6

數列與級數

雲端教室

6-1 》等差數列與等差級數

重點一 數列與級數

1. **數列：**

   將數字依序排成一列（例如：$2 , 4 , 6 , \cdots , 2n$），習慣表成 $a_1 , a_2 , \cdots , a_n$，簡記為 $\langle a_n \rangle$，其中 a_n 表數列的第 n 項。

2. **級數：**

   將數列之每一項都加起來（例如：$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$），記為 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$。

3. **$\sum$ 符號：**

   $\sum$ 是連加符號，例如：$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$（有限級數）或

   $$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{（無窮級數）。}$$

觀念補充 //

設數列前 n 項和為 S_n，則

❶ $a_1 = S_1$

❷ $a_k = S_k - S_{k-1}$（$k \geq 2$）

4. $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 的性質：

(1) $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k \pm \sum\limits_{k=1}^{n}b_k$。

(2) $\sum\limits_{k=1}^{n}ca_k = c\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$。

(3) $\sum\limits_{k=1}^{n}c = nc$。

5. Σ公式：

(1) $\sum\limits_{k=1}^{n}k = 1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$。

(2) $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$。

(3) $\sum\limits_{k=1}^{n}k(k+1) = 1\times2+2\times3+\cdots+n\times(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$。

(4) $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\cdots+\dfrac{1}{n\times(n+1)}=1-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$。

1　老師講解　數列與級數　學生練習

老師講解

若 $a_n=\dfrac{1}{n^2+3n+2}$，試寫出 $\langle a_n\rangle$ 的前 3 項，並求前 3 項之和。

想法　$n=1$、2、3 代入分別得 a_1、a_2、a_3。

[答：$a_1=\dfrac{1}{6}$，$a_2=\dfrac{1}{12}$，$a_3=\dfrac{1}{20}$，$S_3=\dfrac{3}{10}$]

解　$n^2+3n+2=(n+1)(n+2)$

$a_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

得 $a_1=\dfrac{1}{2\times3}=\dfrac{1}{6}$，$a_2=\dfrac{1}{3\times4}=\dfrac{1}{12}$

$a_3=\dfrac{1}{4\times5}=\dfrac{1}{20}$

$$S_3=\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}$$
$$=\frac{3}{10}$$

學生練習

若 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$，試寫出 $\langle a_n\rangle$ 的前 3 項，並求前 3 項之和。

[答：$a_1=\sqrt{2}-1$，$a_2=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，
$a_3=2-\sqrt{3}$，$S_3=1$]

解　$a_1=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$

$a=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

$a_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}=\sqrt{4}-\sqrt{3}=2-\sqrt{3}$

$$S_3=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(2-\sqrt{3})$$
$$=2-1$$
$$=1$$

2 老師講解 求數列單項 學生練習

若已知某數列前 n 項之和 $S_n = n^2 + 3n$，試求 a_6。

想法 第 n 項 $=$（前 n 項之和）$-$（前 $(n-1)$ 項之和）。

[答：14]

解 $a_6 = S_6 - S_5$
$= (6^2 + 18) - (5^2 + 15)$
$= 14$

某數列前 n 項之和 $S_n = 3n^2 + 5n + 7$，試求 a_5。

[答：32]

解 $a_5 = S_5 - S_4$
$= (3 \times 5^2 + 5 \times 5 + 7)$
$-(3 \times 4^2 + 5 \times 4 + 7)$
$= 32$

3 老師講解 求有限級數之和 學生練習

試求下列各有限級數的和：

(1) $\sum_{n=1}^{10} n(n+2)$　(2) $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n(n+2)}$

想法
$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$；
$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$。

[答：(1) 495　(2) $\frac{175}{264}$]

解 (1) 原式 $= \sum_{n=1}^{10} n^2 + \sum_{n=1}^{10} 2n$
$= \frac{10 \times (10+1) \times (2 \times 10 + 1)}{6}$
$+ \frac{10 \times (10+1)}{2} \times 2$
$= 495$

(2) 原式
$= \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \cdots + \frac{1}{10 \times 12}$
$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)\right.$
$\left. + \cdots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right)\right]$
$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{11} - \frac{1}{12}\right)$
$= \frac{175}{264}$

試求下列各有限級數的和：

(1) $\sum_{n=1}^{10} (2n-1)(2n+1)$

(2) $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

[答：(1) 1530　(2) $\frac{10}{21}$]

解 (1) 原式
$= \sum_{n=1}^{10} (4n^2 - 1) = \sum_{n=1}^{10} 4n^2 - \sum_{n=1}^{10} 1$
$= 4 \times \frac{10 \times (10+1) \times (2 \times 10 + 1)}{6} - 10$
$= 1530$

(2) 原式
$= \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{19 \times 21}$
$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)\right.$
$\left. + \cdots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21}\right)\right]$
$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{21}\right)$
$= \frac{10}{21}$

重點二 等差數列與等差級數

1. 等差數列與等差級數：

一個規則數列，寫成：$a_1, a_1+d, a_1+2d, \cdots, a_1+(n-1)d$，稱為等差數列，其中 d 為公差。

(1) 一般項公式：$a_n = a_1+(n-1)d$ 或 $a_n = a_m+(n-m)d$。

(2) 前 n 項和公式：$S_n = \dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ 或 $S_n = \dfrac{[2a_1+(n-1)d]\times n}{2}$。

(3) 等差中項：若三個數 a、b 與 c 成等差數列，則 b 稱為 a、c 的等差中項，即 $b=\dfrac{a+c}{2}$，又稱為算術平均數。

4 等差數列求一般項

老師講解

設一等差數列第 4 項為 -6，第 7 項為 12，試求第 20 項。

想法：一般項 $a_n = a_1+(n-1)d$ 或 $a_n = a_m+(n-m)d$。

[答：90]

解 $a_7 = a_4+(7-4)d$

$\Rightarrow d = \dfrac{12-(-6)}{3} = 6$

$\therefore a_{20} = a_7+(20-7)d = 12+13\times 6 = 90$

學生練習

已知等差數列的第 3 項為 19，第 7 項為 3，試求第 18 項。

[答：-41]

解 $a_7 = a_3+(7-3)d$

$\Rightarrow d=-4$

$\therefore a_{18} = a_7+(18-7)d$

$= 3+11\times(-4)$

$=-41$

5 等差數列

老師講解

有一等差數列第 8 項是 10，第 13 項是 -20，試求：

(1) 首項。 (2) 自第幾項開始是負數？

想法：若第 n 項為負數，則滿足 $a_n = a_1+(n-1)d<0$。

[答：(1) 52 (2) 第 10 項]

解 (1) $a_{13} = a_8+(13-8)d$

$\Rightarrow d = \dfrac{-20-10}{5} = -6$

$\therefore a_1 = a_8-7d = 10-7\times(-6) = 52$

(2) 設自第 n 項開始是負數，則

$a_n = a_1+(n-1)\times(-6) = 58-6n<0$

$\Rightarrow 6n>58 \Rightarrow n>9\dfrac{2}{3}$

取 $n=10$，故自第 10 項開始是負數

學生練習

已知等差數列的第 3 項是 35，第 11 項是 3，試求：

(1) 首項。 (2) 自第幾項始為負數？

[答：(1) 43 (2) 第 12 項]

解 (1) $a_{11} = a_3+(11-3)d$

$\Rightarrow d=\dfrac{3-35}{8}=-4$

$\therefore a_1 = a_3-2d = 35-2\times(-4) = 43$

(2) 設自第 n 項開始是負數，則

$a_n = 43+(n-1)\times(-4)<0$

$\Rightarrow 4n>47$

$\Rightarrow n>11.75$

取 $n=12$，故自第 12 項開始是負數

6 等差中項

老師講解

若有三數成等差數列，其和為 21，其積為 280，試求此三數。

想法　三數成等差數列，設此三數為 $a-d, a, a+d$。

[答：4 , 7 , 10 或 10 , 7 , 4]

解　設此三數為 $a-d, a, a+d$

則其和 $(a-d)+a+(a+d)=3a=21$

$\Rightarrow\ a=7$

其積 $(7-d)\times 7\times(7+d)=280$

$\Rightarrow\ (7-d)(7+d)=40$

$\Rightarrow\ d^2=9$

$\Rightarrow\ d=\pm 3$

若 $d=3$，三數為 4 , 7 , 10

若 $d=-3$，三數為 10 , 7 , 4

學生練習

若有三數成等差數列，其和為 12，其平方和為 56，試求此三數。

[答：2 , 4 , 6 或 6 , 4 , 2]

解　設此三數為 $a-d, a, a+d$

則其和 $(a-d)+a+(a+d)=3a=12$

$\Rightarrow\ a=4$

其平方和 $(4-d)^2+4^2+(4+d)^2=56$

$\Rightarrow\ d^2=4$

$\Rightarrow\ d=\pm 2$

若 $d=2$，三數為 2 , 4 , 6

若 $d=-2$，三數為 6 , 4 , 2

7 等差數列之變化

老師講解

在 3 與 61 之間插入 28 個數，使其成等差數列，試求此數列的第 7 項及此數列中奇數項之和。

想法　一般項 $a_n=a_1+(n-1)d$。

[答：15，465]

解　依題意 $a_1=3$，$a_{30}=61$

$a_{30}=a_1+29d\ \Rightarrow\ 61=3+29d$

$\Rightarrow\ d=2$

$\therefore\ a_7=a_1+(7-1)d=3+6\times 2=15$

又所有奇數項為公差 $d'=4$ 之等差數列，則

$$a_1+a_3+\cdots+a_{29}=\left[\frac{2a_1+(n-1)d'}{2}\right]\times n$$

$$=\left(\frac{6+14\times 4}{2}\right)\times 15$$

$$=465$$

學生練習

在 5 與 93 之間插入 21 個數，使其成等差數列，試求插入之第 10 個數及此數列中偶數項之和。

[答：45，539]

解　依題意 $a_1=5$，$a_{23}=93$

$a_{23}=a_1+22d\ \Rightarrow\ 93=5+22d$

$\Rightarrow\ d=4$

所插入第 10 個數

$a_{11}=a_1+10d=5+10\times 4=45$

又所有偶數項為公差 $d'=8$ 之等差數列，則

$$a_2+a_4+\cdots+a_{22}=\left[\frac{2a_2+(n-1)d'}{2}\right]\times n$$

$$=\left(\frac{2\times 9+10\times 8}{2}\right)\times 11$$

$$=539$$

★ 8 老師講解 **等差級數之變化** 學生練習

一凸多邊形的諸內角角度成等差數列，其公差為 4°，最大內角為 172°，試求此多邊形的邊數。

想法 前 n 項和 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$。

[答：12]

解 設此凸多邊形共 n 邊，$d=4^\circ$，$a_n=172^\circ$

$a_n=a_1+(n-1)\times 4^\circ=172^\circ$

$\Rightarrow\ a_1=176^\circ-4n$

凸多邊形內角和為 $(n-2)\times 180^\circ$

$$180\times(n-2)=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=\frac{n}{2}\left[(176-4n)+172\right]$$

$\Rightarrow\ n^2+3n-180=0$

$\Rightarrow\ (n-12)(n+15)=0$

$\Rightarrow\ n=12$ 或 $n=-15$（不合）

一凸多邊形的諸內角角度成等差數列，最小內角為 126°，公差為 4°，試求此多邊形的邊數。

[答：10]

解 設此凸多邊形共 n 邊，$d=4^\circ$，$a_1=126^\circ$

$a_n=126^\circ+(n-1)\times 4^\circ=122^\circ+4^\circ n$

凸多邊形內角和為 $(n-2)\times 180^\circ$

$$180\times(n-2)=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=\frac{n}{2}\left[126+(122+4n)\right]$$

$\Rightarrow\ n^2-28n+180=0$

$\Rightarrow\ (n-10)(n-18)=0$

$\Rightarrow\ n=10$ 或 18

（不合，$\because\ a_{18}=122^\circ+4^\circ\times 18=194^\circ>180^\circ$）

C

6

6-1 段落測驗

★表難題

1. 已知 $S_n = 2n^2 - n + 1$，則 $a_6 =$ ___21___ 。

2. 若 $\sum_{n=1}^{9} a_n = 160$ ， $\sum_{n=1}^{10} b_n = 290$ ，且 $a_{10} = 10$，則 $\sum_{n=1}^{10}(2a_n - b_n) =$ ___50___ 。

3. $\sum_{k=1}^{12}(k-1)(2k+1) =$ ___1210___ 。

4. 已知一等差數列，第 12 項為 54，第 30 項為 144，則此數列的第 20 項為___94___ 。

5. 自 100 到 200 的整數中，被 4 除餘 3 者，這些數的和為___3775___ 。

6. 有一等差數列第 5 項為 120，公差為 -4：
   (1) 若第 k 項為 64，則 $k =$ ___19___ 。
   (2) 自第___36___項開始是負數。

7. 已知一等差級數之首項為 10，公差為 6，前 n 項和為 780，則項數 $n =$ ___15___ 。

8. 若將 4、10、20 分別加上 x、$2x$、$7x$ 後，三數成等差數列，則 $x =$ ___-1___ 。

9. 等差級數 $7 + 10\frac{2}{3} + 14\frac{1}{3} + 18 + \cdots$ ，其前 16 項的和為___552___ 。

10. 已知數列 $a_k = 3k - 4$，$k = 1, 2, \cdots, 100$，則下列敘述何者正確？___D___ 。
    (A) 此數列為等差數列，公差為 -4 (B) 95 為此數列的第 34 項
    (C) $\sum_{k=1}^{100}(3k-4) = 3\sum_{k=1}^{100}k - 4$ (D) $a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} = 85$ 【統測】

11. 某人跑 10 公里路程，第一公里 5 分鐘完成，第二公里 5 分 15 秒完成，第三公里 5 分 30 秒完成，依此類推，即全程的每一公里以此等差數列的時間完成，總共需花費的時間為___61 分 15 秒___ 。 【統測】

12. 若數列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 的第 n 項 $a_n = \frac{2n}{3}$ ，則 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{20} =$ ___140___ 。 【統測】

13. 設級數 $\sum_{i=1}^{n} a_i = n^2 - 99$ ，則 $\sum_{i=6}^{10} a_i =$ ___75___ 。 【統測】

6-1 高手過招

1. 已知一等差數列共有十項，且知其奇數項之和為 15，偶數項之和為 30，則此數列之公差為___3___ 。

2. 已知二等差數列之第 n 項的比為 $(2n+3):(6n+4)$，則此二等差數列之前 9 項和的比為___13：34___ 。

6-2 等比數列與等比級數

重點一　等比數列與等比級數

1. 等比數列與等比級數：

一個規則數列，寫成：$a_1, a_1r, a_1r^2, \cdots, a_1r^{n-1}$，稱為等比數列，其中 r（$r \neq 0$）為公比。

(1) 一般項公式：$a_n = a_1r^{n-1}$ 或 $a_n = a_m \times r^{n-m}$。

(2) 前 n 項和公式：

① 當 $r = 1$，$S_n = na_1$。

② 當 $r \neq 1$，$S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ 或 $\dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1}$。

(3) 等比中項：若三個數 a、b 與 c 成等比數列，則 b 稱為 a、c 的等比中項，即：$b = \pm\sqrt{ac}$（正負均可），其中 $\sqrt{ac}$ 又稱為幾何平均數。

1　老師講解　等比數列求一般項　學生練習

老師講解

設一等比數列第 3 項為 $\dfrac{4}{3}$，第 6 項為 $\dfrac{32}{3}$，試求第 10 項。

想法　等比數列一般項公式：
$a_n = a_1r^{n-1}$ 或 $a_n = a_m \times r^{n-m}$。

[答：$\dfrac{512}{3}$]

解　$a_6 = a_3 \times r^{6-3}$

$\Rightarrow \dfrac{32}{3} = \dfrac{4}{3} \times r^3$

$\Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$

$\therefore a_{10} = a_6 \times r^{10-6}$

$= \dfrac{32}{3} \times 2^4$

$= \dfrac{512}{3}$

學生練習

設一等比數列第 4 項為 2，第 7 項為 $\dfrac{1}{4}$，試求第 10 項。

[答：$\dfrac{1}{32}$]

解　$a_7 = a_4 \times r^{7-4}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{4} = 2 \times r^3$

$\Rightarrow r^3 = \dfrac{1}{8} \Rightarrow r = \dfrac{1}{2}$

$\therefore a_{10} = a_7 \times r^{10-7}$

$= \dfrac{1}{4} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^3$

$= \dfrac{1}{32}$

2 老師講解 等比數列之變化 學生練習

在 162 與 2 之間插入 7 個正數，使其成等比數列，試求所插入的第 4 個數。

想法 等比數列一般項：$a_n = a_1 r^{n-1}$。

[答：18]

解 依題意 $a_1 = 162$，$a_9 = 2$

$$a_9 = a_1 \times r^{9-1} \Rightarrow 2 = 162 \times r^8$$
$$\Rightarrow r^8 = \frac{1}{81}$$
$$\Rightarrow r^2 = \frac{1}{3}$$

所插入的第 4 個數

$$a_5 = a_1 \times r^{5-1} = 162 \times r^4$$
$$= 162 \times (r^2)^2 = 162 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2$$
$$= 18$$

在 128 與 4 之間插入 19 個數，使其成等比數列，試求所插入的第 12 個數。

[答：16]

解 依題意 $a_1 = 128$，$a_{21} = 4$

$$a_{21} = a_1 \times r^{21-1} \Rightarrow 4 = 128 \times r^{20}$$
$$\Rightarrow r^{20} = \frac{1}{32}$$
$$\Rightarrow r^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

所插入的第 12 個數

$$a_{13} = a_1 \times r^{13-1} = 128 \times r^{12}$$
$$= 128 \times (r^2)^6 = 128 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6$$
$$= 16$$

3 老師講解 等比中項 學生練習

試求 $2-\sqrt{3}$ 與 2 的等比中項。

想法 等比中項 $b = \pm\sqrt{ac}$。

[答：$\pm\left(\sqrt{3}-1\right)$]

解 等比中項 $= \pm\sqrt{2\left(2-\sqrt{3}\right)}$

$$= \pm\sqrt{4-2\sqrt{3}}$$
$$= \pm\left(\sqrt{3}-1\right)$$

試求 $\frac{50}{27}$ 與 $\frac{3}{8}$ 的等比中項。

[答：$\pm\frac{5}{6}$]

解 等比中項 $= \pm\sqrt{\frac{50}{27} \times \frac{3}{8}} = \pm\frac{5}{6}$

4 老師講解　求等比數列之公比　學生練習

設四正數 a, b, c, d 成等比數列，且 $a+b=24$，$c+d=6$，試求 a、b、c、d 四數。

想法　公比 r，則 $b=ar$，$c=ar^2$，$d=ar^3$。

[答：$a=16$，$b=8$，$c=4$，$d=2$]

解　設公比為 r，則 $b=ar$，$c=ar^2$，$d=ar^3$

$\therefore\ a+b=a+ar=a(1+r)=24\cdots\cdots①$

$c+d=ar^2+ar^3=ar^2(1+r)=6\cdots\cdots②$

$\frac{②}{①}$ 得 $r^2=\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ r=\pm\frac{1}{2}$（負不合）

代回 ① 得 $a=16$

故 $a=16$，$b=8$，$c=4$，$d=2$

設四正數 a, b, c, d 成等比數列，且 $a+d=18$，$b+c=12$，又 $a<b<c<d$，試求此等比數列之公比。

[答：2]

解　設公比為 r，則 $b=ar$，$c=ar^2$，$d=ar^3$

$\therefore\ a+d=a+ar^3=a(1+r^3)=18\cdots\cdots①$

$b+c=ar+ar^2=ar(1+r)=12\cdots\cdots②$

$\frac{①}{②}$ 得 $\frac{1+r^3}{r(1+r)}=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow\ \frac{(1+r)(1-r+r^2)}{r(1+r)}=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow\ \frac{1-r+r^2}{r}=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow\ 2r^2-5r+2=0$

$\Rightarrow\ (2r-1)(r-2)=0$

$\Rightarrow\ r=2$ 或 $\frac{1}{2}$（不合）

5 老師講解　等比級數　學生練習

已知一等比級數共 10 項，首項為 $-\frac{1}{2}$，公比為 -2，試求此級數之和。

想法　等比級數公式：$S_n=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$。

[答：$\frac{341}{2}$]

解　$a_1=-\frac{1}{2}$，$r=-2$

$$S_{10}=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left[1-(-2)^{10}\right]}{1-(-2)}=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-1023)}{3}=\frac{341}{2}$$

已知一等比級數第 4 項是 -16，第 7 項是 128，試求前 10 項之和。

[答：-682]

解　$a_7=a_1\times r^6=128\cdots\cdots①$

$a_4=a_1\times r^3=-16\cdots\cdots②$

$\frac{①}{②}$ 得 $r^3=-8\ \Rightarrow\ r=-2$

代回 ① 得 $a_1=2$

$$S_{10}=\frac{2\times\left[1-(-2)^{10}\right]}{1-(-2)}=\frac{2\times(-1023)}{3}=-682$$

某人以年利率 5% 向銀行借款十萬元，採複利計息，則 3 年後需歸還銀行本利和共多少元？（四捨五入取至整數位，$(1.05)^3 = 1.157625$）

想法 複利之本利和 $= P(1+r)^n$。

[答：115763 元]

解 $\because$ $P = 100000$，$r = 5\%$，$n = 3$

$\therefore$ 本利和

$= P(1+r)^n$

$= 100000 \times (1+5\%)^3$

$= 100000 \times (1.05)^3$

$= 115762.5$

$\fallingdotseq 115763$（元）

阿姐在年初辦了信用貸款向銀行借三十萬元應急，年利率 10%，採複利計息，則 5 年後需歸還銀行本利和共多少元？（四捨五入取至整數位，$(1.1)^5 = 1.61051$）

[答：483153 元]

解 $\because$ $P = 300000$，$r = 10\%$，$n = 5$

$\therefore$ 本利和

$= P(1+r)^n$

$= 300000 \times (1+10\%)^5$

$= 300000 \times (1.1)^5$

$= 483153$（元）

6-2 段落測驗

★表難題

1. 已知一等比數列的首項為 5，第 7 項為 135，則其公比為 $\underline{\quad \pm\sqrt{3} \quad}$。

2. 已知一等比級數第 2 項為 6，公比為 2，則前 10 項之和為 $\underline{\quad 3069 \quad}$。

3. 若 a、b 與 6 成等差數列，b、a 與 16 成等比數列，則數對 $(a, b) =$ $\underline{\quad (12, 9)\text{或}(-4, 1) \quad}$。

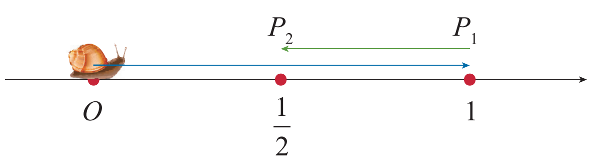
4. 在 -6 與 192 之間插入 n 個數，使其成等比數列，已知插入的第二數為 -24，則 $n =$ $\underline{\quad 4 \quad}$。

5. 設三數 a、b、c 成等比數列且和為 39，已知 $a < b < c$，若依序減 1、2、12 後，新的三數成等差數列，則原三數 a、b、c 為 $\underline{\quad 4, 10, 25 \quad}$。

6. 一等比級數共有 6 項，公比為 $-\dfrac{2}{3}$，和為 133，則此等比級數的第 4 項為 $\underline{\quad -72 \quad}$。

7. 等比級數 $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n = 3280$，則 $n =$ $\underline{\quad 7 \quad}$。

★ 8. 數線上，一隻蝸牛由原點出發，如圖所示。牠第一次向右移動 1 單位，到達點 P_1，第二次向左移動 $\dfrac{1}{2}$ 單位，到點 P_2，而後依先向右再向左的方式移動，而且每次移動的距離都是前一次距離的 $\dfrac{1}{2}$，如此依序移動到點 P_3、P_4、…，則點 P_7 的坐標為 $\underline{\quad \dfrac{43}{64} \quad}$。



9. 設 a、b、c、d 四正數成等比數列，若 $ab = \dfrac{cd}{81}$，則此數列的公比為 $\underline{\quad 3 \quad}$。　【統測】

10. 若一等比級數的首項為 3，公比為 4，和為 4095，則此級數共有 $\underline{\quad 6 \quad}$ 項。　【統測】

6-2 高手過招

1. 阿誠年初向銀行借了五十萬元買車子，年利率 10%，採複利計息。若他想分四年還清，每年年底還一次，每次所還款項相等，則阿誠每年應還 $\underline{\quad 157735 \quad}$ 元。（四捨五入至整數位，$(1.1)^4 = 1.4641$）

題目

老鼠打洞是一項本能，除了便於藏身隱匿外，在緊急狀況時還可以避難逃逸。有一面厚度為 33 公分的木頭牆，大小兩隻老鼠面對面穿牆。已知第一日大老鼠穿牆 1 公分，小老鼠穿牆 $\frac{1}{2}$ 公分，接下來，大老鼠每日都比前一日多穿牆 $\frac{1}{2}$ 公分，而小老鼠每日僅比前一日多穿牆 $\frac{1}{4}$ 公分，試求幾日後大小兩隻老鼠可以將牆穿通。

關鍵字　厚度為 33 公分的木頭牆

大老鼠每日比前一日多穿牆 $\frac{1}{2}$ 公分，小老鼠每日比前一日多穿牆 $\frac{1}{4}$ 公分

單元公式　首項 a_1，公差 d，項數 n，則前 n 項和 $S_n=\frac{[2a_1+(n-1)d]\times n}{2}$

翻譯成數學式　已知兩等差數列之首項分別為 1 與 $\frac{1}{2}$，公差分別為 $\frac{1}{2}$ 與 $\frac{1}{4}$，

設前 n 項和為 S_n，試求當 $S_n\geq 33$ 時之項數 n 為何？

解題　我們探尋規律，依據等差級數的概念

找到 S_n 之首項與公差後代入等差級數之求和公式

假設第 n 日大小兩隻老鼠合計可穿牆 a_n 公分

根據題意，首項 a_1 為 $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，公差 d 為 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，代入求和公式得

$$S_n=\frac{[2a_1+(n-1)d]\times n}{2}=\frac{\left[2\times\frac{3}{2}+\frac{3}{4}(n-1)\right]\times n}{2}=\frac{3n^2+9n}{8}$$

當大小兩隻老鼠恰好穿牆而過時，需滿足 $S_n\geq 33$，亦即 $\frac{3n^2+9n}{8}\geq 33$

整理後得二次不等式 $n^2+3n-88\geq 0$

再來因式分解得 $(n-8)(n+11)\geq 0$

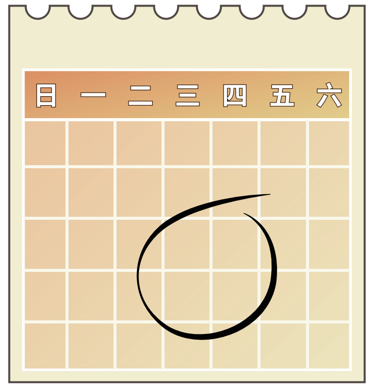
解出 $n\geq 8$ 或 $n\leq -11$（負數不合）

故第 8 日後大小兩隻老鼠會將牆穿通

- **回顧：**等差級數、等比級數與 Σ 運算是基礎數學的重要概念，請務必按部就班，認真思考公式的推演與來龍去脈。數學已經被廣泛應用在日常生活當中，在學習上應從觀察問題出發，歷經從文字陳述的閱題到抽象符號的認知來掌握數學的邏輯思路，以審慎的觀點來練習分析並觀察數列的規律，進而理解等差數列與等比數列結構上的差異。

★表難題

★ 1. 某檢察官在偵查一件多年前的刑事懸案時，意外發現證物中有一張不知年份的 3 月份月曆紙，由於年代已久，上面的日期油墨已褪色，只知檢察官用黑筆所圈的 4 天之日期和為 76，試求該年的 4 月 1 日是星期幾。



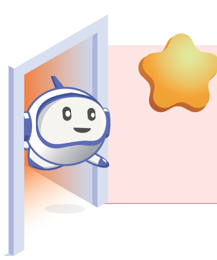
答：星期六

★ 2. 通常俗稱手部是指手掌和手指，如果將手部細部拆解來看，可以發現手部的基本構造中包含了骨頭與一些伸屈肌肉，而人類的大拇指自指尖到腕骨是由三塊骨頭所組成的。令自指尖到腕骨的這三塊骨頭的長度分別為 a_1、a_2、a_3，依據一份醫學期刊統計，當 a_1、a_2、a_3 為等比數列且滿足 $a_3 = a_2 + a_1$，此時大拇指的形狀被認為是最完美的型態比例，試求完美大拇指之三塊骨頭長度的公比。

答：$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

3. 在流行病學上有一種指標為「基本傳染數 R_0」，是指在沒有外力介入且每個人都沒有免疫力的情況下，一名感染者將疾病傳染給其他人的平均數，例如 $R_0 = 2$ 表示每日新增感染人數為原來的 2 倍。假設某年 4 月 1 日第 1 個病毒感染者出現，且 $R_0 = 2$，試問從 4/1 ～ 4/11 這段時間共有多少人受到感染？

答：2047 人



高三人的願景

不要讓自己的人生過得荒腔走板，樹的方向由風決定，人的方向自己決定。態度決定成敗，氣度決定成就。

統測解題影音

★表難題

(B) 1. 已知等比數列$\langle a_k \rangle$的首項 $a_1 = 2$，公比 $r = 3$。若前 n 項和大於 2022，則滿足條件的最小正整數 $n =$ ？
(A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) 11。 【111(C)】

(D) 2. 若 $a = \sum_{m=1}^{7} \frac{m-2}{2m-1}$，$b = \sum_{k=0}^{6} \frac{k-1}{2k+1}$，$c = \sum_{i=3}^{8} \frac{i-4}{2i-5}$，則下列敘述何者正確？
(A) $b > a > c$ (B) $c > a > b$ (C) $c > a = b$ (D) $a = b > c$。 【110(C)】

(B) 3. 某棒球投手自 4 月 1 日開始每天練投，他每日投球數為等差數列。若 4 月 5 日投球數為 41 個，4 月 13 日為 73 個，則他 4 月份有幾天投球數超過 100 個？
(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13。 【109(C)】

(B) 4. 某部以「尋寶」為主題的電影中，男主角進到第二道關卡時看到了一扇巨大的鐵門，門邊有 100 個按鈕，每個按鈕都有一個數字，分別是從 1 到 100。牆上有一個過關提示，上面印著：「有一個等差數列，其第 11 項和第 16 項分別為 31 和 56，按下該數列第 20 項數字的按鈕，鐵門就會打開」，則按下哪一個數字的按鈕就會開門？
(A) 65 (B) 76 (C) 83 (D) 99。 【109(B)】

(C) 5. 已知$\langle a_n \rangle$為等差數列且滿足 $a_1 > 0$，$a_5 = 3a_{12}$。則當 n 為多少時，a_n 開始為負數？
(A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17。 【108(C)】

(D) 6. $\sum_{n=1}^{10}(2^n + 3n + 2) =$
(A) 1268 (B) 1298 (C) 2017 (D) 2231。 【107(C)】

(A) 7. 若一等差數列的第 10 項為首項的 4 倍，且首項不為 0，則該數列的第 6 項為第 2 項的幾倍？
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5。 【107(B)】

★(A) 8. 設 a、b、c 三數成等比數列，且滿足 $a + b + c = 9$ 及 $a^2 + b^2 + c^2 = 189$，則等比中項 $b =$
(A) -6 (B) -2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 6。 【106(C)】

(C) 9. 若 a 為正整數，且 1、a、$2a$ 為等比數列，則 $a^2 + 1 =$
(A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) 10。 【106(B)】

★(C) 10. 設 a、b、c、d、e、f 六數成等比數列，且已知 $a+c+e=168$，$b+d+f=84$，則 d 之值為何？
(A) 6　(B) 9　(C) 16　(D) 32。【105(C)】

(A) 11. 已知 $S_n = 1\frac{1}{1}+2\frac{1}{2}+3\frac{1}{4}+\cdots+\left(n+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$，則 S_{10} 之值為何？
(A) $56\frac{511}{512}$　(B) $56\frac{1023}{1024}$　(C) $57\frac{511}{512}$　(D) $57\frac{1023}{1024}$。【105(B)】

(C) 12. 若某細菌每 30 分鐘分裂一次，即由 1 個變成 2 個，依此比例，則 1 個細菌經過 6 小時後，分裂成多少個？
(A) 1024　(B) 2048　(C) 4096　(D) 8192。【105(B)】

(D) 13. 已知四個正數 a、b、c、d 為一等比數列， 若 $a+b=20$，$a+b+c+d=65$，則 $a=$ ？
(A) 5　(B) 6　(C) 7　(D) 8。【104(C)】

(B) 14. 已知一等差數列之第 3 項為 8，第 7 項為 20，則該等差數列之第 32 項為何？
(A) 93　(B) 95　(C) 96　(D) 98。【104(B)】

(B) 15. 設一等比級數的第三項為 4，公比為 $-\frac{1}{3}$，前 n 項和為 $\frac{6560}{243}$，則 n 之值為何？
(A) 7　(B) 8　(C) 9　(D) 10。【統測】

(A) 16. 設 a、b、c 三個數均為正實數，且已知 $a+c=36$，若 a、b、12 三數成等差數列，且 2、b、c 三數成等比數列，則下列敘述何者**有誤**？
(A) $b+c=32$　(B) $a+b=12$　(C) $b^2=2c$　(D) $2b=a+12$。【統測】

(B) 17. 求 102 到 2013 間，個位數字為 7 的正整數共有幾個？
(A) 190　(B) 191　(C) 192　(D) 193。【統測】

(D) 18. 已知 $\sum_{k=1}^{100} a_k = 205$、$\sum_{k=1}^{100} b_k = 26$，求 $\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{a_k}{5}-\frac{b_k}{2}+1\right)$之值。
(A) 29　(B) 68　(C) 80　(D) 128。【統測】

(B) 19. 求級數 $7+8-9+10+11-12+\cdots$到第 99 項的和，其中級數每一項的絕對值成等差數列且 3 的倍數項為負數。
(A) 1778　(B) 1782　(C) 1888　(D) 1906。【統測】

C
6