9

指數與對數

雲端教室

課綱即時報

新增	無
刪除	指（對）數方程式、指（對）數不等式

9-1 指數

重點一 指數

1. 指數：

(1) 正整數指數：$a\times a\times\cdots\times a=a^n$（$n$ 個 a 相乘，$n\in\mathbb{N}$），其中 a 稱為底數，n 稱為指數。

(2) 零指數：$a^0=1$，但 0^0 無意義。

(3) 負整數指數：$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$。

(4) 分數指數（$a>0$）：

① $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$

② $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

(5) 指數律：

① $a^m\times a^n=a^{m+n}$

② $\left(a^m\right)^n=a^{m\times n}$

③ $a^n\times b^n=(ab)^n$

觀念補充 //

設 $ab\neq 0$，$\left(\dfrac{b}{a}\right)^{-n}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$。

1 指數化簡

老師講解

若 $2\times\sqrt{2}\times\sqrt[3]{2}=2^r$，試求 $r=$ ？

想法　$a^m\times a^n=a^{m+n}$，且 $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ 。

[答：$\frac{11}{6}$]

解　原式 $=2\times 2^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{1}{3}}=2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=2^{\frac{11}{6}}$

$\therefore\ r=\frac{11}{6}$

學生練習

若 $3^3\times\left(\sqrt[3]{9}\right)^2=3^r$，則 $r=$ ？

[答：$\frac{13}{3}$]

解　原式 $=3^3\times\left(3^{\frac{2}{3}}\right)^2=3^{3+\frac{4}{3}}=3^{\frac{13}{3}}$

$\therefore\ r=\frac{13}{3}$

2 指數律

老師講解

試求下列各式之值：

(1) $\left(\frac{4}{25}\right)^{-1.5}\times(0.25)^{-1.5}$

(2) $\left(\frac{49}{81}\right)^{0.5}\times\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$

想法　$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$，且 $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ 。

[答：(1) 125　(2) $\frac{7}{4}$]

解　(1) 原式 $=\left(\frac{4}{25}\times\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$

$=\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{3}{2}}$

$=\sqrt{25^3}=125$

(2) 原式 $=\left(\frac{7^2}{9^2}\right)^{\frac{1}{2}}\times\left[\left(\frac{3}{2}\right)^3\right]^{\frac{2}{3}}$

$=\frac{7}{9}\times\frac{9}{4}$

$=\frac{7}{4}$

學生練習

試求下列各式之值：

(1) $16^{-0.25}\times(0.0625)^{-\frac{3}{4}}$

(2) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\div(0.4)^2$

[答：(1) 4　(2) $\frac{25}{9}$]

解　(1) 原式 $=16^{-0.25}\times\left[(0.5)^4\right]^{-\frac{3}{4}}$

$=\left(2^4\right)^{-\frac{1}{4}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

$=4$

(2) 原式 $=\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{5}{2}\right)^2$

$=\frac{25}{9}$

3　老師講解　指數運算　學生練習

已知正數 a，滿足 $a^{2x}=5$，

則 $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^{x}+a^{-x}}=$ ？

想法 $(a^3+b^3)=(a+b)(a^2-ab+b^2)$。

[答：$\dfrac{21}{5}$]

解　原式 $=\dfrac{(a^x+a^{-x})(a^{2x}-1+a^{-2x})}{(a^x+a^{-x})}$

$=a^{2x}-1+a^{-2x}$

$=5-1+\dfrac{1}{5}$

$=\dfrac{21}{5}$

若 $a^{2x}=2$，則 $\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^{x}-a^{-x}}=$ ？

[答：$\dfrac{7}{2}$]

解　原式 $=\dfrac{(a^x-a^{-x})(a^{2x}+1+a^{-2x})}{a^x-a^{-x}}$

$=a^{2x}+1+a^{-2x}$

$=2+1+\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{7}{2}$

4　老師講解　求指數次方數　學生練習

試求下列各式中 x 之值：

(1) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-3}=9^{2x+9}$

(2) $(0.2)^{3x-4}=(0.04)^{x-2}$

想法 化成相同底數，再運用指數律。

[答：(1) $x=-3$　(2) $x=0$]

解 (1) 原式 $\Rightarrow$ $3^{-(x-3)}=3^{2(2x+9)}$

$\Rightarrow$ $-x+3=4x+18$

$\Rightarrow$ $x=-3$

(2) 原式 $\Rightarrow$ $(0.2)^{3x-4}=(0.2)^{2(x-2)}$

$\Rightarrow$ $3x-4=2x-4$

$\Rightarrow$ $x=0$

試求下列各式中 x 之值：

(1) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{3-2x}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4+2x}$

(2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1+3x}=(16)^{x-1}$

[答：(1) $x=1$　(2) $x=\dfrac{3}{7}$]

解 (1) 原式 $\Rightarrow$ $2^{-3(3-2x)}=2^{-\frac{1}{2}(4+2x)}$

$\Rightarrow$ $-9+6x=-2-x$

$\Rightarrow$ $x=1$

(2) 原式 $\Rightarrow$ $(2^{-1})^{1+3x}=2^{4(x-1)}$

$\Rightarrow$ $-1-3x=4x-4$

$\Rightarrow$ $x=\dfrac{3}{7}$

C

9

9-1 段落測驗

★表難題

1. 試求下列各式之值：

(1) $(3.2)^{\frac{5}{2}}\times(0.8)^{-\frac{5}{2}}=$ ___32___。

(2) $\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)^{10}\times\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)^{10}=$ ___1___。

2. 設 $a\neq 0$，化簡 $\left[a^{4}\times\left(a^{-2}\right)^{3}\right]^{-4}=$ ___a^{8}___。

3. 設 a、b 為正數，化簡下列各式：

(1) $\left(\sqrt[3]{a}\times\sqrt[4]{a^{-3}}\right)^{-\frac{6}{5}}=$ ___$\sqrt{a}$___。

(2) $\left(a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{6}}\right)^{\frac{3}{2}}\times(ab)^{\frac{1}{4}}=$ ___a___。

4. 化簡 $\dfrac{\sqrt{ab}\times\sqrt[3]{a^{2}b}}{ab^{-1}}=a^{r}b^{s}$，則 $r+s=$ ___2___。

★ 5. 若 $a^{x}+a^{-x}=3$，則 $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^{2x}+a^{-2x}}=$ ___$\dfrac{18}{7}$___。

6. 試求下列各式中 x 之值：

(1) 若 $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{x+3}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x-9}$，則 $x=$ ___1___。

(2) 若 $\left(\sqrt[3]{16}\right)^{3x+6}=\dfrac{32^{x}}{256}$，則 $x=$ ___16___。

7. 「十二平均律」是鋼琴音階的依循規則：每一個音的弦長都是前一個音弦長的 $\dfrac{1}{\sqrt[12]{2}}$ 倍。設第一個音弦長為 1，則第 2 個音弦長為 $1\times\dfrac{1}{\sqrt[12]{2}}$，依此，第 7 個音弦長為 ___$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$___。

8. 已知 $3^{x}=2$，則 $27^{-x}=$ ___$\dfrac{1}{8}$___。

★ 9. 若 $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{8\times\sqrt[5]{64}}=4^{a}$，則 $a=$ ___$\dfrac{19}{20}$___。【統測】

★10. 設 r 為有理數，且 $5^{r}=4\left(\sqrt[3]{40}+\dfrac{\sqrt[3]{5}}{2}\right)^{2}$，則 $r=$ ___$\dfrac{8}{3}$___。【統測】

9-2 指數函數及其圖形

重點一　指數函數及其圖形

1. 指數函數：

規定 $a>0$ 且 $a\neq 1$，則函數 $y=f(x)=a^x$ 就稱以 a 為底數的指數函數。

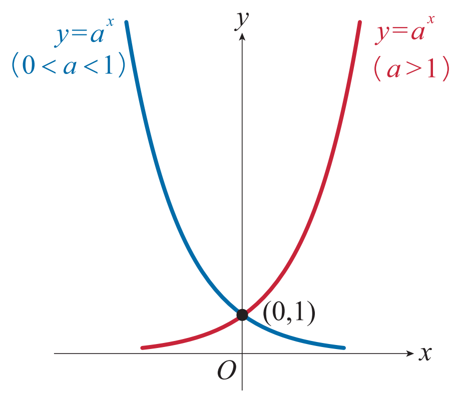
觀念補充 //

當 $a=1$ 時，$y=1^x=1$ 為常數函數，不用討論。
當 $a<0$ 時，無法定義，所以規定 $a>0$ 且 $a\neq 1$。

(1) 定義域：所有實數。

(2) 值域：$y=a^x$ 恆為正數 $\Rightarrow$ $\{y|y>0\}$。

(3) 圖形：指數函數 $y=a^x$ 的圖形如下：



(4) 觀察上圖：

① 其圖形恆過點 $(0,1)$，且分布在 x 軸上方（即 $y=a^x$ 恆為正數）。

② $y=a^x$ 之圖形非常接近 x 軸，但不相交（以 x 軸為漸近線）。

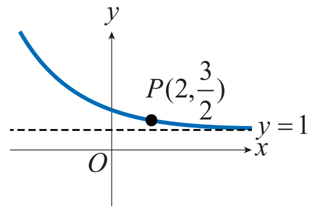
2. 指數函數 $y=a^x$ 之遞增遞減：

當 $a>1$ 時，為遞增函數；當 $0<a<1$ 時，為遞減函數。

1 指數函數圖形

老師講解　　學生練習

右圖是函數 $y=a^x+b$ 之圖形，其中 $y=1$ 為漸近線且點 $P\left(2,\dfrac{3}{2}\right)$ 在圖形上，試求數對 (a,b)。



想法　當 $0<a<1$ 時，$y=a^x$ 為遞減函數，且以 x 軸為漸近線。

[答：$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$]

解　$y-b=a^x$ 之漸近線為 $y-b=0$

與 $y=1$ 相同，得 $b=1$

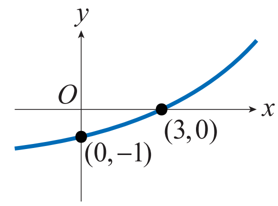
點 $P\left(2,\dfrac{3}{2}\right)$ 代入 $\Rightarrow \dfrac{3}{2}=a^2+1$

$\Rightarrow a^2=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

故數對 $(a,b)=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$

右圖是函數 $y=a^x+b$ 之圖形，已知圖形通過 $(0,-1)$ 與 $(3,0)$ 兩點，試求數對 (a,b)。



[答：$(\sqrt[3]{2},-2)$]

解　點 $(0,-1)$ 代入 $\Rightarrow -1=a^0+b$

$\Rightarrow b=-2$

點 $(3,0)$ 代入 $\Rightarrow 0=a^3-2$

$\Rightarrow a^3=2$

$\Rightarrow a=\sqrt[3]{2}$

故數對 $(a,b)=(\sqrt[3]{2},-2)$

2 指數比大小

老師講解　　學生練習

試比較 $a=\sqrt[3]{9}$，$b=\sqrt[5]{81}$，$c=3$ 的大小。

想法　當 $a>1$ 時，$y=a^x$ 為遞增函數，x 愈大，y 值愈大。

[答：$c>b>a$]

解　$a=\sqrt[3]{9}=9^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{3}}$

$b=\sqrt[5]{81}=81^{\frac{1}{5}}=3^{\frac{4}{5}}$

$c=3^1$

底數 3 是遞增函數

$\because\ 1>\dfrac{4}{5}>\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ c>b>a$

試比較 $a=2$，$b=\sqrt[3]{4}$，$c=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-0.25}$ 的大小。

[答：$a>b>c$]

解　$a=2^1$

$b=\sqrt[3]{4}=2^{\frac{2}{3}}$

$c=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-0.25}=(2^{-2})^{-\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}$

底數 2 是遞增函數

$\because\ 1>\dfrac{2}{3}>\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ a>b>c$

3　老師講解　遞增函數與遞減函數　學生練習

試求滿足 $(0.25)^{x-1} > 8^{1-x}$ 之 x 的範圍。

想法　$y=a^x$，當 $a>1$ 為遞增函數，
當 $0<a<1$ 為遞減函數。

[答：$x>1$]

解　原式 $\Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} > (2^3)^{1-x}$

$\Rightarrow 2^{-2x+2} > 2^{3-3x}$

$\because$ 底數 2 是遞增函數

$\therefore -2x+2 > 3-3x \Rightarrow x>1$

試求滿足 $4^{2-x} < 2^{x-11}$ 之 x 的範圍。

[答：$x>5$]

解　原式 $\Rightarrow 2^{4-2x} < 2^{x-11}$

$\because$ 底數 2 是遞增函數

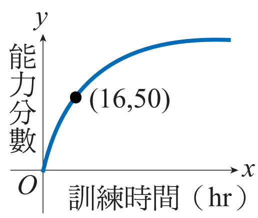
$\therefore 4-2x < x-11$

$\Rightarrow 3x > 15$

$\Rightarrow x > 5$

★4　老師講解　指數函數素養題　學生練習

某游泳訓練機構統計發現，經過 x 小時的訓練，學員掌握游泳技巧的「能力分數」為函數



$f(x)=100\left(1-a^x\right)$，其中 a 是常數，圖是 $y=f(x)$ 的部分圖形。當能力分數為 75 時，表示此學員可以游完 100 公尺的距離，試問一名學員應接受幾小時的訓練，才能游完 100 公尺？

想法　指數函數的應用。

[答：32 小時]

解　$\because$ 函數圖形通過點 $(16,50)$

$\therefore$ 將其代入函數得 $50=100\left(1-a^{16}\right)$

$\Rightarrow a^{16}=0.5 \Rightarrow a=0.5^{\frac{1}{16}}$

即函數 $f(x)=100\left(1-0.5^{\frac{x}{16}}\right)$

若 $f(x)=75 \Rightarrow 75=100\left(1-0.5^{\frac{x}{16}}\right)$

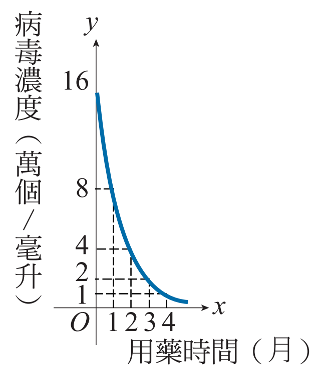
$\Rightarrow 0.5^{\frac{x}{16}}=0.25=(0.5)^2$

$\Rightarrow \frac{x}{16}=2$

$\Rightarrow x=32$

因此學員應該接受 32 小時的訓練才能游完 100 公尺

右圖為某種病毒在血液中的濃度 y（萬個／毫升）與用藥時間 x（月）的關係圖。設其關係為指數函數 $y=k\times a^x$，k 是常數，試求當



$x=\frac{5}{2}$ 時病毒在血液中之濃度。

[答：$2\sqrt{2}$ 萬個／毫升]

解　當 $x=0$ 時，$y=16$

則 $y=k\times a^0=16 \Rightarrow k=16$

當 $x=1$ 時，$y=8$

則 $y=16\times a^1=8 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$

故可得此函數為 $y=16\times\left(\frac{1}{2}\right)^x$

當 $x=\frac{5}{2}$ 時代入

$\Rightarrow y=16\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}=2^4\times 2^{-\frac{5}{2}}$

$=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$（萬個／毫升）

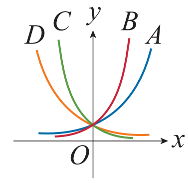
9-2 段落測驗

★表難題

1. 設 $a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt[4]{27}$，$c=\sqrt{3\sqrt{3}}$，$d=\sqrt[6]{9}$，則 a、b、c、d 之大小順序為 $\underline{\ b=c>a>d\ }$。

2. 若 $2^{x-1}>8^{x+1}$，則 x 的範圍為 $\underline{\ x<-2\ }$。

3. 如圖，A、B、C、D 分別為指數函數 $y=a^x$，$y=b^x$，$y=c^x$，$y=d^x$ 的圖形，則 a、b、c、d 的大小關係為 $\underline{\ b>a>d>c\ }$。



4. 設 $A=\sqrt[3]{a^2}$，$B=\sqrt[4]{a^3}$，$C=\sqrt[5]{a^4}$，若 $0<a<1$，則 A、B、C 三數的大小關係為 $\underline{\ A>B>C\ }$。

5. 圖㈠為指數函數 $y=a^x$ 的圖形，其中 $0<a<1$，則 $c=\underline{\ -4\ }$。

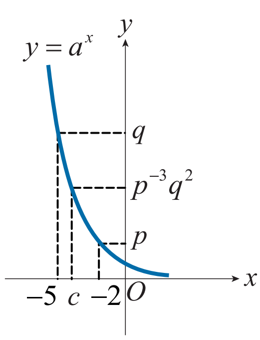
★ 6. 圖㈡為 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的圖形，設 P、Q 分別為直線 $y=\frac{3}{2}$，$y=3$ 與 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的交點，則線段 $\overline{PQ}$ 的長度為 $\underline{\ \frac{\sqrt{13}}{2}\ }$。

★ 7. 蛋糕從 210°C 的烤箱拿出來放在 30°C 的室溫下，經過 t 分鐘後的溫度 T°C 符合牛頓提出的冷卻定律，公式為 $T=h+(H-h)\times a^{-t}$，其中 $a>0$ 為蛋糕的冷卻係數。已知 4 分鐘後測量蛋糕溫度為 50°C，則蛋糕的冷卻係數為 $\underline{\ \sqrt{3}\ }$。（提示：$h=30$，$H=210$）

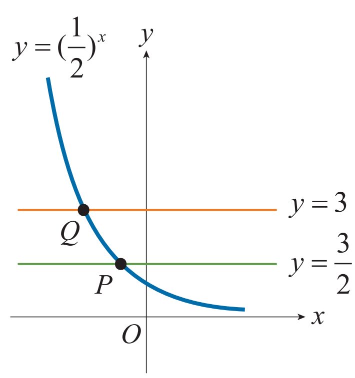
★ 8. 假設在實驗室中有一群果蠅，其數量為依指數成長的函數：$f(t)=r\times 5^{kt}$，t 表天數，r、k 為常數。已知在第 2 天之後有 150 隻，在第 4 天之後有 450 隻，則在開始實驗時有 $\underline{\ 50\ }$ 隻果蠅。

9. 小新以保溫杯的保溫效果為研究專題，他發現保溫杯隨著時間 (x) 不同，溫度 (y) 會呈曲線下降，如圖㈢。若假設其數學模型為指數函數 $y=c\times a^x$，其中 c、a 為常數。則 a、c 之值分別為 $\underline{\ 2^{-\frac{1}{12}}\ }$、$\underline{\ 100\ }$。

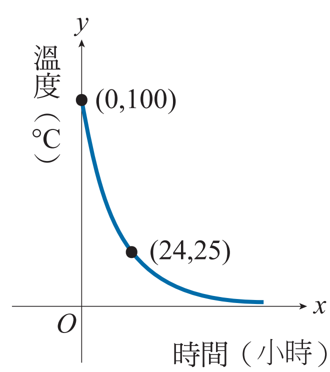
★10. 若 $a=(0.7)^{\frac{1}{3}}$，$b=(0.49)^{\frac{1}{5}}$，$c=(0.343)^{\frac{1}{7}}$，則 a、b、c 之大小順序為 $\underline{\ a>b>c\ }$。【統測】



圖㈠



圖㈡



圖㈢

9-3 對數

重點一　對數

1. **對數的定義：**

規定 $a>0$ 且 $a\neq 1$，當 $a^x=b$（$b>0$），用符號 $\log_a b$ 來表示 x，其中 a 為底數，b 為真數。

2. **指數與對數的互逆性質：**

$a^x=b \quad \Leftrightarrow \quad x=\log_a b$

(1) $\log_a 1=0$　(2) $\log_a a=1$　(3) $\log_a a^x=x$　(4) $a^{\log_a b}=b$。

觀念補充 //

對數的底數與真數有其限制，下列是沒有意義的符號，例如：

$\log_1 5$（底不可為 1），$\log_0 5$（底不可為 0），$\log_{-5} 1$（底不可為負），

$\log_2(-5)$（真數不可為負），$\log_2 0$（真數不可為 0）。

3. **對數的運算性質：**

(1) $\log_a A+\log_a B=\log_a(A\times B)$。例如：$\log_2 8+\log_2 4=\log_2(8\times 4)=\log_2 32$。

(2) $\log_a A-\log_a B=\log_a\left(\dfrac{A}{B}\right)$。例如：$\log_2 8-\log_2 4=\log_2\left(\dfrac{8}{4}\right)=\log_2 2$。

(3) $\log_a A^n=n\times\log_a A$。

(4) 換底公式：$\log_a A=\dfrac{\log_b A}{\log_b a}$。例如：$\log_4 8=\dfrac{\log_2 8}{\log_2 4}$。

(5) $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$。

(6) 連鎖原理：$\log_a b\times\log_b c\times\log_c d=\log_a d$。

(7) $\log_{a^n} A^m=\dfrac{m}{n}\log_a A$。

觀念補充 //

對數相加：$\log_{10}2+\log_{10}3=\log_{10}(2\times 3)=\log_{10}6$。

對數相減：$\log_{10}2-\log_{10}3=\log_{10}\dfrac{2}{3}$。

對數相乘：$\log_{10}2\times\log_{10}3=$照做，只能 0.3010×0.4771。

對數相除：$\log_{10}2\div\log_{10}3=\dfrac{\log_{10}2}{\log_{10}3}=$想到反換底$=\log_3 2$。

1 老師講解　求對數值　學生練習

設 $\log_{\frac{1}{4}} x = -0.25$，試求 $\log_x 2 =$ ？

想法　$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$。

[答：2]

解　原式

$$\Rightarrow x = \left(\frac{1}{4}\right)^{-0.25} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}}$$

$$= \left(2^{-2}\right)^{-\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2}$$

$$\therefore \log_x 2 = \log_{\sqrt{2}} 2 = 2$$

設 $\log_4 2\sqrt{2} = x$，試求 $\log_x \frac{4}{3} =$ ？

[答：-1]

解　原式

$$\Rightarrow \log_4 2\sqrt{2} = x$$

$$\Rightarrow 4^x = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 2^{2x} = 2^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \log_x \frac{4}{3} = \log_{\frac{3}{4}} \frac{4}{3} = -1$$

2 老師講解　對數運算　學生練習

試求 $\log_{10}\frac{5}{3} + \log_{10}6 + \log_7 \frac{1}{49}$ 之值。

想法　$\log_a A + \log_a B = \log_a (A \times B)$。

[答：-1]

解　原式 $= \log_{10}\left(\frac{5}{3} \times 6\right) + \log_7 7^{-2}$

$$= \log_{10} 10 + (-2)$$

$$= -1$$

試求 $\log_5 \frac{7}{5} - \log_5 35 + \log_{\frac{1}{2}} 8$ 之值。

[答：-5]

解　原式 $= \log_5\left(\frac{7}{5} \div 35\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

$$= \log_5 \frac{1}{25} + (-3)$$

$$= -5$$

3 對數運算

老師講解

試求 $\log_{10}4-\dfrac{1}{2}\log_{10}25+2\log_{10}\sqrt{125}$ 之值。

想法 $\log_a A-\log_a B=\log_a\left(\dfrac{A}{B}\right)$，

且 $\log_a A^n=n\times\log_a A$ 。

[答：2]

解 原式 $=\log_{10}4-\log_{10}25^{\frac{1}{2}}+\log_{10}\left(\sqrt{125}\right)^2$

$=\log_{10}4-\log_{10}5+\log_{10}125$

$=\log_{10}\left(\dfrac{4\times125}{5}\right)$

$=\log_{10}100$

$=2$

學生練習

試求 $\log_5 15+2\log_5 75-3\log_5 3$ 之值。

[答：5]

解 原式 $=\log_5 15+\log_5 75^2-\log_5 3^3$

$=\log_5\left(\dfrac{15\times75^2}{3^3}\right)$

$=\log_5 5^5$

$=5$

4 對數與指數之互逆性質

老師講解

試求 $5^{\log_5 2}+3^{2\log_3 5}$ 之值。

想法 $a^{\log_a b}=b$ 。

[答：27]

解 原式 $=5^{\log_5 2}+3^{\log_3 5^2}$

$=2+5^2$

$=27$

學生練習

試求 $2^{\frac{\log_5 3}{\log_5 2}}$ 之值。

[答：3]

解 原式 $=2^{\log_2 3}$

$=3$

5 老師講解 對數表法綜合應用 學生練習

若 $a=\log_{10}2$，$b=\log_{10}3$， 試以 a、b 表示 $\log_{10}\sqrt{15}$ 。

想法 $\log_a A+\log_a B=\log_a(A\times B)$，
$\log_a A^n=n\times\log_a A$ 。

[答：$\frac{1}{2}(b+1-a)$]

解 $$\log_{10}\sqrt{15}=\log_{10}15^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_{10}15$$
$$=\frac{1}{2}\left(\log_{10}3+\log_{10}5\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\log_{10}3+\log_{10}\left(\frac{10}{2}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}(b+1-a)$$

若 $a=\log_5 2$，$b=\log_5 3$，試以 a、b 表示 $\log_5 90$。

[答：$a+2b+1$]

解 $$\log_5 90=\log_5\left(2\times5\times3^2\right)$$
$$=\log_5 2+1+2\log_5 3$$
$$=a+2b+1$$

★ 6 老師講解 對數運算 學生練習

試求 $\left(\log_3 4+\log_9 2\right)\left(\log_2 3+\log_4 9\right)$之值。

想法 $\log_a A+\log_a B=\log_a(A\times B)$，
$\log_a A^n=n\times\log_a A$ 。

[答：5]

解 原式 $$=\left(2\log_3 2+\frac{1}{2}\log_3 2\right)\left(\log_2 3+\log_2 3\right)$$
$$=\left(\frac{5}{2}\log_3 2\right)\left(2\log_2 3\right)$$
$$=5$$

試求 $\left(\log_2 5+\log_4 25\right)\left(\log_5 2+\log_{25}0.5\right)$ 之值。

[答：1]

解 原式
$$=\left(\log_2 5+\log_2 5\right)\left[\log_5 2+\left(-\frac{1}{2}\log_5 2\right)\right]$$
$$=\left(2\log_2 5\right)\left(\frac{1}{2}\log_5 2\right)$$
$$=1$$

9-3 段落測驗

★表難題

1. 試求下列各式之值：

(1) 若 $\log_{x-3}6=\frac{1}{2}$，則 $x=$ ___39___。

(2) 若 $\log_x 9\sqrt{3}=5$，則 $x=$ ___$\sqrt{3}$___。

2. $\log_9\frac{1}{3}-\log_{\frac{1}{2}}8+\log_{25}\frac{1}{5}=$ ___2___。

3. $\log_4 32+\log_{\sqrt{3}}27+\log_2 6+\log_2\frac{128}{3}=$ ___$\frac{33}{2}$___。

4. $\log_3 7-\log_3 63+\log_3 4-\log_3\frac{4}{27}=$ ___1___。

5. 設 $\log_{10}3=a$，$\log_{10}11=b$，試以 a、b 表示：

(1) $\log_{10}9.9=$ ___$2a+b-1$___。

(2) $\log_{10}\frac{27}{11}=$ ___$3a-b$___。

6. $3^{\log_3 8}+10^{2\log_{10}3}=$ ___17___。

7. $\dfrac{\log_5\sqrt{2}\times\log_7 9}{\log_5\left(\frac{1}{3}\right)\times\log_7\sqrt[3]{4}}=$ ___$-\frac{3}{2}$___。　【統測】

8. 已知 $a>0$，$b>0$，$a\neq 1$。若 $a^5=b^3$，則 $\log_a b=$ ___$\frac{5}{3}$___。　【統測】

9. $\log_2\left(\log_{10}\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}\right)$ 可化為 ___-3___。　【統測】

★10. 設 a、b、c 均為異於 1 的正數，且滿足 $abc=1$，則 $\log_a b+\log_a c+\log_b c+\log_b a+\log_c b+\log_c a$ 之值為 ___-3___。　【統測】

9-3 高手過招

1. 已知 $x>0$，$y>0$，若 $x+y=4$，則 $\log_4 x+\log_4 y$ 之最大值為 ___1___。

2. $(\log_{10}30)^3-(\log_{10}3)^3-\log_{10}30\times\log_{10}27=$ ___1___。

9-4 對數函數及其圖形

重點一 對數函數

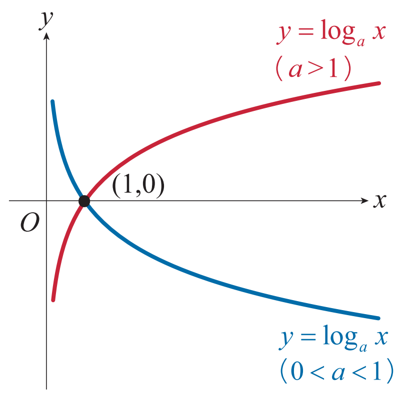
1. 對數函數：

令 $y=f(x)=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$），稱以 a 為底數，x 為真數的對數函數。

(1) 定義域：所有正實數，即真數 $x>0$。

(2) 值域：所有實數，即 $\left\{y \middle| y\in\mathbb{R}\right\}$。

(3) 圖形：



(4) 觀察上圖：

① 其圖形恆過點 $(1,0)$，且分布在 y 軸右方。

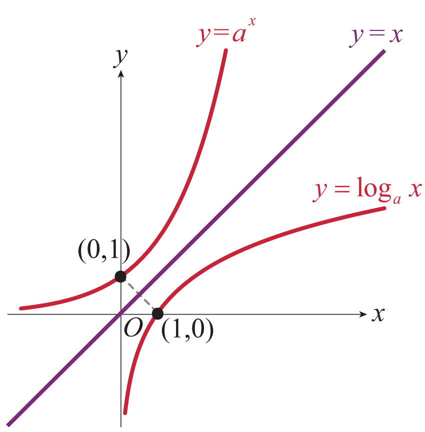
② $y=\log_a x$ 之圖形非常接近 y 軸，但不相交（以 y 軸為漸近線）。

2. 對數函數 $y=\log_a x$ 之遞增遞減：

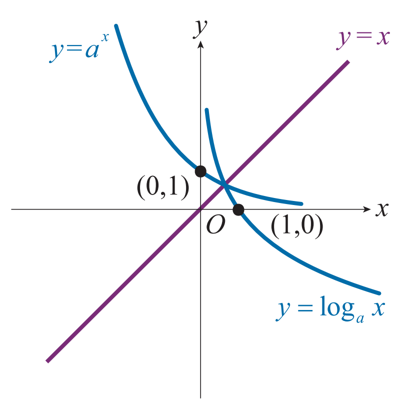
當 $a>1$ 時，為遞增函數；當 $0<a<1$ 時，為遞減函數。

3. 對數函數與指數函數圖形對稱於直線 $x=y$。

(1) $a>1$



(2) $0<a<1$



1 對數的基本性質

老師講解　　學生練習

試求 x 的範圍使對數 $\log_x(4-x^2)$ 有意義。

想法　對數有意義需滿足底數 >0 且底數 $\neq 1$，真數 >0。

[答：$0<x<2$，但 $x\neq 1$]

解　底數 >0 且底數 $\neq 1$ $\Rightarrow$ $x>0$ 且 $x\neq 1$

真數 >0 $\Leftrightarrow$ $4-x^2>0$

$\Rightarrow$ $x^2-4<0$

$\Rightarrow$ $(x+2)(x-2)<0$

$\Rightarrow$ $-2<x<2$

綜合上述取 $0<x<2$，但 $x\neq 1$

若對數 $\log_x(x^2-2x-8)$ 有意義，則 x 之範圍為何？

[答：$x>4$]

解　底數 >0 且底數 $\neq 1$ $\Rightarrow$ $x>0$ 且 $x\neq 1$

真數大於 0 $\Leftrightarrow$ $x^2-2x-8>0$

$\Rightarrow$ $(x+2)(x-4)>0$

$\Rightarrow$ $x>4$ 或 $x<-2$

綜合上述取 $x>4$

2 對數比較大小

老師講解　　學生練習

若 $a=\log_{\sqrt{2}}2$，$b=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{3}$，

$c=\log_{\sqrt{2}}\frac{9}{4}$，試比較 a、b、c 之大小。

想法　當 $a>1$ 時，$y=\log_a x$ 為遞增函數。

[答：$c>a>b$]

解　底數 $\sqrt{2}>1$，為遞增函數

$\because$ $\frac{9}{4}>2>\sqrt{3}$

$\therefore$ $c>a>b$

若 $a=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{3}$，$b=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{3}$，

$c=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}3$，試比較 a、b、c 之大小。

[答：$a>b>c$]

解　底數 $\frac{1}{\sqrt{2}}<1$，為遞減函數

$\because$ $3>\sqrt{3}>\frac{1}{3}$

$\therefore$ $a>b>c$

3 遞增函數與遞減函數

老師講解

試求滿足不等式 $\log_3(2x-3)>\log_3(6-x)$ 之 x 的範圍。

想法 當 $a>1$ 時，$y=\log_a x$ 為遞增函數。

[答：$3<x<6$]

解 檢查對數有意義條件：真數大於 0

$\Rightarrow$ $2x-3>0$ 且 $6-x>0$

$\Rightarrow$ $\frac{3}{2}<x<6$……①

因底數 $3>1$，為遞增函數

再比較真數：$2x-3>6-x$

$\Rightarrow$ $3x>9$

$\Rightarrow$ $x>3$……②

由 ①② 得 $3<x<6$

學生練習

試求滿足不等式 $\log_2(3x-1)>\log_2(4-2x)$ 之 x 的範圍。

[答：$1<x<2$]

解 檢查對數有意義條件：真數大於 0

$\Rightarrow$ $3x-1>0$ 且 $4-2x>0$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{3}<x<2$……①

因底數 $2>1$，為遞增函數

再比較真數：$3x-1>4-2x$

$\Rightarrow$ $5x>5$

$\Rightarrow$ $x>1$……②

由 ①② 得 $1<x<2$

★ 4 對數函數素養題

老師講解

目前國際使用芮氏規模來表示地震強度，設 $E(r)$ 為地震芮氏規模 r 時震央所釋放出來的能量，r 與 $E(r)$ 的關係如下：$\log_{10}E(r)=5.24+1.44r$（單位：焦耳）。某次地震其芮氏規模為 4，試問其震央所釋放的能量 $E(4)$ 為何？

想法 對數函數的應用。

[答：10^{11} 焦耳]

解 $\log_{10}E(4)=5.24+1.44\times 4$

$=11$

$\Rightarrow$ $E(4)=10^{11}$（焦耳）

學生練習

聲音的強度是用每平方公尺多少瓦特（W/m^2）來衡量，一般人能感覺出聲音的最小強度為 $I_0=10^{-12}$（W/m^2），當測得的聲音強度為 I（W/m^2）時，所產生的噪音分貝數 d 為 $d(I)=10\times\log_{10}\frac{I}{I_0}$。棒球比賽場中，若一支瓦斯汽笛獨鳴，測得的噪音為 70 分貝，則百支瓦斯汽笛同時同地合鳴，被測得的噪音大約為多少分貝？

[答：90 分貝]

解 $\because$ 一支瓦斯汽笛獨鳴

測得的噪音為 70 分貝

$\therefore$ $70=10\times\log_{10}\frac{I}{10^{-12}}$

$\Rightarrow$ $I=10^{-5}$（W/m^2）

因此 100 支瓦斯汽笛聲音強度為

$100\times 10^{-5}=10^{-3}$（$W/m^2$）

故 100 支瓦斯汽笛的分貝數為

$d=10\times\log_{10}\frac{10^{-3}}{10^{-12}}=10\times 9=90$（分貝）

9-4 段落測驗

★表難題

1. 若 $\log_{10}(x^2-6x-7)$ 有意義，則 x 的範圍為 $x>7$ 或 $x<-1$ 。

2. 試求滿足不等式 $\log_4(8-x)<\log_4(2x-1)$ 之 x 範圍為 $3<x<8$ 。

3. 試比較下列各數的大小：$\log_{0.5}\dfrac{1}{3}$、$\log_{0.5}2$、$\log_{0.5}\dfrac{1}{5}$、$\log_{0.5}4$。

   $\log_{0.5}\dfrac{1}{5}>\log_{0.5}\dfrac{1}{3}>\log_{0.5}2>\log_{0.5}4$ 。

4. 已知 $a=2^{\log_2 4}$，$b=8^{\frac{1}{2}}$，$c=\log_2 10$，則此三數的大小關係為 $a>c>b$ 。 【統測】

5. 圖 (一) 為 $y=\log_2 x$，$y=\log_a x$，$y=\log_b x$，$y=\log_c x$ 四個函數的圖形，比較 2、a、b、c 四數的大小關係為 $2>a>c>b$ 。

★ 6. 已知函數 $y=\log_a(x-1)$ 的圖形通過 $(b,0)$、$(3,-1)$、$(9,c)$ 三點，如圖 (二) 所示，則 $a+b+c=$ $-\dfrac{1}{2}$ 。

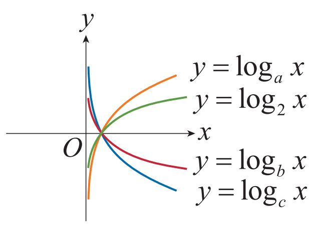


圖 (一)

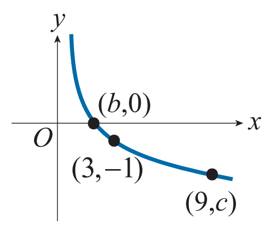


圖 (二)

★ 7. 已知當「環境照度」為 x 勒克斯時，眼睛對於環境的「亮度感覺」為函數 $f(x)=a\log_2 x$，其中 a 是常數。圖 (三) 是 $y=f(x)$ 的部分圖形，則 $a=$ $\log_{10}2$ 。

★ 8. 圖 (四) 為 $y=\log_2 x$ 的圖形，設 P、Q 分別為直線 $y=3$，$y=2$ 與 $y=\log_2 x$ 的交點，則 $\overline{PQ}=$ $\sqrt{17}$ 。

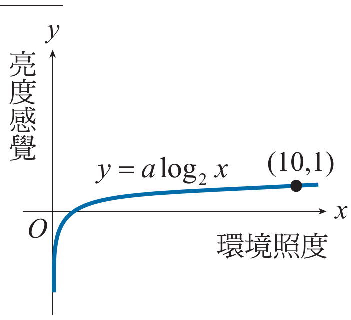


圖 (三)

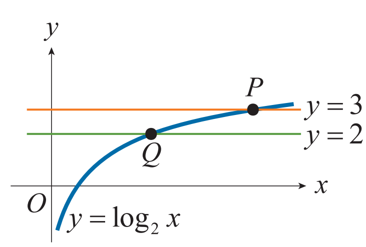


圖 (四)

★ 9. 函數 $f(x)=a+\log_b x$ 圖形通過點 $(1,2)$，其對稱於 $y=x$ 的函數 $y=h(x)$ 的圖形通過 $(4,16)$，則 $a=$ 2 ，$b=$ 4 。

10. 不等式 $\log_{\frac{2}{3}}(2x-8)>1+\log_{\frac{2}{3}}(x+6)$ 的解為 $4<x<9$ 。 【統測】

9-5 常用對數及其應用

重點一 常用對數

1. 常用對數：

以 10 為底的對數稱為常用對數，底數 10 可省略不寫，例如：$\log_{10} x = \log x$。

觀念補充 //

常用尾數數值：

$\log 2 = 0.3010$，

$\log 3 = 0.4771$（用 $\log 2$、$\log 3$ 推出其他數值）

$\log 4 = 2\log 2 = 0.6020$，

$\log 5 = \log\left(\dfrac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 = 0.6990$

$\log 6 = \log 2 + \log 3 = 0.7781$，

$\log 8 = 3\log 2 = 0.9030$，

$\log 9 = 2\log 3 = 0.9542$

2. 科學記號表示法：

任意正數 a，化成 $a = b \times 10^n$（n 是整數，且 $1 \le b < 10$），稱科學記號表示法。

將 a 表成 $b \times 10^n$ 後，取常用對數：$\log a = n + \log b$（$0 \le \log b < 1$，故 $\log b$ 必為正），其中 n 稱為首數，$\log b$ 稱為尾數。

觀念補充 //

設 $\log y = -3.3010 = (-3) + (-0.3010)$（尾數為負不合），須改成：

$\log y = -3.3010 = (-4) + 0.6990$，

得首數為 -4，尾數為 0.6990，為方便我們寫成 $\overline{4}.6990$。

3. 首數的性質：對數 = 首數 + 尾數（n 為非負整數）

(1) 首數為 n，則原數的整數部分有 $n + 1$ 位數。

(2) 首數為 $-n$，則原數為正純小數且自小數點後第 n 位數開始不為 0。

1 老師講解 首數與尾數 學生練習

若 $\log 2.34=0.3692$，試求：

(1) $\log 234000$ 的首數與尾數。

(2) $\log 0.000234$ 的首數與尾數。

想法 對數＝首數＋尾數 $\Rightarrow$ $\log a=n+\log b$ 。

[答：(1) 首數 $=5$，尾數 $=0.3692$

(2) 首數 $=-4$，尾數 $=0.3692$]

解 (1) $\log 234000=\log(2.34\times 10^5)$

$=\log 2.34+5$

$=5+0.3692$

其首數 $=5$，尾數 $=0.3692$

(2) $\log 0.000234=\log(2.34\times 10^{-4})$

$=-4+\log 2.34$

$=-4+0.3692$

其首數 $=-4$，尾數 $=0.3692$

若 $\log 358=2.554$，試求：

(1) $\log 35800$ 的首數與尾數。

(2) $\log 0.00358$ 的首數與尾數。

[答：(1) 首數 $=4$，尾數 $=0.554$

(2) 首數 $=-3$，尾數 $=0.554$]

解 $\log 358=\log(3.58\times 10^2)$

$=\log 3.58+2$

$=2.554$

$\therefore$ $\log 3.58=0.554$

(1) $\log 35800=\log(3.58\times 10^4)$

$=4+\log 3.58$

$=4+0.554$

其首數 $=4$，尾數 $=0.554$

(2) $\log 0.00358=\log(3.58\times 10^{-3})$

$=-3+\log 3.58$

$=-3+0.554$

其首數 $=-3$，尾數 $=0.554$

2 老師講解 首數為正求真數位數 學生練習

若 $\log 2=0.3010$，$\log 3=0.4771$，則 6^{30} 是幾位數？

想法 對數之首數為 n， 則原數的整數部分有 $n+1$ 位數。

[答：24 位數]

解 將 6^{30} 取常用對數

$\log 6^{30}=30\log 6$

$=30(\log 2+\log 3)$

$=30\times(0.3010+0.4771)$

$=30\times 0.7781$

$=23.343$

首數 $=23$，故 6^{30} 是 24 位數

若 $\log 7=0.8451$，則 7^{50} 是幾位數？

[答：43 位數]

解 將 7^{50} 取常用對數

$\log 7^{50}=50\log 7$

$=50\times 0.8451$

$=42.255$

首數 $=42$，故 7^{50} 為 43 位數

3 老師講解　首數為負求真數之小數位數　學生練習

若 $\log 2 = 0.3010$，試求 $\left(\frac{1}{4}\right)^{25}$ 自小數點後第幾位開始不為 0 ？

想法　對數之首數為 $-n$，則原數為純小數且自小數點後第 n 位數開始不為 0。

[答：第 16 位]

解　將 $\left(\frac{1}{4}\right)^{25}$ 取常用對數

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{1}{4}\right)^{25} &= 25 \times \log\frac{1}{4}\\ &= 25 \times (-2\log 2)\\ &= (-50) \times 0.3010\\ &= -15.05\\ &= -16 + 0.95\end{aligned}$$

首數 $= -16$

故 $\left(\frac{1}{4}\right)^{25}$ 自小數點後第 16 位開始不為 0

若 $\log 3 = 0.4771$，試求 $\left(\frac{1}{9}\right)^{20}$ 自小數點後第幾位開始不為 0 ？

[答：第 20 位]

解　將 $\left(\frac{1}{9}\right)^{20}$ 取常用對數

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{1}{9}\right)^{20} &= \log(3^{-2})^{20}\\ &= -40\log 3\\ &= (-40) \times 0.4771\\ &= -19.0840\\ &= -20 + 0.916\end{aligned}$$

首數 $= -20$

故 $\left(\frac{1}{9}\right)^{20}$ 自小數點後第 20 位開始不為 0

★ 4 老師講解　常用對數之應用　學生練習

已知 $\log 2 = 0.3010$，若自然數 n 使 $2^n > 10^7$，則 n 之最小值為何？

想法　不等式 $2^n > 10^7$ 兩邊取常用對數。

[答：24]

解　不等式兩邊取常用對數 $\log 2^n > \log 10^7$

$\Rightarrow n \times \log 2 > 7$

$\Rightarrow n > \frac{7}{0.3010} \fallingdotseq 23.3$

故 n 取 24

已知 $\log 3 = 0.4771$，若 $\left(\frac{1}{3}\right)^n < 10^{-4}$，試求最小整數 n。

[答：9]

解　不等式兩邊取常用對數

$\log\left(\frac{1}{3}\right)^n < \log 10^{-4}$

$\Rightarrow n \times \left(\log\frac{1}{3}\right) < -4$

$\Rightarrow n \times (-0.4771) < -4$

$\Rightarrow n > \frac{4}{0.4771} \fallingdotseq 8.4$

故 n 取 9

9-5 段落測驗

★表難題

1. 若 $\log 3 = 0.4771$，則 3^{40} 是 20 位數。

2. 若 $\log 3 = 0.4771$，則 $\left(\frac{1}{3}\right)^{30}$ 自小數點後第 15 位開始不為 0。

3. 下列何者與 $\log 1 + \log 2 + \log 3 + \log 4 + \log 5 - \log 6$ 的值最為接近？ B
（已知 $\log 2$ 的值約為 0.301，而 $\log 3$ 的值約為 0.4771）
(A) 0.1 (B) 1.5 (C) 5.3 (D) 6.2。 【統測】

4. 已知 $\log 3.49 = 0.5428$，若 $\log A = 3.5428$，$\log B = -1.4572$，則 A、B 的值分別為 3490 、 0.0349 。

★ 5. 已知 $\log 2 = 0.3010$，$\log 3 = 0.4771$，則滿足 $\left(\frac{9}{8}\right)^{n} > 40$ 之最小自然數 $n =$ 32 。

★ 6. 阿財在股票市場裡買進賣出頻繁，假設每星期結算都損失該星期初資金的 10%。經過一段時間，阿財發現資金總損失已超過原始資金的 $\frac{1}{2}$，則阿財進出股票市場至少 7 個星期。（已知 $\log2 \doteqdot 0.3010$，$\log3 \doteqdot 0.4771$）

7. 已知 $\log2 \doteqdot 0.3010$，$\log3 \doteqdot 0.4771$
(1) $\log 1.5 =$ 0.1761 。（不必四捨五入）
(2) $(1.5)^{60}$ 的整數部分是幾位數？ 11

★ 8. 有一個城市的人口，每過一年就增加原來人口數的 10%。若依此速度增加下去， 12 年後此城市的人口會超過原來人口數的 3 倍。（已知 $\log3 \doteqdot 0.4771$，$\log11 \doteqdot 1.0414$）

★ 9. 今有厚度為 0.05mm 的大張紙，假設可以對折 20 次，那麼對折後其厚度將超過 52 公尺。（取最大整數值）（已知 $\log5.236 \doteqdot 0.719$）

★ 10. 半衰期是指某種放射性物質衰變至原來數量一半所需的時間。已知碳 14 的半衰期約為 5700 年，在非洲挖出一史前人類骨頭，其碳含量相當於正常含量的 $\frac{1}{10}$，則此骨頭所在年代距今約為 18937 年。（四捨五入計算至整數年，$\log2 \doteqdot 0.3010$）

9-5 高手過招

1. 試求 $N = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{99}$ 是幾位數？ 31

題目

在大於 1 的自然數中，除了 1 和本身外，無法被其他自然數整除的數稱為質數，質數的個數究竟有幾個，是一個令數學家感到好奇的問題，已知形如 2^n-1 的質數稱為梅森質數，數學家曾利用超級電腦驗證出 $2^{6972593}-1$ 是質數，若想要列印出此質數，大約需要多少張 A4 紙？（設一張 A4 紙可印出 3000 個數字）

關鍵字 $2^{6972593}-1$ 是質數，想要列印出此質數需要多少張 A4 紙

單元公式 常用對數之首數為 n（n 為正整數）
則原數的整數部分有 $n+1$ 位數

翻譯成數學式 試求 $2^{6972593}-1$ 是幾位數？

解題 這一題乍看雖然麻煩，但是有跡可循
抽絲剝繭後可以找到切入點
依題意，即求 $2^{6972593}$ 是幾位數
（減 1 不影響位數，因 $2^{6972593}$ 非 10 的次方數，減 1 不會因借位而少一位）
估算位數我們取常用對數
由 $\log 2^{6972593}=6972593\times\log 2=6972593\times 0.3010$
$\fallingdotseq 7000000\times 0.3=2100000$
（題目不要求精準，不需要硬乘開）
得 $2^{6972593}$ 大約是 2100001 位數
$\dfrac{2100001}{3000}\fallingdotseq 700$
故大約需要用掉 700 張 A4 紙

● **回顧：**解題應該不是只著眼於定理中抽象的公式，而忽略了啟發思想的探索和觸類旁通的領悟。指、對數是高中數學極為重要的環節，其中對數運算縮減了乘除次方數龐大的計算時間，堪稱是數學史上重大的突破。觀察本題融合了基本的常用對數觀念，配合日新月異的數學發現，是很實用的議題。

★表難題

1. 世界的人口數每年不斷地增加，根據聯合國統計，西元 1990 年世界人口總數達 50 億，假設每年新生人口與死亡人口之淨人口數都增加為原來的 r 倍，已知西元 2002 年世界人口數已增至 60 億，則西元 2026 年世界人口數約為多少人？

答：86.4 億

2. 臺灣在黑面琵鷺的保育上有卓越成就，根據資料統計：民國 105 年飛來臺灣的黑面琵鷺數量大約是 1100 隻。假設每年飛來臺灣的黑面琵鷺數量增加為原來的 r 倍，已知民國 109 年飛來臺灣的黑面琵鷺的數量大約是 1650 隻，則試估計民國 113 年飛來臺灣的黑面琵鷺數量大約是多少隻？

答：2475 隻

★ 3. 臺灣的水資源有 50% 都是來自於河川，而水庫占 30%，其餘則是抽取地下水來供應全島的用水。假設甲廠牌經過認證的淨水器，每次過濾水後都可以去除水中 20% 的雜質，若要使水中的雜質降到原來 1% 以下，試求至少要使用甲廠牌濾水器將水重複過濾幾次才行？

答：21 次

4. 海嘯是一種具強大破壞力的海浪，其速度公式為 $v=(12h)^{\frac{1}{2}}$（單位：m/s），其中 h 為海水深度（m）。已知某島國瀕臨平均水深約 3200 m 的印度洋，試求某日因地震而引發之強烈海嘯，其速度為何？

答：$80\sqrt{6}$ m/s

5. DDT 是一種毒性很強的殺蟲劑，於 1970 年代曾普遍應用於農業，由於 DDT 在環境中非常難分解，對環境污染過於嚴重，因此很多國家已禁止使用。經研究發現，若 DDT 被人體吸收後，其毒性需歷經 10 年才可代謝掉原量的一半，假設某人不慎誤食含 DDT 的食物，試問需經過多少整數年，其體內 DDT 含量才會少於原量的 $\frac{1}{100}$？（已知 $\log 2=0.3010$）

答：67 年

高三人的堅持

學習只有經典沒有終點，最壞的時代，最好的自己。完成夢想不是靠嘴巴，是憑雙手，不怕千人阻擋，只怕自己投降。

統測解題影音

★表難題

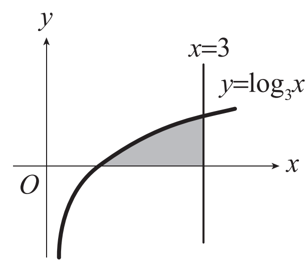
(B) 1. 若 $x = \log_3 7$，則下列何者正確？
(A) $7^x = 3$ (B) $3^x = 7$ (C) $x^7 = 3$ (D) $x^3 = 7$。【111(C)】

(B) 2. 為了響應節能減碳政策，某公司基於成本考量決定在六年後將公司該年二氧化碳排放量降為目前排放量的 50%。公司希望每年依固定的比率 r（當年和前一年排放量的比）逐年降低二氧化碳的排放量。若要達到這項目標，則下列敘述何者正確？（$\log 0.5 \doteqdot -0.301$，$\log 8.91 \doteqdot 0.950$）
(A) $0.91 < r < 0.93$ (B) $0.88 < r < 0.91$ (C) $0.85 < r < 0.88$ (D) $0.82 < r < 0.85$。【111(C)】

(D) 3. 設 $f(x) = \log_3 x$。若 $f(a) = 6$、$f(b) = 2$ 且 $f(c) = 5$，則 $f\left(\dfrac{\sqrt[3]{a} \times b^2}{c}\right) = ？$
(A) 6 (B) 5 (C) 2 (D) 1。【111(B)】

(C) 4. 設 $I(t)$ 為 A 城市某種傳染病在時間 t 的感染率，且 $I(t) = \dfrac{1}{1 + 49\left(7^{\frac{-t}{3}}\right)}$，$t \geq 0$。若 a、b、c 分別表示 $t = 0$、$t = 3$、$t = 6$ 時的感染率，則下列何者正確？
(A) $b = 6a$ (B) $c = 20a$ (C) $c = 4b$ (D) $b = 7a$。【110(C)】

(C) 5. 假設 A 表函數 $y = \log_3 x$ 圖形與直線 $y = 0$、$x = 3$ 所圍區域面積，如圖。若以幾何圖形的觀念來判斷 A 的大小範圍，則下列何者正確？



(A) $0 \leq A < \dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{1}{2} \leq A < 1$ (C) $1 \leq A < 2$
(D) $A \geq 2$。【110(C)】

(C) 6. 若 $a = \log 2$，$b = \log 3$，則 $10^{2a+b} = ？$
(A) 2 (B) 3 (C) 12 (D) 24。【110(B)】

★(C) 7. 保險公司推出躉繳型保單（即於一開始存入一固定本金），且宣告年利率為 3% 的複利，每年計算一次。若某人於 20 歲時，花 10 萬元購買此保單，則當保單價值達 20 萬元時，某人約幾歲？（註：$\log 2 \doteqdot 0.3010$，$\log 1.03 \doteqdot 0.0128$）
(A) 24 (B) 34 (C) 44 (D) 54。【109(C)】

(A) 8. 滿足 $\log_{10-x^2}(x^2 + 3x + 2)$ 有意義的整數 x 共有多少個？
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 7。【109(C)】

(A) 9. 若 $a + a^{-1} = 2$，則 $a^3 + a^{-3} = ？$ (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8。【109(B)】

(C) 10. 2^{1000} 大約等於下列何者？
(A) 10^{100} (B) 10^{200} (C) 10^{300} (D) 10^{400}。【109(B)】

(B) 11. 設$(3^m)^3=729$且$4^{n-m}=\dfrac{1}{256}$，則$m+n=$ (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2。【108(B)】

(D) 12. 若$x=\dfrac{\log_{10}7}{\log_{10}9}$，則$81^x=$ (A) 3 (B) 7 (C) 25 (D) 49。【107(C)】

(C) 13. 設$a=\log_{0.3}0.5$、$b=\log_3 5$、$c=\log_{30}50$，則a、b、c大小順序為何？
(A) $c>b>a$ (B) $b>a>c$ (C) $b>c>a$ (D) $a>b>c$。【107(C)】

(C) 14. 設$a=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$，$b=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$，$c=\left(\dfrac{1}{6}\right)^{\frac{1}{6}}$，則$a$、$b$、$c$大小順序為何？
(A) $a>c>b$ (B) $a>b>c$ (C) $c>a>b$ (D) $b>c>a$。【106(C)】

(C) 15. 已知$\log_{10}3=0.4771$且$x=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{20}$，其中$\log_{10}x$的首數為$m$，而尾數的小數點後第一位數字為$n$，則$m+n=$
(A) -9 (B) -7 (C) -6 (D) -5。【106(C)】

★(D) 16. 求$(\log 2)^2+\log 2\times\log 5+\log 5$的數值。 (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1。【106(B)】

(A) 17. 設$a=(0.1)^{\frac{1}{4}}$，$b=(0.2)^{\frac{1}{4}}$，$c=(0.2)^{\frac{1}{5}}$，則下列何者正確？
(A) $a<b<c$ (B) $c<a<b$ (C) $b<a<c$ (D) $b<c<a$。【105(C)】

(A) 18. 已知$\log_{10}2=p$，$\log_{10}3=q$，求$\log_{\sqrt{6}}36-\log_{\frac{1}{6}}6+\log_6\sqrt{12}$之值為
(A) $5+\dfrac{2p+q}{2p+2q}$ (B) $3+\dfrac{2p+q}{2p+2q}$ (C) $3+\dfrac{2p+q}{2p-2q}$ (D) $5+\dfrac{2p+q}{2p-2q}$。【105(C)】

(C) 19. 已知$A=\left(\dfrac{729}{1000}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\dfrac{27}{343}\right)^{\frac{-1}{3}}+\left(5\dfrac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$，則$A$之值為何？
(A) $\dfrac{79}{100}$ (B) $\dfrac{80}{100}$ (C) $\dfrac{81}{100}$ (D) $\dfrac{82}{100}$。【105(B)】

(A) 20. 已知m、n為整數，若$m\log_{500}5+n\log_{500}\sqrt{2}=1$，則$m+n=$
(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10。【104(C)】

(C) 21. 已知a、b為實數，且$3^a=5$，$5^b=9$，則$ab=$
(A) $\log_{15}45$ (B) $\log_3 5$ (C) 2 (D) 3。【104(C)】

★(A) 22. 設$\left(\dfrac{1}{2}\right)^a=\dfrac{1}{70}$，$\left(\dfrac{1}{4}\right)^b=\dfrac{1}{2500}$，$\left(\dfrac{1}{8}\right)^c=\dfrac{1}{216000}$，則$a$、$b$、$c$三個數的大小關係為何？ (A) $b<c<a$ (B) $c<b<a$ (C) $c<a<b$ (D) $a<b<c$。【103(C)】