8

三角函數的應用

雲端教室

8-1 和差角公式

課綱即時報	
新增	無
刪除	棣美弗定理、複數方根

重點一 和差角公式

1. 和差角公式：

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

(2) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

(3) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

(4) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

(5) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

(6) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

2. 二倍角公式：

(1) 正弦：$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$。

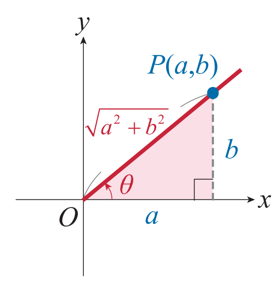
(2) 餘弦：$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=1-2\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1$。

(3) 正切：$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$。

觀念補充 //

❶ $\sin 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$　❷ $\cos 2\theta=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

3. 正、餘弦函數的疊合：



$$f(x)=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)\text{。}$$

（其中 $\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$），如右圖所示。

例如：$\sqrt{3}\sin x+\cos x=\dfrac{2}{2}\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x\right)$

$=2(\cos 30^\circ\sin x+\sin 30^\circ\cos x)=2\sin(x+30^\circ)$

觀念補充 //

若 x 無限制條件時，則 $-\sqrt{a^2+b^2}\le a\sin x+b\cos x\le\sqrt{a^2+b^2}$ 。

若 x 有限制條件時，則先疊合成 $r\sin(x+\theta)$ 之後再決定。

4. 兩直線的夾角：

設直線 L_1 與 L_2 的斜率分別為 m_1、m_2，若兩直線夾角為 θ，則 $\tan\theta=\left|\dfrac{m_1-m_1}{1+m_1m_2}\right|$，另一夾角為 $180^\circ-\theta$。

觀念補充 //

直線夾角公式需直線斜率存在才能代，若斜率不存在代表直線垂直 x 軸，用圖解法處理。

1 老師講解　正餘弦函數之和差角公式　學生練習

試求下列各值：

(1) $\sin 75^\circ$　(2) $\cos 105^\circ$

想法　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$，
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$。

[答：(1) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　(2) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$]

解 (1) $\sin 75^\circ$

$=\sin(45^\circ+30^\circ)$

$=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(2) $\cos 105^\circ$

$=\cos(60^\circ+45^\circ)$

$=\cos 60^\circ\cos 45^\circ-\sin 60^\circ\sin 45^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

試求下列各值：

(1) $\cos 15^\circ$　(2) $\sin 345^\circ$

[答：(1) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　(2) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$]

解 (1) $\cos 15^\circ$

$=\cos(45^\circ-30^\circ)$

$=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(2) $\sin 345^\circ$

$=-\sin 15^\circ=-\sin(45^\circ-30^\circ)$

$=-(\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ)$

$=-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

2 正餘弦函數之和差角公式

老師講解

試求下列各式之值：

(1) $\sin 22^\circ \cos 23^\circ + \cos 22^\circ \sin 23^\circ$

(2) $\cos 130^\circ \cos 10^\circ + \sin 130^\circ \sin 10^\circ$

想法　$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$，
$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)$。

[答：(1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(2) $-\frac{1}{2}$]

解　(1) 原式 $= \sin(22^\circ + 23^\circ)$

$= \sin 45^\circ$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) 原式 $= \cos(130^\circ - 10^\circ)$

$= \cos 120^\circ$

$= -\frac{1}{2}$

學生練習

試求下列各式之值：

(1) $\sin 57^\circ \cos 12^\circ - \cos 57^\circ \sin 12^\circ$

(2) $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) + \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right)$

[答：(1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(2) 1]

解　(1) 原式 $= \sin(57^\circ - 12^\circ)$

$= \sin 45^\circ$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) 原式 $= \sin\left[\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{\pi}{6} - \theta\right)\right]$

$= \sin\frac{\pi}{2}$

$= 1$

★3 正切函數之和差角公式

老師講解

$\triangle ABC$ 中，若 $\tan A = 5$，$\tan B = 2$，試求 $\tan C$ 之值。

想法　$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$。

[答：$\frac{7}{9}$]

解　$\tan C = \tan[180^\circ - (A+B)]$

$= -\tan(A+B)$

$= -\dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \times \tan B}$

$= -\dfrac{5+2}{1-10}$

$= \frac{7}{9}$

學生練習

試求 $\tan 38^\circ + \tan 22^\circ + \sqrt{3}\tan 38^\circ \tan 22^\circ$ 之值。

[答：$\sqrt{3}$]

解　從 $38^\circ + 22^\circ = 60^\circ$ 出發

$\tan 60^\circ = \tan(38^\circ + 22^\circ)$

$= \dfrac{\tan 38^\circ + \tan 22^\circ}{1 - \tan 38^\circ \times \tan 22^\circ}$

$= \sqrt{3}$

$\Rightarrow$ $\tan 38^\circ + \tan 22^\circ + \sqrt{3}\tan 38^\circ \tan 22^\circ$

$= \sqrt{3}$

★ 4 老師講解 **正餘弦函數之和差角公式** 學生練習

已知 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$，若 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\sin\beta=\dfrac{12}{13}$，試求 $\cos(\alpha+\beta)$ 之值。

想法 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$，特別注意象限符號。

[答：$-\dfrac{63}{65}$]

解 $\because\ 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$

$\therefore\ \alpha$ 為第一象限角，β 為第二象限角

且 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}\ \Rightarrow\ \sin\alpha=\dfrac{4}{5}$

$\sin\beta=\dfrac{12}{13}\ \Rightarrow\ \cos\beta=-\dfrac{5}{13}$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}\times\left(-\frac{5}{13}\right)-\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}=\frac{-15-48}{65}=-\frac{63}{65}$$

已知 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$，若 $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\beta=\dfrac{-3}{\sqrt{10}}$，試求 $\alpha+\beta$ 之值。

[答：$\dfrac{7\pi}{4}$]

解 α、β 均為第二象限角

且 $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\ \Rightarrow\ \cos\alpha=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\cos\beta=-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\ \Rightarrow\ \sin\beta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)\times\left(\frac{-3}{\sqrt{10}}\right)-\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{6}{5\sqrt{2}}-\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

又 $\pi<\alpha+\beta<2\pi\quad\therefore\ \alpha+\beta=\dfrac{7\pi}{4}$

5 老師講解 **二倍角公式** 學生練習

設 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$ 且 $\tan\theta<0$，則 $\cos2\theta+\sin2\theta=$ ？

想法 $\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$，$\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=1-2\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1$。

[答：$-\dfrac{17}{25}$]

解 θ 為第二象限角

由 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}\ \Rightarrow\ \cos\theta=-\dfrac{4}{5}$

$\cos2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{7}{25}$

$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\dfrac{3}{5}\times\left(-\dfrac{4}{5}\right)=-\dfrac{24}{25}$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{7}{25}-\dfrac{24}{25}=-\dfrac{17}{25}$

若 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$，$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$，試求 $\sin2\theta+\cos2\theta$ 之值。

[答：$\dfrac{31}{25}$]

解 θ 為第一象限角

由 $\cos\theta=\dfrac{4}{5}\ \Rightarrow\ \sin\theta=\dfrac{3}{5}$

$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{24}{25}$

$\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\dfrac{16}{25}-\dfrac{9}{25}=\dfrac{7}{25}$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{24}{25}+\dfrac{7}{25}=\dfrac{31}{25}$

6　老師講解　二倍角公式　學生練習

若 $0^\circ < \theta < 45^\circ$ 且 $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$，

試求 $\cos 2\theta$ 之值。

想法　$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ 且

$\cos 2\theta = \pm\sqrt{1-\sin^2 2\theta}$。

[答：$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$]

解　$\because$　$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

兩邊平方：

$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \dfrac{4}{3}$

$\Rightarrow$　$1 + \sin 2\theta = \dfrac{4}{3}$

$\Rightarrow$　$\sin 2\theta = \dfrac{1}{3}$

故 $\cos 2\theta = \sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$（取正）

若 $45^\circ < \theta < 90^\circ$ 且 $\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

試求 $\cos 2\theta$ 之值。

[答：$-\dfrac{\sqrt{15}}{4}$]

解　$\because$　$\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

兩邊平方：

$\sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow$　$1 - \sin 2\theta = \dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow$　$\sin 2\theta = \dfrac{1}{4}$

故 $\cos 2\theta = -\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2} = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$（取負）

★ 7　老師講解　正餘弦函數的疊合　學生練習

設 $0 \le x < 2\pi$，$f(x) = \sqrt{2}\sin x + \sqrt{6}\cos x$，

試求當 x 為多少時，$f(x)$ 有最大值，並求其最大值。

想法

$a\sin x + b\cos x$

$= \sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$

$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$

[答：當 $x = \dfrac{\pi}{6}$ 時，$f(x)$ 有最大值，其值為 $2\sqrt{2}$]

解　$f(x) = \sqrt{2}\sin x + \sqrt{6}\cos x$

$= 2\sqrt{2}\left(\sin x \times \dfrac{1}{2} + \cos x \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 2\sqrt{2}\left(\sin x\cos\dfrac{\pi}{3} + \cos x\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$= 2\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

故當 $x = \dfrac{\pi}{6}$ 時

$f(x)$ 有最大值 $2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{2}$

設 $0 \le x < 2\pi$，$f(x) = 3\sin x - \sqrt{3}\cos x$，

試求當 x 為多少時，$f(x)$ 有最小值，並求其最小值。

[答：當 $x = \dfrac{5\pi}{3}$ 時，$f(x)$ 有最小值，

其值為 $-2\sqrt{3}$]

解　$f(x) = 3\sin x - \sqrt{3}\cos x$

$= 2\sqrt{3}\left(\sin x \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \cos x \times \dfrac{1}{2}\right)$

$= 2\sqrt{3}\left(\sin x\cos\dfrac{\pi}{6} - \cos x\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

$= 2\sqrt{3}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

故當 $x = \dfrac{5\pi}{3}$ 時，$f(x)$ 有最小值 $-2\sqrt{3}$

8 老師講解　正餘弦函數疊合求極值　學生練習

試求 $f(x)=5\sin x+12\cos x$ 的最大與最小值。

想法　$-\sqrt{a^2+b^2}\le a\sin x+b\cos x\le\sqrt{a^2+b^2}$ 。

[答：最大值為 13，最小值為 -13]

解　$\because$ $-\sqrt{5^2+12^2}\le 5\sin x+12\cos x\le\sqrt{5^2+12^2}$

$\Rightarrow$ $-13\le 5\sin x+12\cos x\le 13$

$\therefore$ $f(x)$的最大值為 13

最小值為 -13

試求 $f(x)=3\sin x+4\cos x$ 的最大與最小值。

[答：最大值為 5，最小值為 -5]

解　$\because$ $-\sqrt{3^2+4^2}\le 3\sin x+4\cos x\le\sqrt{3^2+4^2}$

$\Rightarrow$ $-5\le 3\sin x+4\cos x\le 5$

$\therefore$ $f(x)$的最大值為 5

最小值為 -5

9 老師講解　兩直線的夾角　學生練習

試求兩直線 $x+4y-1=0$ 與 $3x-5y=0$ 之夾角。

想法　兩直線斜率分別為 m_1、m_2，則兩直線夾角 θ，滿足 $\tan\theta=\left|\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$，另一夾角為 $180^\circ-\theta$ 。

[答：45° 與 135°]

解　$x+4y-1=0 \Rightarrow m_1=-\dfrac{1}{4}$

$3x-5y=0 \Rightarrow m_2=\dfrac{3}{5}$

代夾角公式 $\tan\theta=\left|\dfrac{\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{5}}{1+\left(-\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{3}{5}\right)}\right|=1$

$\Rightarrow$ $\theta=45^\circ$

另一夾角 $=180^\circ-45^\circ=135^\circ$

試求兩直線 $\sqrt{3}x+y+1=0$ 與 $x+\sqrt{3}y-2=0$ 之夾角。

[答：30° 與 150°]

解　$\sqrt{3}x+y+1=0 \Rightarrow m_1=-\sqrt{3}$

$x+\sqrt{3}y-2=0 \Rightarrow m_2=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

代夾角公式

$$\tan\theta=\left|\frac{-\sqrt{3}-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1+\left(-\sqrt{3}\right)\times\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}\right|=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\Rightarrow$ $\theta=30^\circ$

另一夾角 $\theta=180^\circ-30^\circ=150^\circ$

進階例題

10　兩直線夾角之變化題

老師講解

設 a、b 為正數，已知直線 $L：ax+by+1=0$ 過點 $(0,-1)$ 且與 $3x+4y-12=0$ 成 45° 角，試求 $a+3b$。

[答：10]

解　設 L 的斜率為 m

$\tan 45^\circ=\left|\dfrac{m-\left(-\frac{3}{4}\right)}{1+m\times\left(-\frac{3}{4}\right)}\right| \Rightarrow 1=\left|\dfrac{m+\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}m}\right|$

$\Rightarrow 1=\left|\dfrac{4m+3}{4-3m}\right|$

$\Rightarrow 4m+3=\pm(4-3m)$

$\Rightarrow m=\dfrac{1}{7}$（不合）或 -7

即 $m=-\dfrac{a}{b}=-7 \Rightarrow a=7b$……①

又 L 過點 $(0,-1) \Rightarrow 0-b+1=0$……②

由 ①② 解得 $b=1$，$a=7$

$\therefore a+3b=10$

學生練習

設 $a>0$，若 $L_1：2x-y+7=0$ 與 $L_2：ax+y-13=0$ 的夾角為 $\dfrac{\pi}{4}$，則 $a=$ ？

[答：3]

解　L_1 的斜率為 2，L_2 的斜率為 $-a$

依題意 $\tan 45^\circ=\left|\dfrac{2-(-a)}{1+(-2a)}\right|=1$

$\Rightarrow 2+a=\pm(1-2a)$

當 $2+a=1-2a \Rightarrow a=-\dfrac{1}{3}$（不合）

當 $2+a=-(1-2a) \Rightarrow a=3$

11　求三角函數之極值

老師講解

試求 $f(x)=1+\sin 2x+2\cos^2 x$ 之最大值與最小值。

[答：最大值為 $2+\sqrt{2}$，最小值為 $2-\sqrt{2}$]

解　$f(x)=1+\sin 2x+2\times\left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)$

$=\sin 2x+\cos 2x+2$

由疊合公式：$-\sqrt{2}\le \sin 2x+\cos 2x\le\sqrt{2}$

得 $2-\sqrt{2}\le \sin 2x+\cos 2x+2\le 2+\sqrt{2}$

故最大值為 $2+\sqrt{2}$

最小值為 $2-\sqrt{2}$

學生練習

試求 $f(x)=3+\sin 2x-6\sin^2 x$ 之最大值與最小值。

[答：最大值為 $\sqrt{10}$，最小值為 $-\sqrt{10}$]

解　$f(x)=3+\sin 2x-6\times\left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)$

$=\sin 2x+3\cos 2x$

由疊合公式：

$-\sqrt{10}\le \sin 2x+3\cos 2x\le\sqrt{10}$

故最大值為 $\sqrt{10}$

最小值為 $-\sqrt{10}$

8-1 段落測驗

★表難題

1. $\tan 105^\circ =$ $\underline{\quad -2-\sqrt{3} \quad}$。

2. $\cos 67^\circ \cos 53^\circ - \sin 67^\circ \sin 53^\circ =$ $\underline{\quad -\dfrac{1}{2} \quad}$。

3. 已知 α、β 都是銳角，且 $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$，$\sin\beta = \dfrac{7}{25}$，則 $\sin(\alpha+\beta) =$ $\underline{\quad \dfrac{4}{5} \quad}$。

4. $\dfrac{\tan 222^\circ - \tan 87^\circ}{1+\tan 222^\circ \tan 87^\circ} =$ $\underline{\quad -1 \quad}$。

5. 已知 $\tan\alpha = 2$，$\tan\beta = 3$，則 $\tan(\alpha+\beta) =$ $\underline{\quad -1 \quad}$。

6. 設 $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$，且 $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$，試求下列各值：

   (1) $\sin 2\theta =$ $\underline{\quad -\dfrac{24}{25} \quad}$。 (2) $\cos 2\theta =$ $\underline{\quad -\dfrac{7}{25} \quad}$。

★ 7. 設 $f(x) = \cos 2x - \sin x + 1$，則 $f(x)$ 的最大值與最小值之和 $=$ $\underline{\quad \dfrac{9}{8} \quad}$。

8. $f(\theta) = 8\sin 2\theta + 15\cos 2\theta$ 的最大值為 $\underline{\quad 17 \quad}$。

★ 9. 已知 $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$，$\cos\theta = -\dfrac{3}{5}$，則下列大小關係何者正確？$\underline{\quad C \quad}$

   (A) $\cos\theta < \sin 2\theta < \cos 2\theta < \sin\theta$ (B) $\sin 2\theta < \cos 2\theta < \cos\theta < \sin\theta$

   (C) $\sin 2\theta < \cos\theta < \cos 2\theta < \sin\theta$ (D) $\cos\theta < \cos 2\theta < \sin 2\theta < \sin\theta$。 【統測】

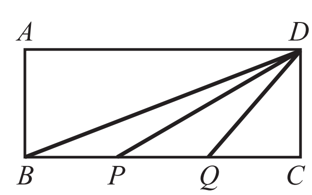
10. 判斷下列各數值中，何者小於 0 ？$\underline{\quad B \quad}$

   (A) $\cos 100^\circ - \sin 2011^\circ$ (B) $\cos^2 100^\circ - \sin^2 100^\circ$

   (C) $\cos^2 2011^\circ - \sin^2 2011^\circ$ (D) $\cos 100^\circ \cos 2011^\circ - \sin 100^\circ \sin 2011^\circ$。 【統測】

★11. 函數 $f(x) = (\cos x + 3\sin x)(\cos x - \sin x)$ 之最小值為 $\underline{\quad -\sqrt{5}-1 \quad}$。 【統測】

★12. 設 $ABCD$ 為一矩形，且 $\overline{BC} = 3\overline{AB}$。令 P 點與 Q 點為 $\overline{BC}$ 上之點，且 $\overline{BP} = \overline{PQ} = \overline{QC}$，如附圖。若 $\angle DBC = \alpha$，且 $\angle DPC = \beta$，則 $\tan(\alpha+\beta) =$ $\underline{\quad 1 \quad}$。 【統測】



8-1 高手過招

1. 試問滿足 $0^\circ < \theta < 180^\circ$，且 $\cos(3\theta - 60^\circ), \cos 3\theta, \cos(3\theta + 60^\circ)$ 依序成等差數列之角度 θ 共有 $\underline{\quad 3 \quad}$ 個。

8-2 》三角測量

重點一　三角測量

1. 測量相關術語：

(1) 視線：眼睛與觀測物之連線。

(2) 仰角：仰視物體，視線與水平線的夾角。

(3) 俯角：俯看物體，視線與水平線的夾角（俯角比較會弄錯）。

(4) 方位：基本方位為東、西、南、北；而北 30° 東即面向北邊，朝東偏 30° 的方向。

2. 解三角測量：

解測量問題的步驟：

(1) 就已知條件作圖。　(2) 解出三角形中的邊角關係。

觀念補充 //

三角測量遇到直角三角形，利用銳角三角函數定義（斜、鄰、對邊關係）及畢氏定理；遇到一般三角形，則利用正、餘弦定理。

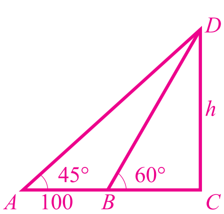
1　老師講解　簡易平面測量　學生練習

小珍於地面上一點測量一山峰仰角為 45°，然後向山峰前進 100 公尺後，再測得仰角為 60°，試求山高。

想法　就已知條件作圖，再解三角形中的邊角關係。

[答：$50\left(3+\sqrt{3}\right)$ 公尺]

解　如圖，設山高 $\overline{CD}=h$



$\triangle BCD$ 中，$\overline{BC}=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$

$\triangle ACD$ 中，$\overline{AC}=h$

依題意 $h-\dfrac{h}{\sqrt{3}}=100$

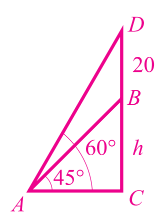
$\Rightarrow\ \sqrt{3}\,h-h=100\sqrt{3}$

$\Rightarrow\ h=\dfrac{100\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=50\left(3+\sqrt{3}\right)$（公尺）

大樓上有一旗桿，桿長 20 公尺，阿良於地面上某點測得大樓仰角為 45°，旗桿頂仰角為 60°，試求此大樓之高度。

[答：$10\left(\sqrt{3}+1\right)$ 公尺]

解　如圖，設樓高 $\overline{BC}=h$



$\triangle ABC$ 中，$\overline{AC}=h$

$\triangle ACD$ 中，$\overline{CD}=\sqrt{3}\,h$

依題意 $\sqrt{3}\,h-h=20$

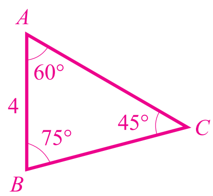
$\Rightarrow\ h=\dfrac{20}{\sqrt{3}-1}=10\left(\sqrt{3}+1\right)$（公尺）

海岸上有 A、B 兩觀測站，同時發現一艘遇難船 C，在 A 測得 $\angle BAC=60^\circ$，在 B 測得 $\angle ABC=75^\circ$， 已知 $\overline{AB}=4$ 公里， 試求 B 站到船 C 之距離。

想法 解一般三角形時，利用正、餘弦定理找邊長。

[答：$2\sqrt{6}$ 公里]

解 如圖



$\angle C=180^\circ-\angle A-\angle B=45^\circ$

由正弦定理 $\dfrac{4}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ}$

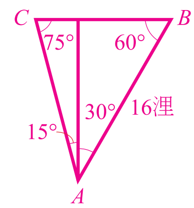
$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overline{BC}=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \overline{BC}=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{6}$（公里）

小杰出海捕魚，發現 C 島在北 15° 西之方向，此船朝北 30° 東方向前進 16 浬到達 B 後，發現 C 島在船之正西方，則此時此船和 C 島相距多少浬？

[答：$16\left(\sqrt{3}-1\right)$ 浬]

解 如圖



$\angle A=45^\circ$，$\angle B=60^\circ$

$\angle C=180^\circ-\angle A-\angle B=75^\circ$

由正弦定理 $\dfrac{16}{\sin 75^\circ}=\dfrac{\overline{BC}}{\sin 45^\circ}$

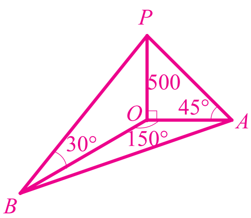
$\Rightarrow \overline{BC}=\dfrac{32}{\sqrt{3}+1}=16\left(\sqrt{3}-1\right)$（浬）

★ 3　老師講解　餘弦定理　學生練習

已知高空中有一氣球，其位置在 O 點正上方 500 公尺 P 處。若在 O 點正東方 A 處觀看氣球其仰角為 45°，在 O 點西 30° 南 B 處觀看氣球其仰角為 30°，試求 A、B 兩地的距離。

想法　解一般三角形時，利用正餘弦定理找邊長。

[答：$500\sqrt{7}$ 公尺]



解　如圖所示

由直角三角形 PAO，得

$\dfrac{500}{\overline{OA}}=\tan 45^\circ$

$\Rightarrow\ \overline{OA}=500$

再由直角三角形 PBO，得

$\dfrac{500}{\overline{OB}}=\tan 30^\circ\ \Rightarrow\ \overline{OB}=500\sqrt{3}$

在 $\triangle OAB$ 中，利用餘弦定理

$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\overline{OA}\times\overline{OB}\times\cos\angle AOB$

$\Rightarrow\ \overline{AB}^2=500^2+\left(500\sqrt{3}\right)^2-2\times500$

$\times500\sqrt{3}\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=500^2\times7$

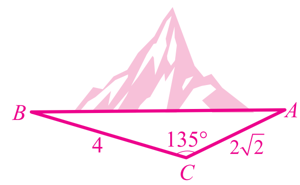
$\Rightarrow\ \overline{AB}=500\sqrt{7}$

故 A、B 兩地的距離為 $500\sqrt{7}$ 公尺

已知 A、B 兩地中間隔著一座小山，在山下某處取一點 C，測得 $\overline{CA}$ 為 $2\sqrt{2}$ 公里，$\overline{CB}$ 為 4 公里，$\angle ACB=135^\circ$，試求 A、B 兩地的距離。

[答：$2\sqrt{10}$ 公里]

解　如圖所示



由餘弦定理知：

$\overline{AB}^2=\overline{CA}^2+\overline{CB}^2-2\times\overline{CA}\times\overline{CB}\times\cos C$

$=\left(2\sqrt{2}\right)^2+4^2-2\times2\sqrt{2}\times4$

$\times\cos 135^\circ$

$=8+16-16\sqrt{2}\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=40$

$\Rightarrow\ \overline{AB}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

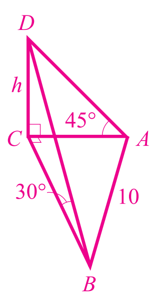
故 A、B 兩地的距離為 $2\sqrt{10}$ 公里

★ 4　老師講解　空間三角測量　學生練習

已知在塔的正東方一點 A，測得塔頂 D 之仰角為 45°；在塔的正南方 B，測得塔頂仰角為 30°（不計觀測人身高）。若 $\overline{AB}=10$ 公尺，試求塔高。

想法　空間測量將已知條件轉化成平面測量，再解三角形的邊角問題。

[答：5 公尺]



解　如圖，設塔高 $\overline{CD}=h$

$\triangle ACD$ 中，$\overline{AC}=h$

$\triangle BCD$ 中，$\overline{BC}=\sqrt{3}\,h$

$\because\ \angle ACB=90^\circ$，由畢氏定理得

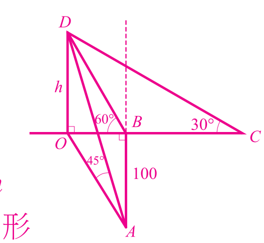
$\left(\sqrt{3}\,h\right)^2+h^2=10^2$

$\Rightarrow\ 4h^2=100\ \Rightarrow\ h=5$（公尺）

已知 A、B、C 為地面上三點，A 在 B 正南，C 在 B 正東。有一塔在 B 之正西，由 A、B、C 三點，測塔頂得仰角分別為 45°、60° 及 30°，設 $\overline{AB}=100$ 公尺，試求塔高及 $\overline{BC}$。

[答：塔高為 $50\sqrt{6}$ 公尺，$\overline{BC}=100\sqrt{2}$ 公尺]

解　如圖，設塔高 $\overline{OD}=h$



$\triangle AOD$ 中，$\overline{OA}=h$

$\triangle BOD$ 中，$\overline{OB}=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$

$\triangle COD$ 中，$\overline{OC}=\sqrt{3}\,h$

$\because\ \triangle ABO$ 是直角三角形

由畢氏定理得 $\left(\dfrac{h}{\sqrt{3}}\right)^2+100^2=h^2$

$\Rightarrow\ h=50\sqrt{6}$（公尺）

$\overline{BC}=\sqrt{3}\,h-\dfrac{h}{\sqrt{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}h=100\sqrt{2}$（公尺）

8-2 段落測驗

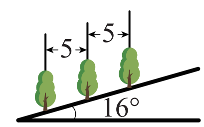
★表難題

1. 有一測量員在某處測得遠方山頂的仰角為 30°，朝山的方向前進 500 公尺後，再測得山頂的仰角為 45°，則山高為 $250\left(\sqrt{3}+1\right)$ 公尺。

2. 地面上兩處 B、C 被一池塘隔開。小宥在地面上找一處 A，量得 $\overline{AB}$ 為 8 公尺，$\overline{AC}$ 為 5 公尺，並測得 $\angle CAB=60^\circ$，則 B、C 兩處的距離為 7 公尺。

3. 一船向東 37° 南以每小時 50 公里之速度航行，在上午 9 時測得一島之方位為東 53° 北，如果航行方向不變，至同日中午 12 時再測得該島之方位為北 23° 西，則中午 12 時船與該島之距離為 $100\sqrt{3}$ 公里。

4. 如圖，沿著山坡種樹時，為了使樹木有足夠的生長空間，每棵樹的水平距離需間隔 5 公尺。今測得斜坡坡度為 16°，則相鄰兩樹在斜坡上應留之斜面距離為 5.2 公尺。（參考數值 $\sin16^\circ=0.2756$，$\cos16^\circ=0.9613$，$\tan16^\circ=0.2867$，四捨五入至小數點後第一位）



5. 一條上坡的人行步道長 100 公尺，坡度為 12°。為了方便老年人爬坡，欲重修此步道，若將坡度定為 10°，則新步道應規劃長 120 公尺。（$\sin12^\circ=0.2079$，$\sin10^\circ=0.1736$，答案四捨五入到整數位）

6. 小翰想測量某風景區中一大佛的高度，首先在與佛頂部仰角恰為 60° 的地面 A 點處做上記號，面對著佛像後退到仰角恰為 30° 的 B 點，然後測得 A 點和 B 點的距離為 20 公尺。則佛像高度為 $10\sqrt{3}$ 公尺。

7. 阿信在由南向北時速 90 公里的貨車上，看到北 45° 東的方位有一座摩天輪，貨車繼續行駛 12 分鐘後，摩天輪變成在北 60° 東的方位，若車子繼續前行，則貨車與摩天輪最近的距離是 $27+9\sqrt{3}$ 公里。

★ 8. 小君在一大廈的某一層窗口，測得對街某大樓樓頂的仰角為 30°，樓底的俯角為 15°，設窗口與地面的距離為 150 公尺，則此大樓的高度為 $300+100\sqrt{3}$ 公尺。

★ 9. 設 A、B、C 三鎮兩兩之間的距離皆為 20 公里，兩條筆直的公路交於 D 鎮，其中之一通過 A、B 兩鎮而另一通過 C 鎮。今在一比例精準的地圖上量得兩公路的夾角為 45°，則 C、D 兩鎮間的距離為 $10\sqrt{6}$ 公里。

★ 10. 某人欲測某山之高度，先在地面上選定 P、Q 兩點，在 P 點測得山頂 A 的仰角是 45°，$\angle APQ=135^\circ$，在 Q 點測得山頂 A 的仰角是 30°，已知 $\overline{PQ}=2$ 公里，則山高為 $1+\sqrt{3}$ 公里。

8-3 》複數平面

重點一　複數極式

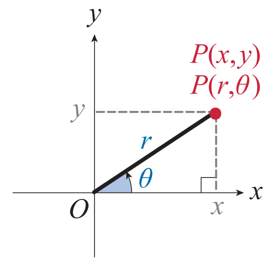
1. 極坐標：

用長度與角度來定位的坐標系統。

如圖，設 P 點的直角坐標為 (x,y)，$r=\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$，$\theta$ 是 $\overline{OP}$ 與 x 軸正向所夾的有向角。觀察 (r,θ) 與 (x,y) 之間的關係：

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，稱 (r,θ) 為 P 點的極坐標。

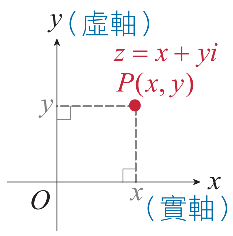
若 P 點的極坐標為 (r,θ)，則轉成直角坐標為 $(r\cos\theta,r\sin\theta)$。

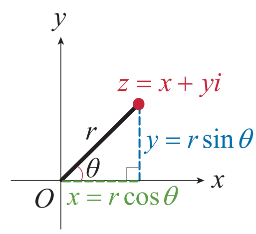


2. 複數平面（又稱為高斯平面）：

以水平 x 軸為實軸，鉛直 y 軸為虛軸，如圖：

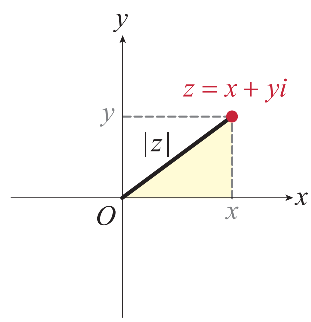
複數平面點 $(x+yi)$ ⇔ 直角坐標點 (x,y)。





3. 複數的絕對值：$|z|$

如圖，設 $z=x+yi$（x、$y\in\mathbb{R}$），定義 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$，$|z|$ 表複數 z 到原點的距離。



4. 複數絕對值的性質：

(1) $|z|=|\overline{z}|$

(2) $|z_1\times z_2|=|z_1|\times|z_2|$

(3) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$（$z_2\neq 0$）

(4) $|z^n|=|z|^n$（n 為自然數）

5. 複數極式：

複數 $z=x+yi$，轉成複數極式表成：$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$；其中當 $0\le\theta<2\pi$ 時，稱 θ 為 z 的主輻角，記作 $\operatorname{Arg}(z)=\theta$。

6. 複數極式的乘除法公式：

$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

(1) 乘法：$z_1\times z_2=r_1r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$。

(2) 除法：$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$。

觀念補充 //

$z_1\times z_2$ ⇒ 長度相乘，角度相加；

$z_1\div z_2$ ⇒ 長度相除，角度相減。

1 老師講解 直角坐標化為極坐標 學生練習

老師講解

試將下列各直角坐標化為極坐標：

（取 $r\geq 0$ 且 $0\leq\theta<2\pi$）

(1) $(-2\sqrt{3},2)$ (2) $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$

想法 直角坐標 (x,y) 化為極坐標 (r,θ)，其中 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$。

[答：(1) $\left(4,\dfrac{5\pi}{6}\right)$ (2) $\left(2,\dfrac{7\pi}{4}\right)$]

解 (1) $x=-2\sqrt{3}$，$y=2$

$\Rightarrow r=\sqrt{(-2\sqrt{3})^2+2^2}=\sqrt{16}=4$

又 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{2}{-2\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\because$ $(-2\sqrt{3},2)$ 在第二象限

故 θ 為第二象限角 $\Rightarrow \theta=\dfrac{5\pi}{6}$

$\therefore$ $(-2\sqrt{3},2)$ 的極坐標為 $\left(4,\dfrac{5\pi}{6}\right)$

(2) $x=\sqrt{2}$，$y=-\sqrt{2}$

$\Rightarrow r=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2}=2$

又 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-1$

$\because$ $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ 在第四象限

故 θ 為第四象限角 $\Rightarrow \theta=\dfrac{7\pi}{4}$

$\therefore$ $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ 的極坐標為 $\left(2,\dfrac{7\pi}{4}\right)$

學生練習

將下列各直角坐標化為極坐標：

（取 $r\geq 0$ 且 $0\leq\theta<2\pi$）

(1) $(-2,0)$ (2) $(\sqrt{3},-1)$

[答：(1) $(2,\pi)$ (2) $\left(2,\dfrac{11\pi}{6}\right)$]

解 (1) $x=-2$，$y=0$

$\Rightarrow r=\sqrt{(-2^2)+0^2}=\sqrt{4}=2$

又 $\cos\theta=\dfrac{x}{r}=\dfrac{-2}{2}=-1$

$\Rightarrow \theta=\pi$

$\therefore$ $(-2,0)$ 的極坐標為 $(2,\pi)$

(2) $x=\sqrt{3}$，$y=-1$

$\Rightarrow r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2$

又 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$

$\because$ $(\sqrt{3},-1)$ 在第四象限

故 θ 為第四象限角 $\Rightarrow \theta=\dfrac{11\pi}{6}$

$\therefore$ $(\sqrt{3},-1)$ 的極坐標為 $\left(2,\dfrac{11\pi}{6}\right)$

2 複數絕對值

老師講解

若 $z=\dfrac{(2+i)(-1+i)}{(3-i)}$，試求 $|z|$ 及 $|\overline{z}|$。

想法 $|z_1\times z_2|=|z_1|\times|z_2|$

$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$（$z_2\neq 0$）且 $|z|=|\overline{z}|$。

[答：$|z|=1$，$|\overline{z}|=1$]

解 $|z|=\dfrac{|2+i|\,|-1+i|}{|3-i|}=\dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{2}}{\sqrt{10}}=1$

$\because\ |\overline{z}|=|z|$

$\therefore\ |\overline{z}|=1$

學生練習

設 $z=\dfrac{\left(\sqrt{2}+i\right)^3(2-i)^2}{(1-3i)^2}$，試求 $|z|$。

[答：$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$]

解 $|z|=\dfrac{\left|\sqrt{2}+i\right|^3\,|2-i|^2}{|1-3i|^2}$

$=\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^3\times 5}{10}$

$=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

3 複數極式的主輻角

老師講解

試求下列各複數極式的主輻角：

(1) $z_1=\sin 20^\circ+i\cos 20^\circ$

(2) $z_2=-\cos 20^\circ+i\sin 20^\circ$

(3) $z_3=-\cos 20^\circ-i\sin 20^\circ$

(4) $z_4=\cos 20^\circ-i\sin 20^\circ$

想法 複數極式 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，當 $0\leq\theta<2\pi$ 時，稱 θ 為 z 的主輻角。

[答：(1) 70°　(2) 160°　(3) 200°　(4) 340°]

解 (1) $z_1=\cos 70^\circ+i\sin 70^\circ$

$\Rightarrow\ \operatorname{Arg}(z_1)=70^\circ$

(2) z_2 為第二象限點

故主輻角為第二象限角

$\Rightarrow\ \operatorname{Arg}(z_2)=180^\circ-20^\circ=160^\circ$

(3) z_3 為第三象限點

故主輻角為第三象限角

$\Rightarrow\ \operatorname{Arg}(z_3)=180^\circ+20^\circ=200^\circ$

(4) z_4 為第四象限點

故主輻角為第四象限角

$\Rightarrow\ \operatorname{Arg}(z_4)=360^\circ-20^\circ=340^\circ$

學生練習

試求下列各複數極式的主輻角：

(1) $z_1=\sin 50^\circ+i\cos 50^\circ$

(2) $z_2=-\cos 50^\circ+i\sin 50^\circ$

(3) $z_3=-\cos 50^\circ-i\sin 50^\circ$

(4) $z_4=\cos 50^\circ-i\sin 50^\circ$

[答：(1) 40°　(2) 130°　(3) 230°　(4) 310°]

解 (1) $z_1=\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ$

$\Rightarrow\ \operatorname{Arg}(z_1)=40^\circ$

(2) z_2 為第二象限點

故主輻角為第二象限角

$\Rightarrow\ \operatorname{Arg}(z_2)=180^\circ-50^\circ=130^\circ$

(3) z_3 為第三象限點

故主輻角為第三象限角

$\Rightarrow\ \operatorname{Arg}(z_3)=180^\circ+50^\circ=230^\circ$

(4) z_4 為第四象限點

故主輻角為第四象限角

$\Rightarrow\ \operatorname{Arg}(z_4)=360^\circ-50^\circ=310^\circ$

4 老師講解 複數化為極式 學生練習

將下列各複數標準式化為極式：（以主輻角表示）

(1) $1+\sqrt{3}i$　(2) $1-i$　(3) $-2i$

想法　複數 $z=x+yi$ 化成複數極式為 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$。

[答：(1) $2(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$
(2) $\sqrt{2}(\cos 315^\circ+i\sin 315^\circ)$
(3) $2(\cos 270^\circ+i\sin 270^\circ)$]

解 (1) $1+\sqrt{3}i$ 在第一象限

$r=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$，$\text{Arg}(z)=60^\circ$

$\Rightarrow$ 極式表法：$2(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$

(2) $1-i$ 在第四象限

$r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$\text{Arg}(z)=360^\circ-45^\circ=315^\circ$

$\Rightarrow$ 極式表法：$\sqrt{2}(\cos 315^\circ+i\sin 315^\circ)$

(3) $-2i$ 在虛軸上

$r=2$，$\text{Arg}(z)=270^\circ$

$\Rightarrow$ 極式表法：$2(\cos 270^\circ+i\sin 270^\circ)$

將下列各複數標準式化為極式：（以主輻角表示）

(1) $-\sqrt{3}+i$　(2) $3-\sqrt{3}i$　(3) -5

[答：(1) $2(\cos 150^\circ+i\sin 150^\circ)$
(2) $2\sqrt{3}(\cos 330^\circ+i\sin 330^\circ)$
(3) $5(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ)$]

解 (1) $-\sqrt{3}+i$ 在第二象限

$r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2$

$\text{Arg}(z)=180^\circ-30^\circ=150^\circ$

$\Rightarrow$ 極式表法：$2(\cos 150^\circ+i\sin 150^\circ)$

(2) $3-\sqrt{3}i$ 在第四象限

$r=\sqrt{3^2+(-\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$

$\text{Arg}(z)=360^\circ-30^\circ=330^\circ$

$\Rightarrow$ 極式表法：

$2\sqrt{3}(\cos 330^\circ+i\sin 330^\circ)$

(3) -5 在實軸上

$r=5$，$\text{Arg}(z)=180^\circ$

$\Rightarrow$ 極式表法：$5(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ)$

5 老師講解 複數極式的乘除 學生練習

設 $z_1=6(\cos 75^\circ+i\sin 75^\circ)$，$z_2=3(\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ)$，試求：

(1) $z_1\times z_2$　(2) $\dfrac{z_1}{z_2}$

想法　$z_1\times z_2=r_1r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$；
$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$。

[答：(1) $18i$　(2) $1+\sqrt{3}i$]

解 (1) $z_1\times z_2$

$=6\times 3\left[\cos(75^\circ+15^\circ)+i\sin(75^\circ+15^\circ)\right]$

$=18(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ)=18i$

(2) $\dfrac{z_1}{z_2}$

$=\dfrac{6}{3}\left[\cos(75^\circ-15^\circ)+i\sin(75^\circ-15^\circ)\right]$

$=2(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)=1+\sqrt{3}i$

設 $z_1=8(\cos 37.5^\circ+i\sin 37.5^\circ)$，$z_2=4(\cos 7.5^\circ+i\sin 7.5^\circ)$，試求：

(1) $z_1\times z_2$　(2) $\dfrac{z_1}{z_2}$

[答：(1) $16\sqrt{2}+16\sqrt{2}i$　(2) $\sqrt{3}+i$]

解 (1) $z_1\times z_2=8\times 4[\cos(37.5^\circ+7.5^\circ)$
$+i\sin(37.5^\circ+7.5^\circ)]$

$=32(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$

$=16\sqrt{2}+16\sqrt{2}i$

(2) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{8}{4}[\cos(37.5^\circ-7.5^\circ)$
$+i\sin(37.5^\circ-7.5^\circ)]$

$=2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)$

$=\sqrt{3}+i$

6 老師講解 複數極式的乘除 學生練習

試求

$$\frac{4(\cos 80^\circ + i\sin 80^\circ)\times 3(\cos 50^\circ + i\sin 50^\circ)}{6(\cos 35^\circ + i\sin 35^\circ)\times(\cos 5^\circ + i\sin 5^\circ)}。$$

想法 利用極式的乘法與除法公式。

[答：$2i$]

解 原式

$$= \frac{4\times 3[\cos(80^\circ+50^\circ)+i\sin(80^\circ+50^\circ)]}{6\times 1[\cos(35^\circ+5^\circ)+i\sin(35^\circ+5^\circ)]}$$

$$= \frac{12(\cos 130^\circ + i\sin 130^\circ)}{6(\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ)}$$

$$= \frac{12}{6}[\cos(130^\circ-40^\circ)+i\sin(130^\circ-40^\circ)]$$

$$= 2(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ)$$

$$= 2(0+i)$$

$$= 2i$$

試求

$$\frac{3(\cos 55^\circ + i\sin 55^\circ)\times 6(\cos 25^\circ + i\sin 25^\circ)}{9(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ)}。$$

[答：$1+\sqrt{3}\,i$]

解 原式

$$= \frac{3\times 6[\cos(55^\circ+25^\circ)+i\sin(55^\circ+25^\circ)]}{9(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ)}$$

$$= \frac{18(\cos 80^\circ + i\sin 80^\circ)}{9(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ)}$$

$$= \frac{18}{9}[\cos(80^\circ-20^\circ)+i\sin(80^\circ-20^\circ)]$$

$$= 2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= 1+\sqrt{3}\,i$$

進階例題

7 老師講解 已知複數絕對值與主輻角求 z 學生練習

設複數 z 滿足 $\left|\frac{z+1}{z}\right| = \sqrt{2}$，且 $\operatorname{Arg}\left(\frac{z+1}{z}\right) = \frac{\pi}{4}$，試求 z。

[答：$-i$]

解 $\because$ 複數 $\frac{z+1}{z}$ 的長度為 $\left|\frac{z+1}{z}\right| = \sqrt{2}$

主輻角為 $\frac{\pi}{4}$

$$\therefore \frac{z+1}{z} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1+i$$

$$\Rightarrow z+1 = (1+i)z$$

$$\Rightarrow iz = 1$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{i} = \frac{-i}{(i)(-i)} = -i$$

設複數 z 滿足 $\left|\frac{z-1}{z}\right| = 2$，且 $\operatorname{Arg}\left(\frac{z-1}{z}\right) = \frac{\pi}{3}$，試求 z。

[答：$\frac{\sqrt{3}}{3}i$]

解 $\because$ 複數 $\frac{z-1}{z}$ 的長度為 $\left|\frac{z-1}{z}\right| = 2$

主輻角為 $\frac{\pi}{3}$

$$\therefore \frac{z-1}{z} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1+\sqrt{3}\,i$$

$$\Rightarrow z-1 = (1+\sqrt{3}\,i)z$$

$$\Rightarrow (-\sqrt{3}\,i)z = 1$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{-\sqrt{3}\,i} = \frac{\sqrt{3}\,i}{(-\sqrt{3}\,i)(\sqrt{3}\,i)} = \frac{\sqrt{3}}{3}i$$

8-3 段落測驗

★表難題

1. 已知 $z=\dfrac{(-4+3i)^2}{(2+i)(1-2i)}$，則 $|z|=$ ___5___。

2. 將下列各複數寫成極式（取主輻角）：

(1) $z_1=-1+\sqrt{3}i=$ ___$2(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)$___。

(2) $z_2=-1-i=$ ___$\sqrt{2}(\cos 225^\circ+i\sin 225^\circ)$___。

3. 將下列各式寫成極式：

(1) $z_1=\sin 18^\circ+i\cos 18^\circ=$ ___$\cos 72^\circ+i\sin 72^\circ$___。

(2) $z_2=\cos 35^\circ-i\sin 35^\circ=$ ___$\cos 325^\circ+i\sin 325^\circ$___。

★ 4. 試求下列各複數的主輻角：

(1) $z_1=-\cos 37^\circ-i\sin 37^\circ$，$\text{Arg}(z_1)=$ ___217°___。

(2) $z_2=\sin 40^\circ-i\cos 40^\circ$，$\text{Arg}(z_2)=$ ___310°___。

5. 一複數為 z，已知 $|z|=2$，$\text{Arg}(z)=270^\circ$，則 $\dfrac{z}{3+4i}=$ ___$-\dfrac{8}{25}-\dfrac{6}{25}i$___。

6. 若複數 z 與 $-1+i$ 之乘積為 $1-\sqrt{3}i$，則 z 的主輻角為 ___165°___。

7. 設複數 $z_1=6(\cos 130^\circ+i\sin 130^\circ)$，$z_2=2(\sin 50^\circ+i\cos 50^\circ)$，則 $\dfrac{z_1}{z_2}=$ ___$3i$___。

8. 試求 $\dfrac{(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)(\cos 10^\circ+i\sin 10^\circ)}{\cos 80^\circ-i\sin 80^\circ}=$ ___$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$___。

★ 9. 在 $\triangle ABC$ 中，試求 $(\cos A+i\sin A)(\cos B+i\sin B)(\cos C+i\sin C)=$ ___-1___。

10. 已知 $i=\sqrt{-1}$，化簡 $\left(\cos\dfrac{\pi}{7}-i\sin\dfrac{\pi}{7}\right)\left(\cos\dfrac{10}{21}\pi+i\sin\dfrac{10}{21}\pi\right)=$ ___$\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$___。【統測】

11. $i=\sqrt{-1}$ 且複數 z 的主輻角為 $\text{Arg}(z)$，試求 $\text{Arg}(-\sqrt{3}+i)=$ ___$\dfrac{5\pi}{6}$___。【統測】

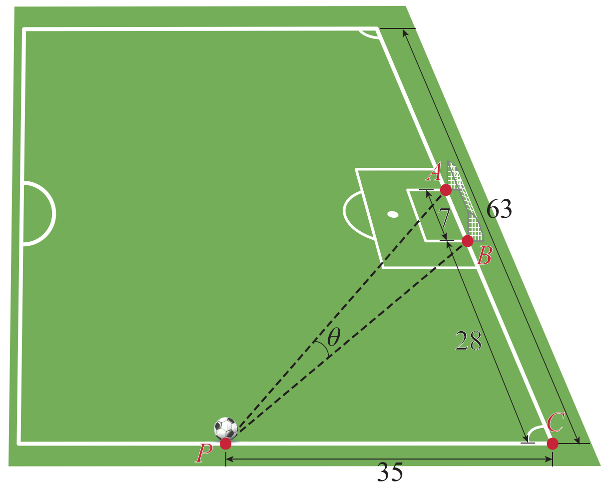
12. 設 z 為一複數，且 $\dfrac{z-2}{z+2}=i$（其中 $i=\sqrt{-1}$ 為虛數單位），則 $|z|=$ ___2___。【統測】

8-3 高手過招

1. 已知一元三次實係數方程式 $x^3+ax^2+bx+4=0$ 有一根為 $1+i$，若將此方程式的三個根在複數平面上標出，則此三點所圍成的三角形面積為 ___3___ 平方單位。

題目

在各類足球賽事中，最具影響力的是世界盃足球賽，每四年舉辦一次，每場比賽均吸引眾多球迷的關注。假設在一場分組預賽中，巴西對上阿根廷，如圖，已知足球場寬 63 公尺，球門寬 7 公尺，且 $\overline{BC}$ 長 28 公尺，某巴西控球員沿邊界帶球突破，在距底線 35 公尺的 P 處起腳射門，設此時 P 對球門所張的角為 θ，試求 $\tan\theta$ 之值。



關鍵字

球門寬 7 公尺，$\overline{BC}$ 長 28 公尺

距底線 35 公尺的 P 處，P 對球門所張的角為 θ

單元公式

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

翻譯成數學式

在 $\triangle APC$ 與 $\triangle BPC$ 中，已知 $\overline{AB}=7$，$\overline{BC}=28$，$\overline{PC}=35$

假設 $\angle APB=\theta$，試求 $\tan\theta=$ ？

解題

本題要能搭配圖形來觀察，從圖形中讀出解題訊息

圖形中，球門寬 $\overline{AB}=7$ 公尺，$\overline{BC}=28$ 公尺

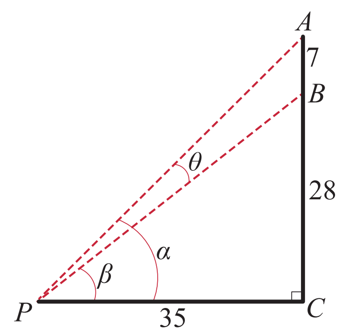
得 $\overline{AC}=7+28=35$ 公尺

設 $\angle APC=\alpha$，$\angle BPC=\beta$

得 $\tan\alpha=\dfrac{35}{35}=1$，$\tan\beta=\dfrac{28}{35}=\dfrac{4}{5}$

又 $\theta=\alpha-\beta$，代入 tan 差角公式

$$\text{得 }\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{1-\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}}=\frac{1}{9}$$



● **回顧：**和差角公式是三角函數中很重要的觀念，很多三角公式都是由它推演而來，就像是浮在海面上的冰山一角，由它出發，可以讓我們窺探整座冰山的輪廓。綜觀三角學是一門實用性很高的學問，它能透過精確而簡明的數學公式來幫助我們洞見幾何圖形中潛藏的奧秘。

CH 8 素養競技場

★表難題

1. 沙漠地區一般的年平均降雨量低於 250 毫米，因長年被沙質土壤所覆蓋，所以植物不易生長。倘若一沙漠生物研究學者在沙漠中勘查，酷熱難耐，遇一駱駝客告訴學者說：離目前位置最近有兩個相距 13 公里的綠洲，一是在面對太陽向右轉 56°，前進 12 公里處；一是在面對太陽向左轉 34°，但不確定多遠，試問較近的綠洲距離學者多少公里？

答：5 公里

★ 2. 假設某一機械工程師欲開發一款移動機器人的定位技術，已知在坐標平面上，O 為原點，且 $\triangle OAB$ 為正三角形，今將機器人置放於 A 點，其坐標為 $(1,2)$，當機器人走到 B 點時（A、B 在不同象限），試求 B 點的坐標。（提示：利用複數極式運算）

答：$\left(\frac{1}{2}-\sqrt{3},1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3. 某校熱音社在禮堂內舉辦音樂成果發表會，若主奏電吉他的第 6 弦與和音貝斯（低音吉他）的第 2 弦之週期相同，經由疊合後產生共振現象使得聲波振幅加大。已知兩種樂器之樂聲函數分別為 $f_1(x)=2\sin x$ 與 $f_2(x)=\sqrt{2}\cos(x-45^\circ)$，試求兩種樂器之混合聲樂 $f_1(x)+f_2(x)$ 的最大振幅為何？

答：$\sqrt{10}$

4. 某科技公司設計一款會在坐標平面上移動的機器人，當機器人接到指令時，會先在原地逆時針旋轉 θ 角，再朝指定方向沿直線前進距離 r。已知機器人原本置放在極坐標 $(3,55^\circ)$ 上，在連續接受指令後移動至點 P，其指令運算式如下：

$$\frac{3(\cos 55^\circ+i\sin 55^\circ)\times 6(\cos 25^\circ+i\sin 25^\circ)}{9(\cos 20^\circ+i\sin 20^\circ)(\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ)}$$

試求點 P 之極坐標為何？

答：$(2,45^\circ)$

高三人的大器

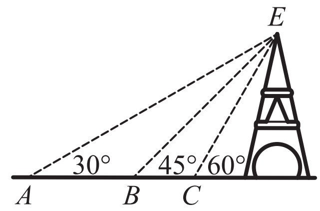
藏夢想的密封罐沒有保存期限，只看你願意何時打開它。
黑馬非神話，非我莫屬，捨我其誰。

CH 8 統測考古題

統測解題影音

★表難題

(A) 1. 某人由 A 處測量高塔塔頂 E 的仰角為 30°，朝高塔方向前進 a 公尺至 B 處時測量塔頂 E 的仰角為 45°，繼續朝高塔方向前進 b 公尺至 C 處時測量塔頂 E 的仰角為 60°，如圖所示，則 $\frac{a}{b}=$？



(A) $\sqrt{3}$　(B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　(D) $\frac{\sqrt{3}}{6}$。【111(C)】

(C) 2. $\sin 10^\circ \cos 10^\circ \cos 50^\circ - \sin 25^\circ \cos 25^\circ \cos 20^\circ=$？

(A) $\frac{1}{2}$　(B) $\frac{1}{4}$　(C) $-\frac{1}{4}$　(D) $-\frac{1}{2}$。【110(C)】

(C) 3. 已知 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，且 $\sin\theta=\frac{3}{5}$。若 $\sin 4\theta=a$，則下列何者正確？

(A) $0<a<\frac{1}{4}$　(B) $\frac{1}{4}<a<\frac{1}{2}$　(C) $\frac{1}{2}<a<\frac{3}{4}$　(D) $\frac{3}{4}<a<1$。【110(B)】

(A) 4. 已知 A、B、C 三家某知名商店，B 店位於 A 店往西 240 公尺往北 120 公尺處，而 C 店位於 B 店往東 180 公尺往南 40 公尺位置。求 A 店與 C 店的距離為多少公尺？

(A) 100　(B) 120　(C) 140　(D) 160。【110(B)】

(B) 5. 孫悟空師徒四人取經途中經過一廣闊平原，看到前方有一尊高大佛像，其頂部仰角為 37°，四人往佛像前行 31 公尺後，佛像頂部仰角變為 53°。求佛像高度約為多少公尺？（$\tan 37^\circ=\frac{3}{4}$）　(A) 57　(B) 53　(C) 37　(D) 31。【110(B)】

★(A) 6. 若 $\sin 80^\circ=a$，$\cos 59^\circ=b$，則 $\cos 21^\circ=$？

(A) $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}$　(B) $a\sqrt{1-b^2}-b\sqrt{1-a^2}$

(C) $ab-\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$　(D) $ab+\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$。【109(C)】

(D) 7. 若 $\sin 2\theta=\frac{1}{2}$，則 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=$？

(A) $\frac{1}{4}$　(B) $\frac{3}{4}$　(C) 1　(D) $\frac{3}{2}$。【109(B)】

(B) 8. 某甲沿著馬路向正前方一棟大樓直線前進，抬頭看大樓頂端的仰角為 30 度，走了 100 公尺後，第二次抬頭看大樓頂端，此時的仰角為 45 度，則第二次抬頭看大樓時距離大樓還有多遠？

(A) $25(\sqrt{3}-1)$　(B) $50(\sqrt{3}+1)$　(C) $100(\sqrt{3}-1)$　(D) $100(\sqrt{3}+1)$。【109(B)】

(B) 9. 設 $(\sqrt{3}+i)z=-2\sqrt{3}+2i$，其中 $i=\sqrt{-1}$，則 z 之主幅角為？

(A) $\frac{\pi}{3}$　(B) $\frac{2\pi}{3}$　(C) $\frac{5\pi}{6}$　(D) $\frac{7\pi}{6}$。【109(C)】

(C) 10. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\dfrac{\cos B+i\sin B}{(\cos A+i\sin A)(\cos C+i\sin C)}$ 為實數，其中 $i=\sqrt{-1}$，則 $\triangle ABC$ 必為何種三角形？

(A) 等腰三角形 (B) 銳角三角形 (C) 直角三角形 (D) 鈍角三角形。【108(C)】

(C) 11. 小明在平地上測得某一直立高樓的頂端之仰角為 45°。他面向該高樓向前直行 30 公尺之後，測得高樓頂端之仰角為 60°。試問小明第二次測仰角時，距離高樓的底部約多少公尺？ (A) 30 (B) $15\left(\sqrt{3}-1\right)$ (C) $15\left(\sqrt{3}+1\right)$ (D) 45。【108(B)】

★(B) 12. 若 $\tan 19^\circ=a$，則 $\sin 2018^\circ=$

(A) $\dfrac{-2}{1+a^2}$ (B) $\dfrac{-2a}{1+a^2}$ (C) $\dfrac{a}{1+a^2}$ (D) $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$。【107(C)】

(C) 13. 若 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，則 $\tan 2\theta=$

(A) $2-\sqrt{3}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\sqrt{3}$。【106(C)】

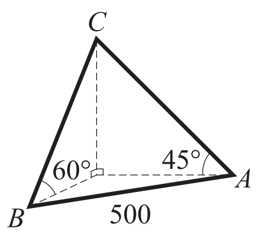
★(B) 14. 已知 $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=a\cdot\sin(\theta+b)$，$a>0$，$0\le b\le 2\pi$，則下列何者正確？

(A) $a=4$，$b=\dfrac{\pi}{6}$ (B) $a=2$，$b=\dfrac{\pi}{3}$ (C) $a=2$，$b=\dfrac{4\pi}{3}$ (D) $a=4$，$b=\dfrac{\pi}{3}$。

【106(B)】

★(D) 15. 已知 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\dfrac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$，且 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\cos\beta=\dfrac{12}{13}$，則 $\sin(\alpha+\beta)$ 之值為何？ (A) $\dfrac{-63}{65}$ (B) $\dfrac{-33}{65}$ (C) $\dfrac{33}{65}$ (D) $\dfrac{63}{65}$。【105(B)】

★(B) 16. 今有人欲測一山的高度，當此人在此山的正東方一點 A，測得山頂 C 的仰角為 45°，又當他在山的南 60° 西方向一點 B，測得山頂 C 的仰角為 60°，如圖所示。若 A、B 兩點相距 500 公尺，則此山高 h 為多少公尺？



(A) $\dfrac{500}{3}\sqrt{3}$ (B) $\dfrac{500}{7}\sqrt{21}$ (C) $\dfrac{500}{3}\sqrt{21}$ (D) $500\sqrt{3}$。【104(C)】

(C) 17. 若 $\sin\theta=\dfrac{1}{3}$，則 $\sqrt{2-2\cos 2\theta}=$？ (A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ (C) $\dfrac{2}{3}$ (D) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$。【104(C)】

(B) 18. 設 $\sin(-45^\circ)\cdot\sin 15^\circ=k-\cos 45^\circ\cdot\cos(-15^\circ)$，則 k 之值為何？

(A) 0 (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。【統測】

(A) 19. 已知一矩形的長為 $2\cos 1^\circ\cos 2^\circ$，寬為 $2\sin 1^\circ\csc 4^\circ$，則此矩形面積為何？

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。【統測】