

7



排列組合



雲端教室

7-1 排列

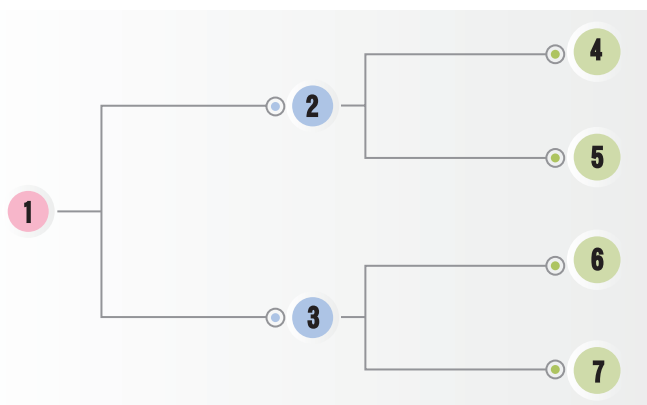
課網即時報

新增	無
刪除	環狀排列、重複組合、巴斯卡定理、二項式定理

重點一 加法原理與乘法原理

1. 樹狀圖：

類似樹幹分枝形狀，以方便逐一列舉可能發生的事情，如下圖。



2. 基本原理：

- (1) 加法原理：完成一件事可分成好幾類，將各類的方法數相加，即為完成整件事的方法數。
例如完成一件事，可有 3 種方式，第 1 種方式有 m_1 種選擇，第 2 種方式有 m_2 種選擇，第 3 種方式有 m_3 種選擇。若只能擇一完成，則完成這件事共有 $m_1 + m_2 + m_3$ 種不同的方法。
- (2) 乘法原理：完成一件事可分成好幾步，將各步的方法數相乘，即為完成整件事的方法數。
例如完成一件事，須分 3 個步驟，第 1 步驟有 m_1 種選擇，第 2 步驟有 m_2 種選擇，第 3 步驟有 m_3 種選擇，則完成這件事共有 $m_1 \times m_2 \times m_3$ 種不同的方法。

3. 排容原理：

計數時考慮可能發生的狀況，再扣除不符題意或重複計算的部分，多算的需排除，少算的再追加。

1

老師講解

樹狀圖

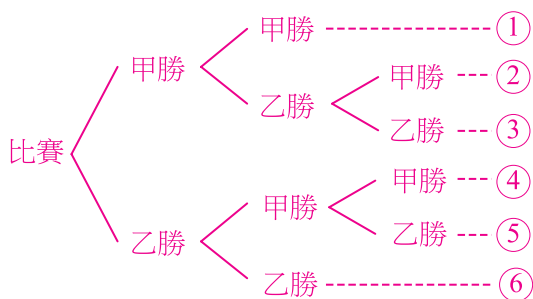
學生練習

甲、乙兩人單挑桌球，每場均有勝負，規定先取得兩場勝利者為勝方，則共有幾種賽事序列來決定勝方？

想法 將每場比賽勝出者，以樹狀圖逐一列舉表示。

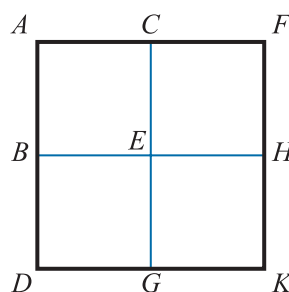
[答：6種]

解



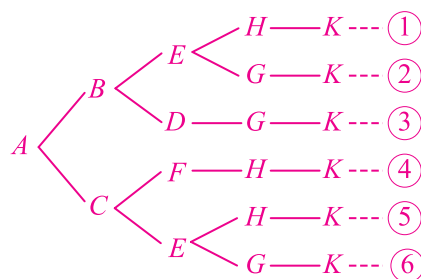
由樹狀圖知：
共有 6 種賽事序列來決定勝方

右圖是田字型街道，由 A 點出發到 K 點取捷徑，試利用樹狀圖描述所有路徑，並求共有多少種不同的路徑？



[答：樹狀圖見解析，6種]

解



由樹狀圖知：
共有 6 種不同的路徑

2

老師講解

加法原理

學生練習

小穎有多種不同集數的漫畫書：灌籃高手 10 集、哆啦 A 夢 8 集及海賊王 6 集，今隨手攜帶一本出門，則有幾種不同的拿法？

想法 完成一件事可分成好幾類，將各類的方法數相加。

[答：24種]

解

$$10 + 8 + 6 = 24 \text{ (種)}$$

左岸咖啡館中有 5 種咖啡、7 種手工餅乾及 8 種小蛋糕，今阿德任點一種，則有幾種不同的點法？

[答：20種]

解

$$5 + 7 + 8 = 20 \text{ (種)}$$

7

3

老師講解

乘法原理

學生練習

小真有 6 件不同款式上衣，4 條不同色質的長褲及 3 雙鞋子，某日參加宴會，從上衣、褲子到鞋子各挑一樣搭配，試求小真有多少種搭配穿法？

想法

完成一件事可分成好幾個步驟，將各步驟的方法數相乘。

[答：72 種]

解 由乘法原理知：

$$6 \times 4 \times 3 = 72 \text{ (種)}$$

將 $(a+b+c)(l+m+n)(x+y+z+t)$ 展開，共可得幾個不同的項？

[答：36 個]

解 由乘法原理知：

$$3 \times 3 \times 4 = 36 \text{ (個)}$$

4

老師講解

乘法原理

學生練習

已知 $N = 360$ ，試求 N 之所有正因數的個數。

想法

將 360 作質因數分解：

$$N = 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

[答：24 個]

解 $N = 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

$\therefore N$ 的正因數必為 $2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma$

其中 $\alpha = 0 \sim 3, \beta = 0 \sim 2, \gamma = 0 \sim 1$

$\therefore N$ 的正因數有：

$$(3+1)(2+1)(1+1) = 24 \text{ (個)}$$

已知 $N = 240$ ，試求 N 之所有正因數的個數。

[答：20 個]

解 $N = 240 = 2^4 \times 3 \times 5$

$\therefore N$ 的正因數必為 $2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma$

其中 $\alpha = 0 \sim 4, \beta = 0 \sim 1, \gamma = 0 \sim 1$

$\therefore N$ 的正因數有：

$$(4+1)(1+1)(1+1) = 20 \text{ (個)}$$

重點二 直線排列

1. n 階乘：

n 為非負整數， n 階乘記作 $n!$ ，定義 $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$ 。



觀念補充 //

規定 $0! = 1$ ，且 $n! = n \times (n-1)!$ 。

2. 排列和計數方法：

從 n 件不同物中，任取 r 個排成一列的方法數： $P_r^n = n \times (n-1) \times \dots \times (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$ 。

當 $r = n$ 時，就是 n 件不同物全取排列： $P_n^n = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1 = n!$ 。

3. 部分相同物的直線排列：

n 件物品中，若有相同的種類，例如：第 1 類有 m_1 件相同，第 2 類有 m_2 件相同，第 3 類有 m_3 件相同，且 $m_1 + m_2 + m_3 = n$ ，將此 n 件物品排成一列，共有 $\frac{n!}{m_1!m_2!m_3!}$ 種不同的排列方法。

4. 有限制的直線排列：

(1) 限制甲、乙必相鄰：先將甲、乙視為一體，排完後再補上甲乙可對調的方法數。

(2) 限制甲、乙不相鄰：先排其他人，再讓甲、乙插入排好的空隙之中。

5. 錯排：

(1) n 人排列，規定甲不排首的方法：

$$\text{全} - (\text{甲排首}) = n! - (n-1)!$$

(2) n 人排列，規定甲不排首且乙不排末的方法：

$$\text{全} - (\text{甲排首}) - (\text{乙排末}) + (\text{甲排首且乙排末}) = n! - 2 \times (n-1)! + (n-2)!$$

6. 重複排列：

從 n 種不同物中任取 r 個來排，若東西可以重複使用是為重複排列，其排法為 n^r 。



觀念補充 //

① 重複排列就是東西可以重複排，所以每次都一樣： $\overbrace{n \times n \times \dots \times n}^{r \text{ 個}} = n^r$ 。

② 直線排列就是東西不可重複排，所以每次都減 1：

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-r+1) = P_r^n。$$

5

老師講解

數字排列問題

學生練習

由數字「0, 1, 2, 3, 4, 5, 6」中，任取 3 個不同數字排成一個三位數，試求有多少個三位數？

想法 依乘法原理處理，但 0 不能放首位。

[答：180 個]

解 因 0 不能放百位，所以百位先填
再來任意排，共 $6 \times 6 \times 5 = 180$ (個)

由數字「0, 1, 2, 3, 4, 5, 6」中，任取 3 個不同數字排成一個三位數，試求可排出多少個偶數？

[答：105 個]

解 偶數中分成個位數為 0 與個位數非 0 兩種

個位數為 0： $\square \square 0$

$$\Rightarrow 6 \times 5 = 30$$

個位數非 0： $\square \square \boxed{2, 4, 6}$

$$\Rightarrow 5 \times 5 \times 3 = 75$$

$$\text{共 } 30 + 75 = 105 \text{ (個)}$$

甲、乙、丙等 6 人排成一列，試求下列各情形之排列數：

- (1) 任意排列。
- (2) 甲必排首位。
- (3) 甲、乙 2 人必相鄰。
- (4) 甲、乙、丙 3 人不相鄰。

甲、乙必相鄰：將甲、乙視為一體，排完後再補上甲、乙可對調的方法數；

想法

甲、乙、丙不相鄰：先排其他人，再讓甲、乙、丙插入排好的空隙之中。

[答：(1) 720 種 (2) 120 種 (3) 240 種
(4) 144 種]

- (解) (1) $6! = 720$ (種)
- (2) $\boxed{\text{甲}}\boxed{\text{乙}}\boxed{\text{丙}}\boxed{\text{丁}}\boxed{\text{戊}}\boxed{\text{己}}$
扣除甲排首位，其餘 5 人任意排
共 $5! = 120$ (種)
- (3) $\boxed{\text{甲}}\boxed{\text{乙}}\boxed{\text{丙}}\boxed{\text{丁}}\boxed{\text{戊}}\boxed{\text{己}}$
甲、乙視為一體 $\Rightarrow 5!$
甲、乙兩人可對調 $\Rightarrow 2!$
共 $5! \times 2! = 240$ (種)
- (4) $\boxed{\quad}\boxed{\text{丁}}\boxed{\quad}\boxed{\text{戊}}\boxed{\quad}\boxed{\text{己}}\boxed{\quad}$
先排丁、戊、己 $\Rightarrow 3!$
將甲、乙、丙插入 4 個空隙 $\Rightarrow P_3^4$
共 $3! \times P_3^4 = 6 \times \frac{4!}{(4-3)!} = 144$ (種)

已知有甲、乙、丙等 7 人共 4 男 3 女，試求下列各排列數：

- (1) 甲排首且乙排末。
- (2) 三位女生必須相鄰。
- (3) 三位女生必須分開。

[答：(1) 120 種 (2) 720 種 (3) 1440 種]

- (解) (1) 扣除甲排首乙排末
其餘 5 人任意排列
共 $5! = 120$ (種)
- (2) $\boxed{\text{女}_1}\boxed{\text{女}_2}\boxed{\text{女}_3}\boxed{\text{男}_1}\boxed{\text{男}_2}\boxed{\text{男}_3}\boxed{\text{男}_4}$
3 女視為一體 $\Rightarrow 5!$
3 女可對調 $\Rightarrow 3!$
共 $5! \times 3! = 120 \times 6 = 720$ (種)
- (3) $\boxed{\quad}\boxed{\text{男}_1}\boxed{\quad}\boxed{\text{男}_2}\boxed{\quad}\boxed{\text{男}_3}\boxed{\quad}\boxed{\text{男}_4}\boxed{\quad}$
4 男先排 $\Rightarrow 4!$
將 3 女插入 5 個空隙 $\Rightarrow P_3^5$
共 $4! \times P_3^5 = 24 \times \frac{5!}{(5-3)!} = 1440$ (種)

7

老師講解

錯排

學生練習

有甲、乙、丙等 6 人排成一列，試求下列各排列數：

- (1) 甲不排首。
- (2) 甲不排首且乙不排末。

想法

利用排容原理，需扣除不符題意或重複計算的部分。

[答：(1) 600 種 (2) 504 種]

解 (1) 甲不排首的方法：

$$\begin{aligned} \text{全} - (\text{甲排首}) &= 6! - 5! \\ &= 600 \text{ (種)} \end{aligned}$$

(2) 甲不排首且乙不排末的方法：

$$\begin{aligned} \text{全} - (\text{甲排首} + \text{乙排末} - \text{甲排首且乙排末}) \\ &= 6! - (5! + 5! - 4!) \\ &= 6! - 2 \times 5! + 4! \\ &= 504 \text{ (種)} \end{aligned}$$

取 A、B、C、D、E 五個字母來排列，試求下列各排列數：

- (1) A 不得排中位。
- (2) A 不排首位且 B 不排末位。

[答：(1) 96 種 (2) 78 種]

解 (1) A 不排中的方法：

$$\begin{aligned} \text{全} - (\text{A 排中}) &= 5! - 4! \\ &= 96 \text{ (種)} \end{aligned}$$

(2) A 不排首且 B 不排末的方法：

$$\begin{aligned} \text{全} - (\text{A 排首} + \text{B 排末} - \text{A 排首且 B 排末}) \\ &= 5! - (4! + 4! - 3!) \\ &= 5! - 2 \times 4! + 3! \\ &= 78 \text{ (種)} \end{aligned}$$

8

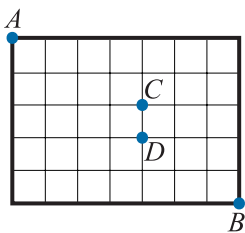
老師講解

走捷徑問題

學生練習

附圖為棋盤型街道，規定由 A 到 B 走捷徑，試求：

- (1) 中途必須經過 C 點，走法有幾種？
- (2) 中途須經過 C 與 D 點，走法有幾種？



若 $n = m_1 + m_2 + m_3$ ，則部分相同物的直線

想法

排列公式為 $\frac{n!}{m_1!m_2!m_3!}$ 。

[答：(1) 300 種 (2) 150 種]

解 (1) $A \rightarrow C \rightarrow B$ ：

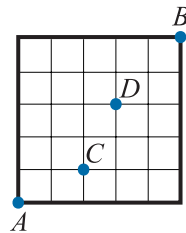
$$\frac{6!}{4!2!} \times \frac{6!}{3!3!} = 300 \text{ (種)}$$

(2) $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B$ ：

$$\frac{6!}{4!2!} \times 1 \times \frac{5!}{2!3!} = 150 \text{ (種)}$$

附圖為一棋盤型街道，試求：

- (1) 由 A 到 B 走捷徑，共有多少種走法？
- (2) 由 A 到 B 須經過 C 或 D 的走法有多少種？



[答：(1) 252 種 (2) 171 種]

解 (1) $A \rightarrow B$ ： $\frac{10!}{5!5!} = 252$ (種)

(2) 過 C 或 D = 過 C + 過 D - 過 C 且過 D

$$\begin{aligned} &= (A \rightarrow C \rightarrow B) + (A \rightarrow D \rightarrow B) \\ &\quad - (A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B) \\ &= \frac{3!}{2!} \times \frac{7!}{3!4!} + \frac{6!}{3!3!} \times \frac{4!}{2!2!} \\ &\quad - \frac{3!}{2!} \times \frac{3!}{2!} \times \frac{4!}{2!2!} \\ &= 3 \times 35 + 20 \times 6 - 3 \times 3 \times 6 \\ &= 171 \text{ (種)} \end{aligned}$$

7

有渡船 3 艘，每船最多可載 5 人，現有 6 人欲安全渡過，其方法有多少種？

想法 重複排列方法為 n^r 。

[答：726 種]

解 全部 - 不合的情況
 = 任意坐 - 6 人同船
 = $3^6 - 3$
 = 726 (種)

小明一家 6 人外出旅遊，分乘 2 部車子，每部車最多搭載 5 人，試求有多少種搭車的方法？

[答：62 種]

解 全部 - 超載情況
 = 任意坐 - 6 人同車
 = $2^6 - 2$
 = 62 (種)

將 5 件不同的獎品隨意分給甲、乙、丙 3 人，試求下列之分法：

(1) 任意給。 (2) 甲至少得 1 件。

想法 重複排列搭配排容原理。

[答：(1) 243 種 (2) 211 種]

解 (1) 每種獎品有 3 種分法，所求
 = $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$
 = 243 (種)
 (2) 全部 - 甲沒有
 = $3^5 - 2^5$
 = 211 (種)

將 5 件不同的獎品隨意分給甲、乙、丙 3 人，試求甲恰得一件的分法。

[答：80 種]

解 甲恰得一件
 ⇒ 先選一件給甲，有 5 種
 其餘 4 件再分給乙、丙，則每件獎品有 2 種分法
 ⇒ 2^4 種
 故 $5 \times 2^4 = 80$ (種)

進階例題

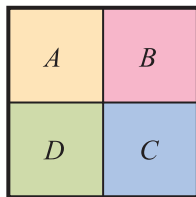
11

老師講解

著色問題

學生練習

以 5 種不同的顏色塗右圖區域，每一區域只塗一色，相鄰區域不得同色，顏色可重複使用，試求共有幾種不同的塗法？



[答：260 種]

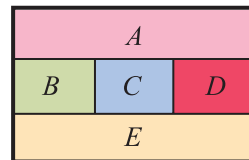
解 設塗的次序為 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$

(1) A 與 C 同色： $5 \times 4 \times 1 \times 4 = 80$

(2) A 與 C 異色： $5 \times 4 \times 3 \times 3 = 180$

由加法原理： $80 + 180 = 260$ (種)

用 5 種不同的顏色塗右圖，顏色可重複使用，但相鄰區域不能同色，試求塗法有多少種？



[答：420 種]

解 依 $C \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow D$ 順序塗色

(1) A、E 同色：

塗法有 $5 \times 4 \times 1 \times 3 \times 3 = 180$

(2) A、E 異色：

塗法有 $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 240$

\therefore 全部塗法有 $180 + 240 = 420$ (種)

12

老師講解

限制排列順序之問題

學生練習

甲、乙、丙、丁、戊、己 6 人排成一列，規定甲在乙右邊，乙在丙右邊之排法有多少種？(註：甲、乙、丙不一定相鄰)

[答：120 種]

解 甲、乙、丙 3 人位置先以 \square 保留

則 $\square \square \square$ 丁戊己

之排法為 $\frac{6!}{3!} = 120$

因甲、乙、丙 3 人順序固定為丙 - 乙 - 甲
1 種

故全部共 120 種排法

將代數學的英文「algebra」各字母重新排列，則子音保持 l、g、b、r 之順序的排法有多少種？

[答：105 種]

解 子音 l、g、b、r 位置先以 \square 保留

則 $\square \square \square \square$ a e a

之排法為 $\frac{7!}{4!2!} = 105$

因 l、g、b、r 之順序固定只有 1 種
故全部共 105 種排法

7-1 段落測驗

★表難題

- 餐飲部供應的菜色為肉品 4 種、海鮮 3 種、蔬菜 5 種及甜點 2 種。小丸子要點肉品、海鮮及蔬菜各 1 種，不點甜點，則共有 60 種點法。
- 千元鈔 2 張，500 元鈔 3 張，100 元鈔 4 張，每次至少取一張，共有 59 種取法。
- 某一鐵路，沿線上有大站 10 站，小站 25 站，則鐵路局應備有 1190 種車票。
- 川劇變臉是將選定的臉譜依序黏在臉上，藉快速逐一扯下臉譜達到變臉的效果。今變臉藝人想從 8 張臉譜中，選出 5 張並依序表演一段變臉秀，共有 6720 種方法。
- 將 1、2、3、4、5、6 六個數字排列，其中 1、3、5 任兩個不相鄰，共有 144 種排法。
- 甲、乙、丙、丁、戊、己、庚 7 人排成一列，若甲、乙須相鄰，丙、丁、戊要分開，共有 288 種排法。
- 有一四位數，千、百位均為奇數，十、個位均為偶數，則共有 400 個數字相異的四位數。
- 將 *banana* 六個字母重新排列，則排法共有 60 種。
- 將「我為人人，人人為我」8 個字作直線排列，則：
 - 任意排列之排法有 420 種。
 - 4 個「人」字必相鄰之排法有 30 種。
- ★10. 將四件相異物，
 - 分給 A、B、C、D 四人，每人一件，其方法有 24 種。
 - 分給 A、B、C 三人，每人可兼得，其方法有 81 種。
 - 分給 A、B、C 三人，每人可兼得，但 A 至少得一件，方法有 65 種。
- 有一排椅子，共有 5 個座位，今有甲、乙、丙、丁、戊共 5 人，各選一個位子坐，但甲、乙、丙三人必需相鄰，共有 36 種坐法。 【統測】
- 三位數中，十位數字是 7 且個位數字是偶數，共有 45 個。 【統測】

7-1 高手過招

- 由數字 0, 1, 2, 3, 4 組成三位數，數字均不重複，試求：
 - 可作成 48 個三位數。
 - 所有作成的三位數之總和為 12990。
- 百貨公司有 4 道門，甲、乙二人由不同門進出一趟，但每人不得由同一門進出，則其方法有 84 種。

7-2 組合

重點一 組合

1. 一般組合：

從 n 件不同物中任意選出 r 件（不用排）的方法數：
$$C_r^n = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}。$$



觀念補充 //

- ① C_r^n 的方法數就是將 P_r^n 中 r 件可以排來排去的 $r!$ 種方法數都只視為 1 種，所以要再除以 $r!$ 。
- ② $C_n^n = 1$ (n 個全選：1 種方法)； $C_0^n = 1$ (n 個都不選：1 種方法)。

2. 餘組合：

$C_r^n = C_{n-r}^n$ ，例如：從 10 人中選出 8 人的方法數與從 10 人中剔除 2 人的方法數一樣，則

$$C_8^{10} = \frac{10!}{8!2!} = \frac{10!}{2!8!} = C_2^{10}。$$

3. 分組分堆：

舉實例說明：

例如：將 4 本不同的雜誌，依下列情況分配，試求其方法數？

- (1) 平分給 A 、 B 兩人。
- (2) 平分成兩堆。
- (3) 依 1 本、3 本分成兩堆。

解：(1) 從 4 本雜誌中任取 2 本給 A ，方法有 $C_2^4 = 6$

再將剩下 2 本分給 B ，方法有 $C_2^2 = 1$

故有 $C_2^4 \times C_2^2 = 6$ (種)

(2) 假設將 4 本雜誌平分成 A 、 B 兩堆之方法有 $C_2^4 \times C_2^2 = 6$

但因兩堆數目相同且無 A 、 B 之分（即不考慮順序），故平分兩堆有 $\frac{C_2^4 C_2^2}{2!} = 3$ (種)

(3) 因兩堆數目不同，視為不同的兩堆，故依 1 本、3 本分堆有 $C_1^4 \times C_3^3 = 4$ (種)



觀念補充 //

若有 m 堆數目相同時，則方法數需再除以 $m!$ 。

C

7

n 是自然數，若 $C_{n+1}^{18} = C_5^{18}$ ，試求 n 之值。

想法 $C_r^n = C_{n-r}^n$ 。

[答：4 或 12]

解 $C_{n+1}^{18} = C_5^{18}$
 $\Rightarrow n+1=5$ 或 $(n+1)+5=18$
 $\Rightarrow n=4$ 或 12

r 是自然數，若 $C_{r+3}^{30} = C_{3r-1}^{30}$ ，試求 r 之值。

[答：2 或 7]

解 $C_{r+3}^{30} = C_{3r-1}^{30}$
 $\Rightarrow r+3=3r-1$ 或 $(r+3)+(3r-1)=30$
 $\Rightarrow r=2$ 或 7

某次考試，規定由 6 題中選作 4 題，但前兩題必須作答，則選題方法有多少種？

想法 $C_r^n = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ 。

[答：6 種]

解 前兩題必須作答，其他 4 題再選作 2 題
 $\Rightarrow C_2^4 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$ (種)

由 12 位立委任選 5 人組成教育委員會，但必須包含最資深的那一位委員，則有多少種選法？

[答：330 種]

解 因有一人必選，再由 11 人中選出 4 人
 $\Rightarrow C_4^{11} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 330$ (種)

3

老師講解

組合概念

學生練習

一群人中，有 4 個白人、5 個黑人與 6 個黃種人，若欲組成包含 2 個白人、2 個黑人與 3 個黃種人的 7 人小組，試求共有多少種組法？

想法 $C_r^n = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ 。

[答：1200 種]

解 白人 4 選 2、黑人 5 選 2、黃種人 6 選 3

$$\begin{aligned} \Rightarrow C_2^4 \times C_2^5 \times C_3^6 \\ = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} \\ = 1200 \text{ (種)} \end{aligned}$$

從 7 名男人和 6 名女人中選取 4 人參加會議，其中至少 2 名為男人，1 名為女人，試求共有多少種選法？

[答：525 種]

解 至少 2 男 1 女

$$\begin{aligned} \text{所求} &= 2 \text{ 男 } 2 \text{ 女} + 3 \text{ 男 } 1 \text{ 女} \\ &= C_2^7 \times C_2^6 + C_3^7 \times C_1^6 \\ &= 315 + 210 \\ &= 525 \text{ (種)} \end{aligned}$$

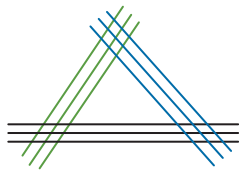
4

老師講解

幾何問題

學生練習

如圖，有三組平行線，每組各有三條直線，則這九條線可決定多少個三角形？



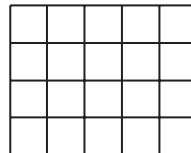
想法 三角形有三個邊，每邊從各組直線中任選。

[答：27 個]

解 $C_1^3 \times C_1^3 \times C_1^3$

$$\begin{aligned} &= 3 \times 3 \times 3 \\ &= 27 \text{ (個)} \end{aligned}$$

右圖中的每一小方格皆為正方形，則圖中共有多少個正方形？多少個矩形？



[答：正方形 40 個，矩形 150 個]

解 正方形個數：

$$\underbrace{4 \times 5}_{\text{邊長 1}} + \underbrace{3 \times 4}_{\text{邊長 2}} + \underbrace{2 \times 3}_{\text{邊長 3}} + \underbrace{1 \times 2}_{\text{邊長 4}} = 40 \text{ (個)}$$

矩形個數：

$$C_2^6 \times C_2^5 = 150 \text{ (個)}$$

C

7

八件相異的衣服，按件數分堆，各堆中不分順序，若：

- (1) 分成 1、3、4 三堆的分法有多少種？
 (2) 分成 2、2、2、2 四堆的分法有多少種？

想法 分堆時若有 n 堆數目相同，需再除以 $n!$ 。

[答：(1) 280 種 (2) 105 種]

解 (1) $C_1^8 \times C_3^7 \times C_4^4$
 $= \frac{8}{1} \times \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} \times 1$
 $= 8 \times 35 \times 1$
 $= 280$ (種)

(2) $C_2^8 \times C_2^6 \times C_2^4 \times C_2^2 \times \frac{1}{4!}$
 $= \frac{8 \times 7}{2 \times 1} \times \frac{6 \times 5}{2 \times 1} \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times 1 \times \frac{1}{24}$
 $= 105$ (種)
 (2、2、2、2 四堆數目相同，需再除以 4!)

本校轉學生有 8 人，將分配到甲班 3 人、乙班 2 人及丙班 3 人就讀，則共有多少種分配方法？

[答：560 種]

解 8 人先依 (3, 2, 3) 分組，再分配至各班先分堆 (3, 2, 3)

$$\Rightarrow \frac{C_3^8 C_2^5 C_3^3}{2!}$$

$$= \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 1 \times \frac{1}{2}$$

$$= 280$$

乙班為 2 人，但甲、丙兩班皆 3 人故分配時需乘以 2!

$$\therefore 280 \times 2! = 560 \text{ (種)}$$

進階例題

櫃子內有 6 雙不同樣式的鞋子，任取 4 隻，試求下列之方法數：

- (1) 4 隻中恰含一雙。
 (2) 4 隻均不成雙。

[答：(1) 240 種 (2) 240 種]

解 (1) 先 6 雙任選 1 雙
 再從剩餘 5 雙中任選 2 雙
 但可挑左右腳
 故共有 $C_1^6 \times C_2^5 \times 2^2 = 240$ (種)
 (2) 6 雙中任選 4 雙，但可挑左右腳
 故共有 $C_4^6 \times 2^4 = 240$ (種)

宴會中有五對夫妻，任選 4 人，試求下列之方法數：

- (1) 4 人恰為兩對夫妻。
 (2) 4 人恰含一對夫妻。

[答：(1) 10 種 (2) 120 種]

解 (1) 5 對夫妻中任選 2 對
 共有 $C_2^5 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$ (種)
 (2) 5 對夫妻先任選 1 對
 再從剩餘 4 對中任選 2 對
 但可挑夫或妻
 故共有
 $C_1^5 \times C_2^4 \times 2^2 = 5 \times 6 \times 4 = 120$ (種)

7

老師講解

組合觀念應用題

學生練習

因乾旱水源不足，自來水公司計畫在下週一至下週日七天內停止供應自來水三天，但考慮民生需求，決定停水的三天完全不相連，試求共有多少種停水方案。

[答：10 種]

解 先將四天供水作排列

再從以下編號 1 ~ 5 的位置中，選擇三個不供水：

1 供水 2 供水 3 供水 4 供水 5

故停水方案共有

$$C_3^5 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10 \text{ (種)}$$

台灣高鐵從第 1 車到第 12 車共有 12 節車廂，為了加強服務乘客，要指定其中 4 節車廂設置自動販賣機。若設置自動販賣機的 4 節車廂兩兩不相銜接，則共有多少種設置的方法？

[答：126 種]

解 車廂先不編號，將 4 節設置販賣機車廂插入其餘 8 節車廂中的 9 個空隙內，完成後再從頭編號

$$\text{故共有 } C_4^9 = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126 \text{ (種)}$$

C

7

7-2 段落測驗

★表難題

1. 設 P_r^n 及 C_r^n 分別表示從 n 個相異物任取 r 個的排列數與組合數，若 $P_3^{n+1} = 12C_2^n$ ，則 $n =$ 5。
2. n 為自然數，若 $C_n^5 = C_{n-1}^5$ ，則 $P_n^{10} =$ 720。
3. 設有 6 個足球隊參加比賽，若任意兩隊都互相比賽一場次，則共有 15 場次的比賽。
4. 某次考試，8 題任選 5 題作答，若規定其中某 2 題必選，則其選法有 20 種。
5. 兩組平行線不同向，其中一組有 8 條，另一組有 5 條，則可圍成 280 個平行四邊形。
6. 平面上相異 10 點，任三點均不共線，則此 10 點共可決定 45 條直線，120 個三角形。
7. 袋中有 14 支籤，其中 5 支可中獎，今任取 5 支籤，則抽到 3 支中獎籤的情形有 360 種。
8. 自編號 1 號到 9 號的 9 顆球中任取兩顆球，試求下列之方法數：
 - (1) 此兩球號碼乘積為偶數的方法數為 26。
 - (2) 此兩球號碼之和為奇數的方法數為 20。
9. 從 8 名男生和 5 名女生中選取 4 人參加羽球比賽，其中至少含 2 名男生和 1 名女生的選法有 560 種。
- ★10. 將 10 件不同的東西按 3、3、4 分給甲、乙、丙三個人，則其方法共有 4200 種。
11. 下列各問題中，何者的解答是 C_6^{10} ？B
 - (A) 10 位學生中任意挑選 6 位同學排成一列，共有幾種情形？
 - (B) 10 個不同顏色的球中任意挑選 4 個出來，共有幾種情形？
 - (C) 10 張椅子排成一列，6 位同學各自任意挑選 1 張椅子坐下，共有幾種情形？
 - (D) 10 個相同的白色球任意挑選 4 個出來，共有幾種情形？

【統測】
- ★12. 將 6 本不同的書分別放在 3 個不同架子上，若每個架子放 2 本，則共有 90 種放法。

7-2 高手過招

1. 從 google 的字母中任取出 4 個字母，則
 - (1) 取法有 8 種。
 - (2) 再將這 4 個字母排成一列，排法有 102 種。



CH 7 素養練功坊

題目

行政院自 2020 年 2 月 6 日起制定以實名制購買口罩的制度，規定身分證末碼為奇數者每週一、三、五可購買，偶數者每週二、四、六可購買，週日則都可以購買，且每人每週限購買一次。已知小華、哥哥及爸媽的身分證末碼分別為 2、5、7、4，且他們打算都在這週購買口罩，試問他們的選擇有多少種？

關 鍵 字 身分證末碼為奇數者週一、三、五可購買
偶數者週二、四、六可購買
週日則都可以購買

單 元 公 式 n 種不同物中任取 r 個來排，可重複使用之排法為 n^r

翻 譯 成 數 學 式 將 4 件不同物任意分給甲乙丙丁 4 人，共有多少種分法？

解 題 依題意

身分證末碼為奇數者，每週一、三、五、日可購買，有 4 種選擇

身分證末碼為偶數者，每週二、四、六、日可購買，也有 4 種選擇

因為可以重複購買，故依重複排列之概念

共有 $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ 種買法

- **回顧：**排列組合是數學單元中最靈活也是最具挑戰性的章節，對不習慣思考只是一味追求公式的同學來說會感覺十分困難。檢視排列組合的本質就是有系統的計數方法，公式只是輔助工具，想學好它的關鍵在於融會貫通，深入透析演算的條理，理解每個步驟背後的數學意義，才是學習的訣竅。



CH 7 素養競技場

★表難題

- ★ 1. 健跑鞋店為與同業進行促銷戰，推出「第二雙不用錢，買一送一」的活動方案。該鞋店共有八款鞋可供選擇，其價格如下：

款式	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛
價格	670	670	700	700	700	800	800	800

規定送鞋的價格一定少於所買鞋的價格（例如：買一個「丁」款鞋，只送甲、乙兩款鞋之一）。若有一位鞋店的顧客使用此方案，則該顧客所帶走的兩雙鞋，其搭配方法共有多少種？

答：21 種

2. 棒球比賽中每隊的先發守備位置有九個：投手、捕手、一壘手、二壘手、三壘手、游擊手、右外野、中外野、左外野各一位。已知某一職棒球隊有 18 位可以先發的球員，由教練團認定可擔任的守備位置球員數情形如下：

（一）投手 4 位、捕手 2 位、一壘手 1 位、二壘手 2 位、三壘手 2 位、游擊手 2 位。

（二）外野手 4 位（每一位外野手都可擔任右外野、中外野或左外野的守備）。

（三）另外 1 位是外籍球員，他可擔任一壘手與右外野的守備。

已知開幕戰的比賽，確定由某位投手先發，而且與此投手最佳搭檔的先發捕手也已確定，並由洋將擔任一壘手守備，其餘六個守備位置就上述可擔任的先發球員隨意安排，則此場開幕戰共有幾種先發守備陣容？（當九個守備位置只要有一個球員不同時，就視為不同的守備陣容）

答：192 種

- ★ 3. 汽車保養場的技師欲將舊輪胎換新，已知每個輪胎都被一根主螺絲釘固定住，必須先拔掉主螺絲釘才能將輪胎拆卸下來，不過不一定拔掉主螺絲釘後就必須立即卸下該輪胎，也可以暫時拔釘但不急著卸胎，試問一位技師要拆卸下四個舊輪胎共有多少種不同的順序？

答：2520 種



高三人的自信

每個人心中都有一個熟睡的巨人，一旦巨人醒來，潛能便能發揮。超越逆境，活出精采，努力開創一個屬於自己的品牌。



CH 7 統測考古題



統測解題影音

★表難題

- (A) 1. 某歌手打算在她的演唱會上表演一段由6首不同的歌曲串成的組曲，其中3首慢歌、3首快歌。她的音樂總監建議在歌曲的安排上最多只能2首慢歌連在一起唱，因為這樣才會使得整個組曲的節奏比較流暢。若她認同並接受音樂總監的建議，試問這段組曲可以有多少種**不同**的安排方式？
(A) 576 (B) 648 (C) 696 (D) 720。 【111(C)】
- (B) 2. 「心公司」想要找設計公司製作招牌，而招牌設計中要先選擇底色，中間則是心公司的單色商標，商標下放上一排單色文字寫上心公司，如圖。已知底色、商標顏色以及文字顏色的選擇有黑、藍、白、黃、紅等五種顏色，且底色不能跟商標顏色相同，也不能跟文字顏色相同，除此之外，並無其他限制。試問這個招牌的顏色設計有幾種選擇？ (A) 60 (B) 80 (C) 100 (D) 120。 【111(B)】
- (B) 3. 跆拳道隊有8個隊員，教練安排所有隊員每2人一組分別在A、B、C、D四個不同場地練習，則共有幾種安排的方式？
(A) 105 (B) 2520 (C) 5040 (D) 40320。 【110(C)】
- (A) 4. 一個空的書櫃有上、中、下共三層，若將國文、英文、數學三本課本放入書櫃的任一層，且當課本放在同一層左右順序不同時視為不同排列，則共有幾種**不同**的排法？ (A) 60 (B) 36 (C) 27 (D) 18。 【110(C)】
- (D) 5. 某款電玩在開始闖關前需進行設定：第一個步驟是選擇難度，由入門、普通或高手等3種難度擇一；第二個步驟由4種盔甲擇一；第三個步驟由5種武器擇一。若必須依序完成這三個步驟，設定才算完成，則有幾種闖關前設定？
(A) 12 (B) 23 (C) 36 (D) 60。 【110(B)】
- (C) 6. 若從1、2、3、4、5、6、7七個數字中取兩個相異數字排成二位數，則所有這些不同的二位數之總和為何？ (A) 42 (B) 924 (C) 1848 (D) 3696。 【110(B)】
- (D) 7. 在一次立法委員選舉中，每位選民須投區域立委與不分區政黨兩種選票，且每種選票均只能圈選一位，否則視為廢票。已知某甲的戶籍地有6位區域立委候選人，而全國共有14個政黨可選擇。若某甲決定去投票，且兩種選票均不投廢票，試問某甲有多少種的投票組合？ (A) 6 (B) 14 (C) 20 (D) 84。 【109(C)】
- (B) 8. 某一個電腦的過關遊戲中，從據點A到據點C必須經過據點B。若從據點A到據點B可以選擇的路徑有2條，從據點B到據點C可以選擇的路徑有3條，則從據點A到據點C有幾種走法？ (A) 5 (B) 6 (C) 8 (D) 9。 【109(B)】
- (B) 9. A學校桌球校隊有甲、乙、丙、丁、戊五位選手，有一天A學校桌球校隊與他校進行友誼賽。由於時間關係，只進行單打、雙打比賽各一場，且兩場比賽同時進行。若任意推出選手參賽（不考慮默契等因素），則A學校可推出的參賽選手名單有多少種？ (A) 12 (B) 30 (C) 125 (D) 243。 【109(B)】

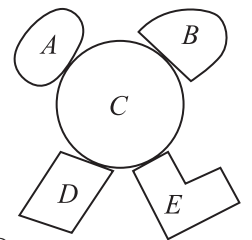


C

7

(A) 10. 某啦啦隊競賽規定，每隊組隊人數 8 人且男、女生均至少 2 人。某班共有 4 名男生與 6 名女生參加啦啦隊競賽，若由此 10 人中依規定選出 8 人組隊，共有多少種組隊方式？ (A) 45 (B) 60 (C) 75 (D) 90。 【108(C)】

(A) 11. 如圖所示，使用 8 種不同顏色塗在圖中標號 A、B、C、D、E 的 5 個格子內，顏色不可重複使用，若規定同一格子僅塗同一顏色，則共可塗出幾種不同的著色樣式？



(A) P_5^8 (B) C_5^8 (C) 5^6 (D) 6^5 。

【108(B)】

(A) 12. 同時投擲四個相異公正骰子，點數 3 出現至多一次情形共有幾種？ (A) 1125 (B) 1185 (C) 1245 (D) 1365。 【107(C)】

(B) 13. 某青年創業開餐廳，擬設計一份有 5 種菜色的菜單。若在原始構思的 7 種菜色中有 2 種為必選，則有幾種不同菜單？ (A) 6 (B) 10 (C) 21 (D) 35。 【107(B)】

(A) 14. 某人想在自家後院牆邊的長條空地種植一排菜苗，共有高麗菜 5 株，萵苣 4 株，菠菜 4 株。若他決定在每兩株高麗菜之間任意種植萵苣或菠菜共兩株，則種植的排列方法有幾種？

(A) $\frac{8!}{4!4!}$ (B) 2^8 (C) $\frac{13!}{4!4!5!}$ (D) $5!4!4!$ 。

【107(B)】

(B) 15. 將繞口令「四十個十四 十四個四十」中的文字全取排成一列，且其中四個「十」須相鄰排在一起，其排法有幾種？

(A) 70 (B) 105 (C) 135 (D) 210。

【106(C)】

(C) 16. 某自助餐店提供 80 元的便當，便當中除了白米飯之外，還包含一種主菜以及三種不同的配菜。若今日提供的主菜有雞腿、排骨、魚排 3 種，另有 8 種不同的配菜，則共可搭配出多少種不同組合的 80 元便當？

(A) 59 (B) 112 (C) 168 (D) 210。

【106(B)】

(B) 17. 某飲料店有 5 位假日工讀生，工作時間有週六的早班與晚班、週日的早班與晚班等 4 個不同時段。一個時段排兩位工讀生上班，如果規定同一人不可以連續排班，至少要隔一個時段上班，則共有幾種排班方式？

(A) 81 (B) 270 (C) 900 (D) 1000。

【106(B)】

(D) 18. 某大賣場一天共有早班、中班、晚班三個值班時段，而每一值班時段皆需二人值班。若某天要安排六名員工值班且每人恰值班一次，則共有多少種排班方式？

(A) 45 (B) 60 (C) 75 (D) 90。

【104(B)】

(A) 20. 將 0、1、2、3、5 五個數字全取，排成一列，可得 4 的倍數的五位數共有多少個？（註：凡末兩位數是 4 的倍數者即為 4 的倍數）

(A) 18 (B) 20 (C) 24 (D) 36。

【統測】