條之銳夾角為 θ，試求 $\cos\theta=$？



答：$\frac{11}{29}$

高三人的鬥志
要先埋頭才能出頭，先完備觀念再勾勒理念，給自己一個挑戰自我的機會，讓技職生涯畫上完美的句點。

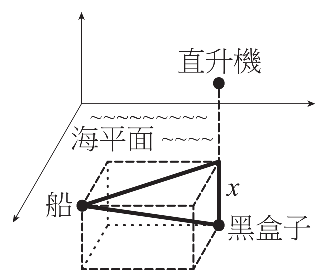
統測解題影音

★表難題

(C) 1. 正四面體（四個面皆為正三角形）$ABCD$ 的四個頂點坐標為 $A(0,0,0)$、$B(2,0,0)$、$C(1,\sqrt{3},0)$、$D(x,y,z)$，其中 $z>0$，則 $z=$？

(A) $\sqrt{3}$ (B) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ (C) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$。【111(C)】

(C) 2. 今有一飛機失事落海，救難直升機於失事地點附近偵測到黑盒子（飛行記錄器的俗稱），其所發出的訊號恰好位於直升機的正下方，但無法確定深度，直升機將位置訊息告知水上工作船，經船上人員推算，直升機位於工作船東方 140 公尺、北方 80 公尺的海平面上方 100 公尺處，並且偵測到該黑盒子與水上工作船的直線距離為 180 公尺，如圖所示。根據上述訊息，若黑盒子在海平面下深度為 x 公尺，則 $x=$？



(A) 60 (B) 70 (C) 80 (D) 90。【111(C)】

(A) 3. 若 x、y、z 為相異實數，則三階行列式 $\begin{vmatrix} x+y & x-y & x \\ y+z & y-z & y \\ z+x & z-x & z \end{vmatrix}=$？

(A) 0 (B) $(x-y)(y-z)(z-x)$ (C) $(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)$

(D) $(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2$。【110(C)】

★(C) 4. 已知三階行列式 $\begin{vmatrix} a_1-2b_1-3c_1 & a_1-2c_1 & a_1 \\ a_2-2b_2-3c_2 & a_2-2c_2 & a_2 \\ a_3-2b_3-3c_3 & a_3-2c_3 & a_3 \end{vmatrix}=8$，則 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=$

(A) -4 (B) -2 (C) 2 (D) 4。【109(C)】

(A) 5. 空間中有相異四點 A、B、C、D，已知內積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$。試選出正確的選項。

(A) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ (B) $\overline{AC}=\overline{AD}$ (C) $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 平行 (D) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$。

【改自 109 學測】

(A) 6. 若實數 x 滿足行列式 $\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 0 \\ 4 & 6-2x & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}=4$，則 $\begin{vmatrix} 2 & 3-x & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1-x & -1 & -1 \end{vmatrix}=$

(A) 4 (B) -4 (C) 8 (D) -8。【108(B)】

(D) 7. 坐標空間中，考慮有一個頂點在平面 $z=0$ 上、且有另一個頂點在平面 $z=6$ 上的正立方體。則滿足前述條件的正立方體之邊長最小可能值為

(A) $2\sqrt{6}$ (B) $4\sqrt{2}$ (C) 6 (D) $2\sqrt{3}$。【改自 108 學測】

(A) 8. 設 b_1、b_2、b_3、c_1、c_2 及 c_3 均為實數，若二階行列式 $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}=13$，$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}=7$，$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}=2$，則三階行列式 $\begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 2 & b_2 & c_2 \\ 3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=$ (A) 5 (B) 13 (C) 25 (D) 33。【107(C)】

(D) 9. 求三階行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & 10 & 121 \end{vmatrix}=0$ 所有解的和為何？(A) 11 (B) $\dfrac{34}{3}$ (C) 12 (D) $\dfrac{40}{3}$。

【106(C)】

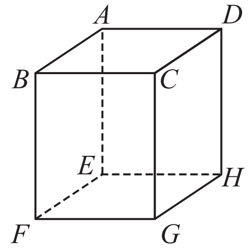
(D) 10. 設 a、b、c 均為實數，若 $(a-b)(b-c)(c-a)=-2$，

則 $\begin{vmatrix} 2a & b & b \\ 6c & 3c & 3b \\ 2c-2a & c-a & c-a \end{vmatrix}$ 之值為何？

(A) -12 (B) -6 (C) 6 (D) 12。【105(C)】

(A) 11. 如右圖所示，$ABCD-EFGH$ 為一長方體。若平面 BDG 上一點 P 滿足 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}+a\overrightarrow{AE}$，則實數 $a=$

(A) $\dfrac{4}{3}$ (B) 2 (C) $\dfrac{3}{2}$ (D) $\dfrac{5}{3}$。【改自 105 學測】



(B) 12. 若行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=2$，則 $\begin{vmatrix} a_1 & c_1+a_1 & b_1-2c_1 \\ a_2 & c_2+a_2 & b_2-2c_2 \\ a_3 & c_3+a_3 & b_3-2c_3 \end{vmatrix}=$

(A) -4 (B) -2 (C) 2 (D) 4。【104(C)】

★(B) 13. 若三階行列式 $\begin{vmatrix} x & 13 & 16 \\ 11 & 14 & 17 \\ 12 & 15 & 18 \end{vmatrix}$ 之值為 3，則三階行列式 $\begin{vmatrix} x+2 & 13 & 16 \\ 11 & 14 & 17 \\ 12 & 15 & 18 \end{vmatrix}$ 之值為？

(A) -9 (B) -3 (C) 3 (D) 9。【統測】