# 5 直線與圓

雲端教室

## 5-1 直線方程式

| 課綱即時報 | |
|---|---|
| 新增 | 無 |
| 刪除 | 交角平分線方程式 |

### 重點一 斜率與斜角

**1. 斜率：**

過 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 兩點（$x_1 \neq x_2$）的直線斜率 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$（或 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$）。

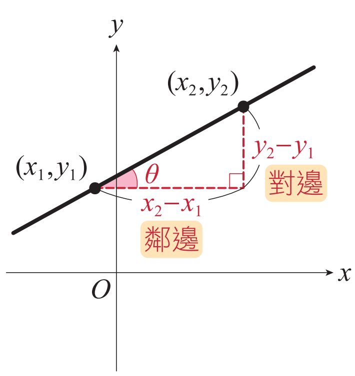
**觀念補充 //**

當直線與 $x$ 軸垂直時斜率不存在，而水平線的斜率為 0。

**2. 斜角：**

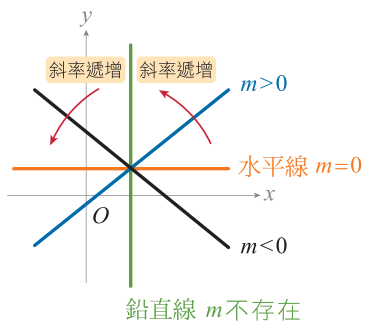
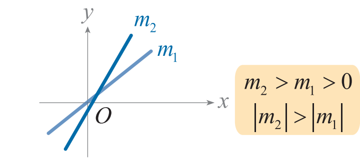
(1) 直線與 $x$ 軸正向所夾的最小正角 $\theta$ 稱為直線的斜角。斜角取值的範圍：$0^\circ \le \theta < 180^\circ$。

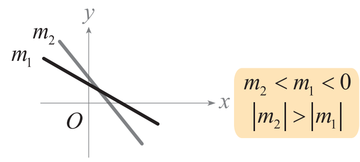
(2) 如圖，若直線的斜角為 $\theta$，其正切值恰為直線的斜率，即 $m=\tan\theta$。




$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\tan\theta$$

### 3. 直線斜率的性質：

<table>
<tr><th>斜率的正、負方向</th><th>斜率的絕對值愈大，<br>直線的傾斜程度愈大</th><th>兩直線的平行與垂直</th></tr>
<tr><td>
</td><td>


</td><td>(1) $L_1 \mathbin{/\!/} L_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 = m_2$<br>(2) $L_1 \perp L_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 \times m_2 = -1$</td></tr>
</table>

### 4. 三點共線：

同一條直線的斜率必相同，若 $A$、$B$、$C$ 三點共線 $\Rightarrow$ $m_{\overline{AB}} = m_{\overline{BC}}$。

## 1　老師講解　**認識斜率**　學生練習

試求過 $A$、$B$ 兩點的直線斜率：

(1) $A(3,7)$、$B(-1,11)$

(2) $A(-3,2)$、$B(7,2)$

(3) $A(5,1)$、$B(5,-4)$

想法　直線斜率 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，
當直線垂直 $x$ 軸時斜率不存在。

[ 答：(1) $-1$　(2) 0　(3) 斜率不存在 ]

解 (1) $m_{\overline{AB}} = \dfrac{11-7}{-1-3} = -1$

(2) $m_{\overline{AB}} = \dfrac{2-2}{7-(-3)} = 0$

(3) $m_{\overline{AB}} = \dfrac{-4-1}{5-5} = \dfrac{-5}{0}$（斜率不存在）

$\triangle ABC$ 之三頂點為 $A(2,1)$、$B(-4,3)$、$C(4,6)$，試求 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 的斜率。

[ 答：$-\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{3}{8}$，$\dfrac{5}{2}$ ]

解 $m_{\overline{AB}} = \dfrac{3-1}{-4-2} = -\dfrac{1}{3}$

$m_{\overline{BC}} = \dfrac{6-3}{4-(-4)} = \dfrac{3}{8}$

$m_{\overline{AC}} = \dfrac{6-1}{4-2} = \dfrac{5}{2}$

## 2 三點共線

老師講解　　　學生練習

設 $A(-2,-1)$、$B(6,3)$、$C(k,5)$，
若 $A$、$B$、$C$ 三點在一直線上，試求 $k$ 值。

想法 $A$、$B$、$C$ 三點共線 $\Rightarrow$ $m_{\overline{AB}}=m_{\overline{BC}}$。

[ 答：10 ]

解 由 $m_{\overline{AB}}=m_{\overline{BC}}$

$\Rightarrow \dfrac{-1-3}{-2-6}=\dfrac{3-5}{6-k}$

$\Rightarrow k=10$

設 $P_1(2,4)$、$P_2(a,0)$、$P_3(-2,8)$為共線之三點，則 $a=$ ？

[ 答：6 ]

解 由 $m_{\overline{P_1P_2}}=m_{\overline{P_1P_3}}$

$\Rightarrow \dfrac{0-4}{a-2}=\dfrac{8-4}{-2-2}$

$\Rightarrow a-2=4$

$\Rightarrow a=6$

## 3 平行與垂直

老師講解　　　學生練習

設 $A(-1,6)$、$B(4,1)$、
$C(0,2k+1)$、$D(k+1,6)$，

(1) 若 $\overline{AB}\,/\!/\,\overline{CD}$，試求 $k$ 之值。

(2) 若 $\overline{AB}\perp\overline{CD}$，試求 $k$ 之值。

想法
(1) $L_1\,/\!/\,L_2 \Leftrightarrow m_1=m_2$。
(2) $L_1\perp L_2 \Leftrightarrow m_1\times m_2=-1$。

[ 答：(1) 6　(2) $\dfrac{4}{3}$ ]

解 (1) $m_{\overline{AB}}=m_{\overline{CD}}$

$\Rightarrow \dfrac{1-6}{4-(-1)}=\dfrac{6-(2k+1)}{k+1-0}$

$\Rightarrow -1=\dfrac{5-2k}{k+1}$

$\Rightarrow k=6$

(2) $m_{\overline{AB}}\times m_{\overline{CD}}=-1$

$\Rightarrow (-1)\times\dfrac{5-2k}{k+1}=-1$

$\Rightarrow \dfrac{5-2k}{k+1}=1$

$\Rightarrow k=\dfrac{4}{3}$

設 $A(-1,3)$、$B(2,5)$、$C(a,a+1)$、
$D(-a,3-a)$，

(1) 若 $\overline{AB}\,/\!/\,\overline{CD}$，試求 $a$ 之值。

(2) 若 $\overline{AB}\perp\overline{CD}$，試求 $a$ 之值。

[ 答：(1) 3　(2) $\dfrac{2}{5}$ ]

解 (1) $m_{\overline{AB}}=m_{\overline{CD}}$

$\Rightarrow \dfrac{5-3}{2-(-1)}=\dfrac{(3-a)-(a+1)}{-a-a}$

$\Rightarrow \dfrac{2}{3}=\dfrac{2-2a}{-2a}$

$\Rightarrow a=3$

(2) $m_{\overline{AB}}\times m_{\overline{CD}}=-1$

$\Rightarrow \dfrac{2}{3}\times\dfrac{2-2a}{-2a}=-1$

$\Rightarrow a=\dfrac{2}{5}$

## 重點二　直線方程式

**1. 截距：**

直線與 $x$ 軸交點的 $x$ 坐標為 $x$ 截距；與 $y$ 軸交點的 $y$ 坐標為 $y$ 截距。

直線 $ax+by+c=0$ 之 $x$ 截距為 $-\dfrac{c}{a}$，$y$ 截距為 $-\dfrac{c}{b}$。

**2. 直線方程式的表示法：**

| 已知／表示法 | 直線上的點 | 斜率 | $x$ 截距 | $y$ 截距 | 直線方程式 |
|---|---|---|---|---|---|
| 點斜式 | $(x_1, y_1)$ | $m$ | | | $y-y_1=m(x-x_1)$ |
| 斜截式 | | $m$ | | $b$ | $y=mx+b$ |
| 截距式 | | | $a$ | $b$ | $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$（$ab\neq 0$） |

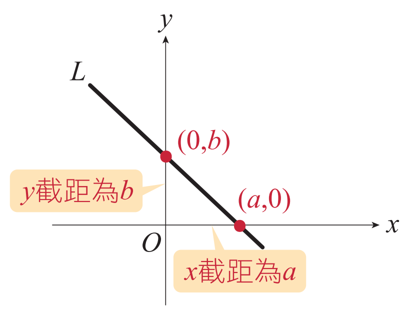
**觀念補充 //**

❶ 一般式：$ax+by+c=0$

① 當 $b\neq 0$，$ax+by+c=0$ 的斜率為 $-\dfrac{a}{b}$。

② 當 $b=0$，表鉛直線，斜率不存在。

❷ 直線 $L$：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 與兩坐標軸所形成的三角形面積為 $\dfrac{1}{2}|ab|$，如圖。




**3. 特殊直線方程式：**

(1) $y$ 軸方程式為 $x=0$。

(2) $x$ 軸方程式為 $y=0$。

**4. 平行線與垂直線的假設法：**

直線 $L$：$ax+by+c=0$（ $a$、$b$ 不同時為 0 ）

(1) 與 $L$ 平行的直線可假設為 $ax+by+k=0$（$k\neq c$）。

(2) 與 $L$ 垂直的直線可假設為 $bx-ay+k=0$。

試求下列各直線方程式：

(1) 過點 $(-4,-3)$，斜率為 $\dfrac{3}{5}$。

(2) 過兩點 $A(2,5)$、$B(6,-5)$。

(3) 斜率為 2，$y$ 截距為 5。

(4) $x$ 截距為 $-5$，$y$ 截距為 $-4$。

想法 點斜式：$y-y_1=m(x-x_1)$，
斜截式：$y=mx+b$，
截距式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$。

[ 答：(1) $3x-5y-3=0$ (2) $5x+2y-20=0$
(3) $y=2x+5$ (4) $4x+5y+20=0$ ]

解 (1) 點斜式：

$$y-(-3)=\frac{3}{5}[x-(-4)]$$

$\Rightarrow$ $3(x+4)=5(y+3)$

$\Rightarrow$ $3x-5y-3=0$

(2) $m_{\overline{AB}}=\dfrac{5-(-5)}{2-6}=-\dfrac{5}{2}$

代點斜式：

$$y-5=-\frac{5}{2}(x-2)$$

$\Rightarrow$ $5x+2y-20=0$

(3) 斜截式：$y=2x+5$

(4) 截距式：

$$\frac{x}{-5}+\frac{y}{-4}=1$$

$\Rightarrow$ $4x+5y+20=0$

試求下列各直線方程式：

(1) 過點 $(-1,1)$，斜率為 $\dfrac{1}{2}$。

(2) 過兩點 $A(-8,5)$、$B(6,5)$。

(3) 斜率為 $-3$，$y$ 截距為 $-3$。

(4) $x$ 截距為 5，$y$ 截距為 3。

[ 答：(1) $x-2y+3=0$ (2) $y-5=0$
(3) $y=-3x-3$ (4) $3x+5y-15=0$ ]

解 (1) 點斜式：

$$y-1=\frac{1}{2}[x-(-1)]$$

$\Rightarrow$ $x-2y+3=0$

(2) $m_{\overline{AB}}=\dfrac{5-5}{6-(-8)}=0$

代點斜式：

$$y-5=0[x-(-8)]$$

$\Rightarrow$ $y-5=0$

(3) 斜截式：$y=-3x-3$

(4) 截距式：

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$$

$\Rightarrow$ $3x+5y-15=0$

## 5 老師講解 直線的平行與垂直 學生練習

(1) 若直線 $L$ 過原點且與 $6x-y+3=0$ 平行，則 $L$ 的方程式為何？

(2) 已知直線 $L$ 垂直 $4x+3y+7=0$，若 $L$ 與兩軸圍成的三角形面積為 6，則 $L$ 的方程式為何？

想法
直線 $L$：$ax+by+c=0$
(1) 與 $L$ 平行可設為 $ax+by+k=0$。
(2) 與 $L$ 垂直可設為 $bx-ay+k=0$。

[ 答：(1) $6x-y=0$ (2) $3x-4y\pm 12=0$ ]

解 (1) 設 $L$：$6x-y+k=0$

將 $(0,0)$ 代入 $L$

$\Rightarrow\ 0-0+k=0$

$\Rightarrow\ k=0$

故 $L$：$6x-y=0$

(2) 設 $L$：$3x-4y+k=0$

$x$ 截距：$\dfrac{-k}{3}$，$y$ 截距：$\dfrac{k}{4}$

由三角形面積公式

$\Rightarrow\ \dfrac{1}{2}\times\left|\left(\dfrac{-k}{3}\right)\times\left(\dfrac{k}{4}\right)\right|=6$

$\Rightarrow\ k^2=144$

$\Rightarrow\ k=\pm 12$

故 $L$：$3x-4y\pm 12=0$

(1) 設直線 $L$ 過點 $(-1,7)$，且平行 $3x-4y+3=0$，則 $L$ 的方程式為何？

(2) 已知直線 $L$ 與 $2x+y+5=0$ 垂直，且過點 $(-1,2)$，則 $L$ 的方程式為何？

[ 答：(1) $3x-4y+31=0$ (2) $x-2y+5=0$ ]

解 (1) 設 $L$：$3x-4y+k=0$

將 $(-1,7)$ 代入 $L$

$\Rightarrow\ -3-28+k=0$

$\Rightarrow\ k=31$

故 $L$：$3x-4y+31=0$

(2) 設 $L$：$x-2y+k=0$

將 $(-1,2)$ 代入 $L$

$\Rightarrow\ -1-4+k=0$

$\Rightarrow\ k=5$

故 $L$：$x-2y+5=0$

## 重點三 點到直線的距離

**1. 點到直線的距離：**

點 $P(x_0,y_0)$ 到直線 $L$：$ax+by+c=0$ 的距離 $d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

**2. 兩平行線之距離：**

兩平行線 $L_1$：$ax+by+c_1=0$ 與 $L_2$：$ax+by+c_2=0$ 間之距離 $d=\dfrac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

## 6 老師講解　點到直線的距離　學生練習

設 $A(1,1)$，直線 $x+y+1=0$，試求點 $A$ 到直線之距離。

想法　點 $P(x_0,y_0)$ 到直線 $L：ax+by+c=0$ 的距離 $d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

[ 答：$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ ]

解　$d=\dfrac{|1+1+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

已知直線 $L：x-2y-4=0$，$A(4,-3)$，試求點 $A$ 到直線 $L$ 之距離。

[ 答：$\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ ]

解　$d=\dfrac{|4+6-4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{5}}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

## 7 老師講解　兩平行線的距離　學生練習

直線 $L$ 和 $3x+4y-6=0$ 平行且距離為 3，則 $L$ 的方程式為何？

想法　兩平行線 $L_1：ax+by+c_1=0$ 與 $L_2：ax+by+c_2=0$ 間之距離 $d=\dfrac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

[ 答：$3x+4y+9=0$ 或 $3x+4y-21=0$ ]

解　設 $L：3x+4y+k=0$

$d=\dfrac{|k-(-6)|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$

$\Rightarrow\ k+6=\pm 15$

$\Rightarrow\ k=9$，$-21$

故 $L：3x+4y+9=0$ 或 $3x+4y-21=0$

已知直線 $L$ 與 $2x-y+1=0$ 平行且距離為 $\sqrt{5}$，則 $L$ 的方程式為何？

[ 答：$2x-y+6=0$ 或 $2x-y-4=0$ ]

解　設 $L：2x-y+k=0$

$d=\dfrac{|k-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

$\Rightarrow\ |k-1|=5\ \Rightarrow\ k-1=\pm 5$

$\Rightarrow\ k=6$ 或 $-4$

故 $L：2x-y+6=0$ 或 $2x-y-4=0$

進階例題

8 老師講解 **由截距式求直線與坐標軸所圍面積** 學生練習

設 $L:\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$（$a>0$，$b>0$）過點 $A(2,3)$，若 $L$ 與兩軸所圍成的三角形面積為 12，試求 $a+2b$。

[ 答：16 ]

解 $A(2,3)$代入 $L$ 中

$\Rightarrow\ \dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{b}=1\cdots\cdots①$

$\Delta=\dfrac{1}{2}ab=12$

$\Rightarrow\ ab=24\cdots\cdots②$

由 ② 得 $a=\dfrac{24}{b}$ 代入 ①

$\Rightarrow\ \dfrac{b}{12}+\dfrac{3}{b}=1$

$\Rightarrow\ b^2+36=12b$

$\Rightarrow\ b^2-12b+36=0$

$\Rightarrow\ (b-6)^2=0$

$\Rightarrow\ b=6$

$\therefore\ a=4$，故 $a+2b=16$

設 $L:\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$（$a>0$，$b<0$）過點 $A(3,2)$，若 $L$ 與兩軸所圍成的三角形面積為 4，試求 $2a-3b$。

[ 答：16 ]

解 $A(3,2)$代入 $L$ 中

$\Rightarrow\ \dfrac{3}{a}+\dfrac{2}{b}=1$

$\Rightarrow\ 3b+2a=ab\cdots\cdots①$

$\Delta=\left|\dfrac{ab}{2}\right|=4$

$\Rightarrow\ ab=-8$（$a>0$，$b<0$）$\cdots\cdots②$

由 ② 得 $a=\dfrac{-8}{b}$ 代入 ①

$\Rightarrow\ 3b-\dfrac{16}{b}=-8$

$\Rightarrow\ 3b^2+8b-16=0$

$\Rightarrow\ (3b-4)(b+4)=0$

$\Rightarrow\ b=-4$ 或 $\dfrac{4}{3}$（不合）

$\therefore\ a=\dfrac{-8}{-4}=2$

故 $2a-3b=4-(-12)=16$

# 5-1 段落測驗

★表難題

1. 設 $A(5,k)$、$B(k,3)$，若 $\overleftrightarrow{AB}$ 的斜角為 $\dfrac{\pi}{4}$，則 $k=$ __4__。

2. 已知 $A(2,1)$、$B(6,3)$、$C(k,5)$三點在坐標平面上**無法**構成一個三角形，
則 $k=$ __10__。

3. 三角形三頂點為 $A(-3,-4)$、$B(3,4)$、$C(k,0)$，且 $\angle BCA=90^\circ$，則 $k^2=$ __25__。

4. 若點 $P(a,2)$和 $Q(3,b)$的連線與直線 $L：x+y=3$ 垂直，則 $a+b=$ __5__。

5. 坐標平面上一點在直線 $L_1$ 上滑動，若橫坐標每增加 1，則縱坐標減少 3。$L_2$ 為另一條垂直於 $L_1$ 的直線，則 $L_2$ 的斜率為 __$\dfrac{1}{3}$__。

6. 設直線 $L$ 通過點 $A(2,-1)$及 $B(2,4)$，則 $L$ 的方程式為 __$x-2=0$__。

7. 垂直 $3x-2y-1=0$ 且 $y$ 截距為 2 的直線方程式為 __$2x+3y-6=0$__。

8. 兩直線 $L_1：x=ay-b$ 與 $L_2：by=ax+1$ 相交於$(1,3)$，則 $L_2$ 的斜率為 __1__。

9. 直線 $L$ 的 $x$ 截距為 $-2$，$y$ 截距為 3，則 $L$ 的斜率為 __$\dfrac{3}{2}$__。

10. 設點 $P(1,a)$在第四象限，若 $P$ 到直線 $3x+4y+3=0$ 的距離為 2，則 $a=$ __$-4$__。

11. $L_1$、$L_2$ 為平行 $3x+4y=0$ 之二直線，若 $L_1$ 過$(-29,23)$，$L_2$ 過$(31,23)$，則此二平行線之距離為 __36__。【統測】

12. 平面上四點 $A(1,1)$、$B(a,2)$、$C(b,-1)$、$D(0,-2)$，其中 $b$ 為正數，若 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 互相平行，且 $\overline{BD}$ 與 $\overline{AC}$ 互相垂直，求 $a+2b$ 之值為 __10__。【統測】

13. 直線 $L_1：2x-y-1=0$，$L_2：x+3y-4=0$，$L_3：x+ay+3=0$，若 $L_1$、$L_2$、$L_3$ 三直線相交於一點，則 $a=$ __$-4$__。【統測】

# 5-1 高手過招

1. 設 $P_1(1,1)$、$P_2(-2,-1)$，直線 $x+y+1=0$ 與 $\overline{P_1P_2}$ 交於 $P$，則 $\overline{P_1P}：\overline{P_2P}=$ __$3:2$__。

2. 若直線 $y=mx+2$ 與$|x|+|y|=1$相交，則 $m$ 之範圍為 __$m\geq 2$ 或 $m\leq -2$__。

# 5-2 圓方程式

## 重點一　圓方程式

1. **圓：**

平面上所有到一定點等距離之點所形成的圖形稱為圓。定點 $M$ 為圓心，定距離 $r$ 為半徑。

2. **圓的方程式：**

(1) 標準式：圓心 $(h,k)$，半徑 $r$，則圓的標準式為 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$。

(2) 一般式：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$。

配方得：$\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+\left(y+\frac{e}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(d^2+e^2-4f\right)$，

令圓的判別式 $\Delta=d^2+e^2-4f$：

| 判別式 $\Delta$ | 圖形 |
|---|---|
| $\Delta>0$ | 表一圓：圓心 $\left(-\frac{d}{2},-\frac{e}{2}\right)$，$r=\frac{1}{2}\sqrt{d^2+e^2-4f}$ |
| $\Delta=0$ | 表一點：$\left(-\frac{d}{2},-\frac{e}{2}\right)$ |
| $\Delta<0$ | 沒有圖形 |

**觀念補充 //**

過不共線之三點求圓的方程式，將此三點坐標代入圓一般式，找出係數 $d$、$e$、$f$。

(3) 參數式：

① 圓：$x^2+y^2=r^2$ 參數式為 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$（$0\leq\theta<2\pi$）。

② 圓：$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 參數式為 $\begin{cases}x=h+r\cos\theta\\y=k+r\sin\theta\end{cases}$（$0\leq\theta<2\pi$）。

## 1 圓的判別式

老師講解

若方程式 $x^2+y^2-4x+6y-12+k=0$ 表一圓，則 $k$ 的範圍為何？

想法　圓的判別式 $\Delta=d^2+e^2-4f>0$ 表一圓。

[ 答：$k<25$]

解　$\Delta=d^2+e^2-4f>0$

$\Rightarrow\ (-4)^2+6^2-4(-12+k)>0$

$\Rightarrow\ 100-4k>0$

$\Rightarrow\ k<25$

學生練習

若方程式 $x^2+y^2+ax-2y+a=0$ 表一點，試求 $a$ 之值。

[ 答：2 ]

解　$\Delta=d^2+e^2-4f=0$

$\Rightarrow\ a^2+(-2)^2-4a=0$

$\Rightarrow\ (a-2)^2=0$

$\Rightarrow\ a=2$

## 2 圓的標準式

老師講解

試求圓心 $M(2,-1)$，且過 $P(5,3)$的圓方程式。

想法　圓心 $(h,k)$，半徑 $r$，則圓的標準式為 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 。

[ 答：$(x-2)^2+(y+1)^2=25$ ]

解　$r=\overline{MP}=\sqrt{(5-2)^2+(3+1)^2}=5$

$\therefore$　圓的標準式：$(x-2)^2+(y+1)^2=25$

學生練習

試求圓心 $M(0,3)$，且過 $Q(3,7)$ 的圓方程式。

[ 答：$x^2+(y-3)^2=25$ ]

解　$r=\overline{MQ}=\sqrt{3^2+(7-3)^2}=5$

$\therefore$　圓的標準式：$x^2+(y-3)^2=25$

## 3 圓的標準式

老師講解　　學生練習

已知一圓通過 $(-1,-1)$ 及 $(1,3)$ 兩點，且圓心在 $x$ 軸上，試求此圓方程式。

想法　圓心 $(h,k)$，半徑 $r$，則圓的標準式為 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$。

[ 答：$(x-2)^2+y^2=10$ ]

解　設圓心 $(t,0)$

$r=\sqrt{(t+1)^2+1^2}=\sqrt{(t-1)^2+(-3)^2}$

$\Rightarrow\ t^2+2t+2=t^2-2t+10$

$\Rightarrow\ t=2$

即圓心 $(2,0)$，$r=\sqrt{10}$

$\therefore$ 圓方程式為 $(x-2)^2+y^2=10$

試求通過兩直線 $x+4y-1=0$ 與 $2x+3y+3=0$ 的交點，且圓心為 $(1,-1)$ 的圓方程式。

[ 答：$(x-1)^2+(y+1)^2=20$ ]

解　$\begin{cases}x+4y-1=0\\2x+3y+3=0\end{cases}$

$\Rightarrow\ (x,y)=(-3,1)$

$r=\sqrt{[1-(-3)]^2+(-1-1)^2}=\sqrt{20}$

$\therefore$ 圓方程式為 $(x-1)^2+(y+1)^2=20$

## 4 外接圓方程式

老師講解　　學生練習

已知 $A(-1,2)$、$B(1,3)$、$C(-3,-1)$，試求 $\triangle ABC$ 的外接圓方程式。

想法　過三點求圓方程式，代圓一般式：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$，求 $d$、$e$、$f$。

[ 答：$x^2+y^2-5x+5y-20=0$ ]

解　設圓：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$

過 $(-1,2)$

$\Rightarrow\ 5-d+2e+f=0\cdots\cdots①$

過 $(1,3)$

$\Rightarrow\ 10+d+3e+f=0\cdots\cdots②$

過 $(-3,-1)$

$\Rightarrow\ 10-3d-e+f=0\cdots\cdots③$

解得 $d=-5$，$e=5$，$f=-20$

$\therefore$ 圓方程式為 $x^2+y^2-5x+5y-20=0$

相異四點 $A(3,0)$、$B(0,2)$、$C(1,1)$、$D(6,k)$ 在同一圓上，試求 $k$ 之值。

[ 答：0 或 11 ]

解　設圓：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$

$A(3,0)$、$B(0,2)$、$C(1,1)$ 代入得

$\begin{cases}9+3d+f=0\cdots\cdots①\\4+2e+f=0\cdots\cdots②\\2+d+e+f=0\cdots\cdots③\end{cases}$

解得 $d=-9$，$e=-11$，$f=18$

$\therefore$ 圓方程式為 $x^2+y^2-9x-11y+18=0$

再將 $D(6,k)$ 代入圓方程式

$\Rightarrow\ k^2-11k=0$

$\Rightarrow\ k=0$ 或 $11$

C

5

## 5 老師講解　圓的參數式　學生練習

將圓$x^2+y^2+2x+4y-11=0$化為參數式。

想法　圓$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$的參數式為
$\begin{cases}x=h+r\cos\theta\\y=k+r\sin\theta\end{cases}$。

[ 答：$\begin{cases}x=-1+4\cos\theta\\y=-2+4\sin\theta\end{cases}$（$0\le\theta<2\pi$）]

解　將圓化成標準式

$\Rightarrow\ (x+1)^2+(y+2)^2=4^2$

$\therefore$ 參數式為

$\begin{cases}x=-1+4\cos\theta\\y=-2+4\sin\theta\end{cases}$（$0\le\theta<2\pi$）

化圓參數式$\begin{cases}x=-1+2\cos\theta\\y=5+2\sin\theta\end{cases}$（$0\le\theta<2\pi$）為標準式，並求圓心及半徑。

[ 答：標準式為$(x+1)^2+(y-5)^2=4$，
圓心$(-1,5)$，半徑為 2 ]

解　$\begin{cases}x+1=2\cos\theta\cdots\cdots①\\y-5=2\sin\theta\cdots\cdots②\end{cases}$

由$①^2+②^2$得$(x+1)^2+(y-5)^2=4$

$\therefore$ 圓心坐標為$(-1,5)$，$r=2$

## 進階例題

## 6 老師講解　利用圓的參數式求極值　學生練習

已知$P$為圓$C:x^2+y^2=4$上之任意點，試求$4x-3y+2$之最大值與最小值。

[ 答：最大值為 12，最小值為 $-8$ ]

解　法一

由柯西不等式：

$(x^2+y^2)\left[4^2+(-3)^2\right]\ge(4x-3y)^2$

$\Rightarrow\ 4\times25\ge(4x-3y)^2$

$\Rightarrow\ -10\le4x-3y\le10$

得$-8\le4x-3y+2\le12$

故最大值為 12，最小值為 $-8$

法二

設圓參數式：

$\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=2\sin\theta\end{cases}$（$0\le\theta<2\pi$）

代入$4x-3y+2$中得$8\cos\theta-6\sin\theta+2$

因$-10\le8\cos\theta-6\sin\theta\le10$

故$-8\le8\cos\theta-6\sin\theta+2\le12$

已知$P$為圓$C:(x-1)^2+y^2=5$上之任意點，試求$x+2y-3$之最大值與最小值。

[ 答：最大值為 3，最小值為 $-7$ ]

解　法一

由柯西不等式：

$\left[(x-1)^2+y^2\right](1^2+2^2)\ge\left[(x-1)+2y\right]^2$

$\Rightarrow\ 5\times5\ge(x+2y-1)^2$

$\Rightarrow\ -5\le x+2y-1\le5$

得$-7\le x+2y-3\le3$

故最大值為 3，最小值為 $-7$

法二

設圓參數式：

$\begin{cases}x=1+\sqrt5\cos\theta\\y=\sqrt5\sin\theta\end{cases}$（$0\le\theta<2\pi$）

代入$x+2y-3$中得

$\sqrt5\cos\theta+2\sqrt5\sin\theta-2$

因$-5\le\sqrt5\cos\theta+2\sqrt5\sin\theta\le5$

故$-7\le\sqrt5\cos\theta+2\sqrt5\sin\theta-2\le3$

## 5-2 段落測驗

★表難題

1. 圓方程式 $2x^2+2y^2-6x+10y-15=0$，則其圓心為 $\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right)$，半徑為 $4$。

2. 以 $A(1,5)$ 為圓心且過點 $P(3,2)$ 的圓方程式為 $(x-1)^2+(y-5)^2=13$。

3. 設方程式 $x^2+y^2+(3m+1)x-my+\frac{5}{4}=0$ 為一點，則 $m=$ $\frac{2}{5}$ 或 $-1$。

4. 已知圓的面積為 $9\pi$，圓的方程式為 $2x^2+2y^2-4x+4y+k=0$，則 $k=$ $-14$。

5. 平面上過兩點 $A(2,4)$ 和 $B(-1,1)$ 且圓心在 $x$ 軸上的圓方程式為 $(x-3)^2+y^2=17$。

6. 已知 $A(2,-1)$、$B(0,3)$，則以 $\overline{AB}$ 為直徑的圓方程式為 $(x-1)^2+(y-1)^2=5$。

★ 7. 若方程式 $x^2+y^2+4kx-6ky+12k^2+(-4k)-8=0$ 表一圓時，則圓面積最小時之圓方程式為 $(x-4)^2+(y+6)^2=4$。

★ 8. 一圓通過 $A(4,-2)$ 且與 $x$、$y$ 軸均相切，則此圓方程式為 $(x-2)^2+(y+2)^2=4$ 或 $(x-10)^2+(y+10)^2=100$。

★ 9. 設一圓與直線 $L_1：3x-4y+7=0$，$L_2：3x-4y-3=0$ 均相切，且圓心在直線 $L：x-2y+2=0$ 上，則此圓方程式為 $(x-2)^2+(y-2)^2=1$。

10. 在坐標平面上，$A(2,4)$、$B(2,-4)$、$C(8,-2)$ 為圓上相異三點，若 $O(h,k)$ 為其圓心，則 $h+k=$ $4$。 【統測】

11. 由三直線 $x-y=7$，$x+2y=1$，$3x-y=3$ 所圍成之三角形，其外接圓方程式為 $x^2+y^2-2x+10y+1=0$。

12. 已知方程式 $y=\sqrt{4-x^2}$，將此方程式化成參數式可表示為 $\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases}$，$0\le\theta\le\pi$。

## 5-2 高手過招

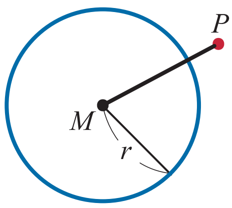
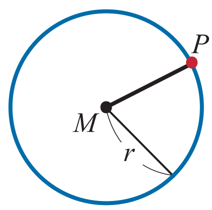
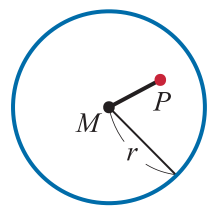
1. 若 $(x+1)^2+(y-1)^2=4$，則 $x+2y$ 的最大值為 $1+2\sqrt{5}$，最小值為 $1-2\sqrt{5}$。

# 5-3 》圓與直線的關係

## 重點一 圓的幾何關係

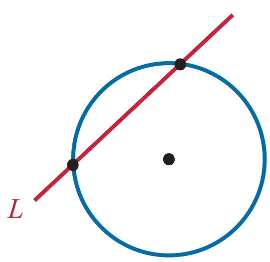
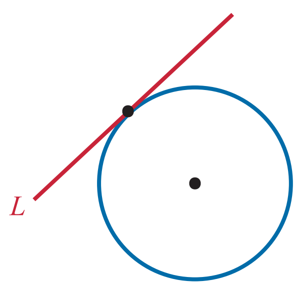
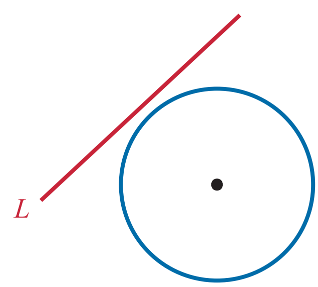
**1 圓與點的關係：**

點 $P(x_0, y_0)$，圓 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$

| $x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}+dx_0+ey_0+f>0$ | $x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}+dx_0+ey_0+f=0$ | $x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}+dx_0+ey_0+f<0$ |
|---|---|---|
| $P$ 點在圓外<br>$\Leftrightarrow$ $\overline{MP}>r$（$r$ 為半徑） | $P$ 點在圓上<br>$\Leftrightarrow$ $\overline{MP}=r$（$r$ 為半徑） | $P$ 點在圓內<br>$\Leftrightarrow$ $\overline{MP}<r$（$r$ 為半徑） |
| <br>點在圓外 | <br>點在圓上 | <br>點在圓內 |

**2. 圓與直線的關係：**

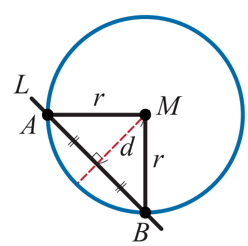
設圓心 $M$，半徑 $r$

| $d(M, L)<r$ | $d(M, L)=r$ | $d(M, L)>r$ |
|---|---|---|
| 圓 $C$ 與直線 $L$ 相交於兩點 | 圓 $C$ 與直線 $L$ 相交於一點 | 圓 $C$ 與直線 $L$ 不相交 |
| <br>相割 | <br>相切 | <br>相離 |

**3. 求弦長：**

如圖，設圓 $C$ 與直線 $L$ 交於 $A$、$B$ 兩點且圓心到 $L$ 的距離為 $d$，半徑為 $r$，

則弦長 $\overline{AB}=2\sqrt{r^2-d^2}$ 。



**4. 圓的切線方程式：**

(1) 過圓上一點 $P(x_0, y_0)$ 求切線方程式：

① 給圓標準式：

$x^2+y^2=r^2$，切線：$x_0x+y_0y=r^2$

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$，切線：$(x_0-h)(x-h)+(y_0-k)(y-k)=r^2$。

② 給圓一般式：

$x^2+y^2+dx+ey+f=0$，

切線：$x_0x+y_0y+d\left(\dfrac{x+x_0}{2}\right)+e\left(\dfrac{y+y_0}{2}\right)+f=0$。

(2) 過圓外一點 $P(x_0, y_0)$ 求切線方程式：

第 1 步：設切線斜率為 $m$，利用點斜式，得切線方程式為 $y-y_0=m(x-x_0)$。

第 2 步：利用圓心到切線的距離＝半徑，求出斜率 $m$。

**觀念補充 //**

過圓外一點 $(x_0, y_0)$ 的切線方程式，其 $m$ 值會有兩解，若只解出一值，表示另一切線之斜率不存在，為鉛直線，其方程式為 $x=x_0$。

(3) 給切線斜率 $m$：

求切線方程式時可得兩條互相平行的切線。

將切線設為 $y=mx+k$，代入圓方程式中，因恰有一解（相切），故由根的判別式 $D=0$，求出 $k$ 值。

**觀念補充 //**

給切線斜率 $m$ 且與圓 $x^2+y^2=r^2$ 相切之切線方程式為 $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$。

**5. 切線段長：**

(1) 設 $P(x_0, y_0)$ 為圓 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 外一點，自 $P$ 點向圓作切線段 $\overline{PA}$，

$\overline{PA}=\sqrt{(x_0-h)^2+(y_0-k)^2-r^2}$。

(2) 設 $P(x_0, y_0)$ 為圓 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 外一點，自 $P$ 點向圓作切線段 $\overline{PA}$，

$\overline{PA}=\sqrt{x_0^2+y_0^2+dx_0+ey_0+f}$。

## 1 老師講解　圓與點的關係　學生練習

若點$(2,k)$在圓$x^2+y^2-2x+4y+3=0$的外面，則$k$的範圍為何？

想法　點$P(x_0,y_0)$，圓$x^2+y^2+dx+ey+f=0$，若$x_0^2+y_0^2+dx_0+ey_0+f>0$，則$P$點在圓外。

[ 答：$k>-1$ 或 $k<-3$ ]

解　將點$(2,k)$代入圓方程式

$\Rightarrow\ 2^2+k^2-4+4k+3>0$

$\Rightarrow\ k^2+4k+3>0$

$\Rightarrow\ (k+1)(k+3)>0$

$\Rightarrow\ k>-1$或$k<-3$

在坐標平面上，若點$(k-4,-1)$在圓$(x+1)^2+(y-2)^2=13$上面，則$k=$？

[ 答：$k=1$ 或 5 ]

解　將點$(k-4,-1)$代入圓方程式

$\Rightarrow\ (k-3)^2+(-3)^2=13$

$\Rightarrow\ k^2-6k+5=0$

$\Rightarrow\ (k-1)(k-5)=0$

$\Rightarrow\ k=1$或5

## 2 老師講解　圓與直線的關係　學生練習

若直線$x+y+k=0$與圓$x^2+y^2=8$相割，則$k$的範圍為何？

想法　相割$d(M,L)<r$
$\Leftrightarrow$ 圓與直線$L$相交於兩點。

[ 答：$-4<k<4$]

解　圓心$M(0,0)$，$r=\sqrt{8}$

$L：x+y+k=0$

$\because$ 相割 $\therefore$ $d(M,L)<r$

$\Rightarrow\ \dfrac{|k|}{\sqrt{1^2+1^2}}<\sqrt{8}$

$\Rightarrow\ |k|<4$

$\Rightarrow\ -4<k<4$

設直線$L：kx+y-3=0$與圓$C:x^2+y^2=3$不相交，則$k$的範圍為何？

[ 答：$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$ ]

解　圓心$M(0,0)$，$r=\sqrt{3}$

$L：kx+y-3=0$

$\because$ 不相交 $\therefore$ $d(M,L)>r$

$\Rightarrow\ \dfrac{|0+0-3|}{\sqrt{k^2+1^2}}>\sqrt{3}$

$\Rightarrow\ \dfrac{9}{k^2+1}>3$

$\Rightarrow\ k^2+1<3$

$\Rightarrow\ k^2-2<0$

$\Rightarrow\ (k-\sqrt{2})(k+\sqrt{2})<0$

$\Rightarrow\ -\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$

## 3 老師講解 相割求弦長 學生練習

直線 $x+y-3=0$ 截圓 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 於兩點 $A$、$B$，則 $\overline{AB}$ 之長為何？

想法 弦心距必垂直平分該弦且 $\overline{AB}=2\sqrt{r^2-d^2}$。

[ 答：$\sqrt{2}$ ]

解 圓心 $(1,1)$，$r=1$

圓心到 $x+y-3=0$ 的距離

$$d=\frac{|1+1-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

則 $\overline{AB}=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{2}$

有一圓 $x^2+y^2+2x-4y-4=0$，其一弦 $\overline{AB}$ 之中點坐標為 $(1,1)$，則 $\overline{AB}$ 之長為何？

[ 答：4 ]

解 圓心 $\left(-\frac{d}{2},-\frac{e}{2}\right)=(-1,2)$，$r=3$

$\overline{AB}$ 中點到圓心距離

$=\sqrt{[1-(-1)]^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}$

則 $\overline{AB}=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=4$

## 4 老師講解 過圓上一點求切線方程式 學生練習

通過 $P(5,2)$，且與圓 $(x-1)^2+(y+1)^2=25$ 相切的直線方程式為何？

想法 圓上一點 $P(x_0,y_0)$，圓標準式：$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$，則切線：$(x_0-h)(x-h)+(y_0-k)(y-k)=r^2$。

[ 答：$4x+3y-26=0$ ]

解 $P(5,2)$ 在圓上，代切線公式

$\Rightarrow\ (5-1)(x-1)+(2+1)(y+1)=25$

$\Rightarrow\ 4x+3y-26=0$

過圓 $x^2+y^2+4x+6y-21=0$ 上一點 $P(1,2)$ 的切線方程式為何？

[ 答：$3x+5y-13=0$ ]

解 $P(1,2)$ 在圓上，代切線公式

$\Rightarrow\ 1\times x+2\times y+4\times\left(\frac{x+1}{2}\right)+6\times\left(\frac{y+2}{2}\right)-21=0$

$\Rightarrow\ 3x+5y-13=0$

## 5 老師講解 已知切線斜率求切線方程式 學生練習

已知直線 $L：y=mx+3$ 與圓 $C：x^2+y^2=3$ 相切，則 $m=$ ？

想法 利用圓心到切線的距離 = 半徑求 $m$。

[ 答：$\pm\sqrt{2}$ ]

解 $L：mx-y+3=0$

$C$：圓心 $(0,0)$，$r=\sqrt{3}$

$\because$ $L$ 與圓 $C$ 相切

$\therefore$ $\dfrac{|3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ $m^2+1=3$

$\Rightarrow$ $m=\pm\sqrt{2}$

試求與 $4x+3y+5=0$ 垂直，且與圓 $(x-1)^2+(y-3)^2=25$ 相切的直線方程式。

[ 答：$3x-4y+34=0$ 或 $3x-4y-16=0$ ]

解 設切線：$3x-4y+k=0$

圓心 $(1,3)$，$r=5$

圓心到切線的距離

$d=\dfrac{|3\times1-4\times3+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=5$

$\Rightarrow$ $|k-9|=25$ $\Rightarrow$ $k-9=\pm25$

$\Rightarrow$ $k=34$ 或 $-16$

切線：$3x-4y+34=0$ 或 $3x-4y-16=0$

## ★ 6 老師講解 過圓外一點求切線方程式 學生練習

試求過 $P(5,5)$ 且與圓 $C：x^2+y^2=10$ 相切的直線方程式。

想法 先設切線斜率 $m$，再利用圓心到切線的距離 = 半徑求出 $m$。

[ 答：$x-3y+10=0$ 或 $3x-y-10=0$ ]

解 $P(5,5)$ 代入檢查，$P$ 在圓外

設切線：$y-5=m(x-5)$

$\Rightarrow$ $mx-y+(5-5m)=0$

圓心 $(0,0)$，$r=\sqrt{10}$

利用圓心到切線的距離 = 半徑，則

$\dfrac{|m\times0-0+(5-5m)|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$

$\Rightarrow$ $|5-5m|=\sqrt{10}\times\sqrt{m^2+1}$

兩邊平方得 $15m^2-50m+15=0$

$\Rightarrow$ $3m^2-10m+3=0$

$\Rightarrow$ $(3m-1)(m-3)=0$

$\Rightarrow$ $m=\dfrac{1}{3}$ 或 3

當 $m=\dfrac{1}{3}$ 時，切線為 $x-3y+10=0$

當 $m=3$ 時，切線為 $3x-y-10=0$

試求過 $P(4,2)$ 且與圓 $C：(x-2)^2+(y+2)^2=10$ 相切的直線方程式。

[ 答：$3x+y=14$ 或 $x-3y=-2$ ]

解 $P(4,2)$ 代入檢查，$P$ 在圓外

設切線：$y-2=m(x-4)$

$\Rightarrow$ $mx-y-4m+2=0$

圓心 $(2,-2)$，$r=\sqrt{10}$

利用圓心到切線的距離 = 半徑，則

$\dfrac{|-2m+4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$

兩邊平方得 $3m^2+8m-3=0$

$\Rightarrow$ $(3m-1)(m+3)=0$

$\Rightarrow$ $m=-3$ 或 $\dfrac{1}{3}$

當 $m=-3$ 時，切線為 $3x+y=14$

當 $m=\dfrac{1}{3}$ 時，切線為 $x-3y=-2$

## 7 老師講解　求切線段長　學生練習

設 $P(-1,-2)$，圓 $C：x^2+y^2-2x+5y+7=0$，直線 $L$ 過 $P$ 點與圓 $C$ 相切於 $Q$ 點，則 $\overline{PQ}=$ ？

想法　切線段長 $\overline{PQ}=\sqrt{\overline{OP}^2-r^2}=\sqrt{x_0^2+y_0^2+dx_0+ey_0+f}$。

[ 答：2 ]

解　$\overline{PQ}$ 即切線段長

$\overline{PQ}=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+2-10+7}=2$

自點 $P(0,-2)$ 至圓 $C：2x^2+2y^2+6x-y-2=0$ 之切線段長為何？

[ 答：2 ]

解　先將首項係數化成 1

$C：x^2+y^2+3x-\frac{1}{2}y-1=0$

$P$ 點代入得切線段長

$=\sqrt{0^2+(-2)^2+3\times0-\frac{1}{2}(-2)-1}$

$=2$

### 進階例題

## 8 老師講解　過圓外一點求切線方程式　學生練習

試求過 $P(3,1)$ 且與圓 $(x-1)^2+(y+2)^2=4$ 相切之直線方程式。

[ 答：$x=3$ 或 $5x-12y-3=0$ ]

解　$P(3,1)$ 代入檢查，$P$ 在圓外

設切線：$y-1=m(x-3)$

$\Rightarrow\ mx-y-3m+1=0$

圓心 $(1,-2)$，$r=2$

利用圓心到切線的距離＝半徑，則

$\frac{|m-(-2)-3m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$

兩邊平方得 $4m^2-12m+9=4m^2+4$

$\Rightarrow\ m=\frac{5}{12}$

只解出一 $m$，表另一切線為鉛直線 $x=3$

當 $m=\frac{5}{12}$ 時，切線為 $5x-12y-3=0$

試求過 $P(4,3)$，且與圓 $C：(x-2)^2+y^2=4$ 相切之直線方程式。

[ 答：$x=4$ 或 $5x-12y+16=0$ ]

解　設切線斜率為 $m$，代點斜式

令切線 $mx-y+3-4m=0$

利用圓心到切線的距離＝半徑，則

$\left|\frac{-2m+3}{\sqrt{m^2+1}}\right|=2$

兩邊平方得 $m=\frac{5}{12}$

只解出一 $m$，表另一切線為鉛直線 $x=4$

當 $m=\frac{5}{12}$ 時，切線為 $5x-12y+16=0$

已知 $A(-1,2)$，圓 $C：x^2+y^2-2x+4y-4=0$，自 $A$ 作圓 $C$ 的切線，切點為 $M$、$N$，試求 $\triangle AMN$ 之外接圓方程式。

[答：$x^2+y^2=5$]

解 圓 $C：x^2+y^2-2x+4y-4=0$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=9$

得圓心為 $K(1,-2)$

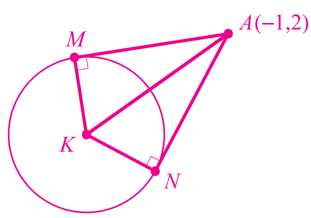
又 $\triangle AMN$ 之外接圓方程式

即以 $\overline{AK}$ 為直徑的圓

故圓心為 $\overline{AK}$ 中點 $(0,0)$

$$\text{半徑}=\frac{\overline{AK}}{2}=\frac{\sqrt{(-1-1)^2+[2-(-2)]^2}}{2}=\sqrt{5}$$

故外接圓方程式為 $x^2+y^2=5$




設圓 $C：x^2+y^2+2x-4y=0$ 的圓心為 $Q$，自 $P(3,5)$ 向圓 $C$ 所作的二切線切點分別為 $A$、$B$，試求通過 $A$、$B$、$P$ 三點的圓方程式。

[答：$(x-1)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$]

解 圓 $C：x^2+y^2+2x-4y=0$

$\Rightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=5$

得圓心為 $Q(-1,2)$

又過 $A$、$B$、$P$ 三點的圓即以 $\overline{PQ}$ 為直徑的圓

故其圓心為 $\overline{PQ}$ 中點 $\left(1,\frac{7}{2}\right)$

$$\text{半徑}=\frac{\overline{PQ}}{2}=\frac{\sqrt{[3-(-1)]^2+(5-2)^2}}{2}=\frac{5}{2}$$

故圓方程式為 $(x-1)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$

## 5-3 段落測驗

★表難題

1. 圓內一點 $A(1,-2)$ 到圓 $(x+2)^2+(y+2)^2=25$ 上任一點的最大距離為____8____。

2. 過 $A(4,2)$ 且與圓 $C: x^2+y^2-6y-8=0$ 相切的直線方程式為____$4x-y-14=0$____。

3. 斜率為 $-3$，且與圓 $C: x^2+y^2-2x-4y-35=0$ 相切的直線方程式為____$3x+y+15=0$ 及 $3x+y-25=0$____。

4. 已知直線 $L: ax+y-a+1=0$ 與圓 $C: x^2+y^2+2x=0$ 相交於 $A$、$B$ 兩點，若 $\overline{AB}=\sqrt{2}$，則 $a=$____1 或 $\frac{1}{7}$____。

5. 自 $P(1,-2)$ 至圓 $C: 2x^2+2y^2+6x+4y-2=0$ 之切線段長為____$\sqrt{3}$____。

★ 6. 設有一道光線通過點 $A(-4,5)$，經 $x$ 軸反射後恰與圓 $(x-2)^2+(y-2)^2=5$ 相切，則反射線的斜率為____2____。（註：光的行徑符合光學原理）

7. 設直線 $L: kx+3y+10=0$ 與圓 $C: x^2+y^2=4$ 沒有交點，則 $k$ 的範圍為____$-4<k<4$____。 【統測】

8. 若直線 $L: x-y=1$ 與圓 $C: x^2+y^2+2x+2y+1=0$ 交於 $A$、$B$ 兩點，則線段 $\overline{AB}$ 之長為____$\sqrt{2}$____。 【統測】

9. 設圓 $C$ 為 $x^2+y^2-2x-4y-11=0$，且直線 $L$ 為 $2x+y=-1$。若圓 $C$ 之圓心到直線 $L$ 的距離為 $d$，則下列敘述何者正確？____B____
(A) $1<d<2$ (B) $2<d<3$ (C) $3<d<4$ (D) $3<d<5$。 【統測】

10. 在坐標平面上，設 $m$、$b$ 為實數，若直線 $y=mx+b$ 與圓 $x^2+y^2-6x+4y-12=0$ 相切於點 $(-1,1)$，則 $2m+b=$____5____。 【統測】

## 5-3 高手過招

1. 坐標平面上一圓被直線 $x-y=1$ 及 $x-y=5$ 所截的弦長皆為 14，則此圓面積為____$51\pi$____平方單位。

2. 若直線 $2x-y+a=0$ 與圓 $x^2+y^2-6x+by+c=0$ 相切於 $(4,1)$，則數對 $(a,b,c)=$____$(-7,-3,10)$____。

**題目**

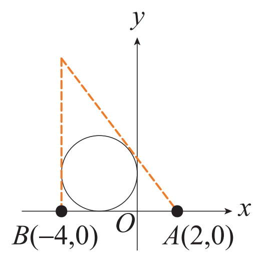
根據光的物理特性，光會沿著直線前進，當遇到無法穿透的障礙物時，則在物體的背後會產生陰影。喜歡追根究底的小明拿起手機，打亮手電筒，做一個如下的光學實驗：在坐標平面上，小明將手機光源置放於點 $P(-4,8)$，另拿一個不透明圓盤，設其方程式為：$(x+2)^2+(y-2)^2=4$，試求在手機光源的照射下，此圓盤在 $x$ 軸上的影子長為何？

**關鍵字** 點 $P(-4,8)$，圓盤方程式為：$(x+2)^2+(y-2)^2=4$
求光源的照射下圓盤在 $x$ 軸上的影子長？

**單元公式** 過圓外一點 $P(x_0,y_0)$，求切線方程式之步驟：
第 1 步：設切線斜率為 $m$，利用點斜式
得切線方程式為 $y-y_0=m(x-x_0)$
第 2 步：利用圓心到切線的距離 = 半徑，求出斜率 $m$

**翻譯成數學式** 試求過點 $P(-4,8)$，且與圓：$(x+2)^2+(y-2)^2=4$ 相切的直線方程式

**解題** 這題當成點 $P$ 在圓外求切線方程式
先設切線斜率為 $m$，利用點斜式
初步得切線方程式為 $y-8=m(x+4) \Rightarrow mx-y+4m+8=0$
再利用圓心到切線的距離 = 半徑之觀念
代入得 $\left|\dfrac{-2m-2+4m+8}{\sqrt{m^2+1}}\right|=2 \Rightarrow \left|\dfrac{2m+6}{\sqrt{m^2+1}}\right|=2$
將算式兩邊平方並乘開化簡得 $m^2+6m+9=m^2+1$
可解出 $m=-\dfrac{4}{3}$（只找到一個而已）
另一條切線斜率不存在，代表直線垂直 $x$ 軸
依此觀點得二切線為 $4x+3y=8$ 與 $x=-4$，如圖所示



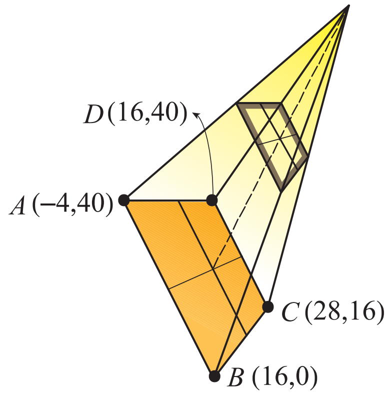

此即為照射光線行進的路徑方程式
令 $y=0$ 代入可得二切線分別交 $x$ 軸於 $A(2,0)$、$B(-4,0)$
故求得光影長為 $2-(-4)=6$

● **回顧：**了解題意嗎？圓本身的概念並不難，難在結合直線變化與其他應用，因此在複習上要全面性地統整，俾能收事半功倍的效果。再次叮嚀，過圓外一點求切線要特別注意鉛直切線（因斜率不存在），探究本題就是這個考點。解題需建立在穩固紮實的數學基礎上，若是盲從地追求速成法與計算技巧的堆積，其實是本末倒置，並非解題重點。

# CH 5 素養競技場

★表難題

1. 小芃的房間採光良好，在她的書房有一個由四塊正方形的玻璃拼成的田字形窗戶，窗外路燈的光線（將路燈視成一個點光源）透過窗戶在地板上形成一個田字形的投射光影。假設在地板上建置一個直角坐標系，發現田字形光影外框的四個頂點的坐標分別為$(-4,40)$，$(16,0)$，$(16,40)$和$(28,16)$，如圖，試求田字形窗戶的中心點投影在地板上的坐標。



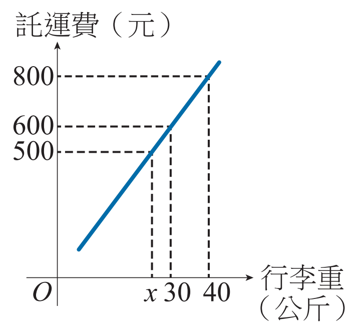

答：$(16,25)$

2. 若氣象局在菲律賓附近海域發現一個熱帶性低氣壓，其氣旋逐漸形成了一個新颱風莎莉，假設最新發布莎莉颱風之暴風圈，其外緣以圓方程式表示為：$x^2+y^2-4x+2y-95=0$，因受大氣環流影響，經過數小時後，颱風中心（即圓心）坐標向東移動 1 個單位，向南移動 3 個單位，且暴風半徑增為原來的 2 倍，則新暴風圈外緣的圓方程式為何？

答：$(x-3)^2+(y+4)^2=400$

3. 一公司職員搭乘某家廉價航空出差，他的行李重量為 $x$ kg，行李託運費用為 500 元。若行李託運費與行李重量呈線性關係，如圖，試求其行李重量為何？

答：25 kg




4. 基地台是架設在某處的一個高功率多頻雙向無線電波傳送器，當用手機打電話時，訊號會由附近的一個基地台傳送與接收電波。已知某基地台的收訊範圍為方圓 10 km，小佩在平面上的位置為 $P(3,k)$，而距離她最近之基地台的坐標為 $Q(9,0)$，試問在小佩能收到手機訊號的情況下，$k$ 的範圍為何？（設坐標平面之單位長為 1 km）

答：$-8\le k\le 8$

高三人的執著

成敗看細心，輸贏看用心，做事情不問有沒有把握，只問該不該做。若該做，雖千萬人吾往矣。

# CH 5 統測考古題

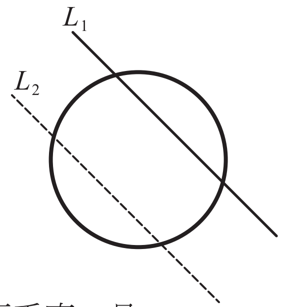
統測解題影音

★表難題

( A ) 1. 若 $A(1,4)$、$B(6,2)$ 所連接的線段 $\overline{AB}$ 與直線 $L：x-y+1=0$ 相交於 $P$ 點，則 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=$？ (A) $\dfrac{2}{5}$ (B) $\dfrac{3}{7}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{3}{5}$。【111(C)】

( B ) 2. 已知圓 $x^2+y^2+2x+4y-3=0$ 與相異兩直線 $L_1：x+y+1=0$ 及 $L_2：ax+by+10=0$ 分別交於兩點，且 $L_1 \,/\!/\, L_2$，如圖所示。若此圓圓心到兩直線 $L_1$、$L_2$ 的距離相等，則 $a+b=$？

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 10。【111(C)】




( B ) 3. 已知 $a$、$b$ 為實數。若直線 $L_1：y=ax+b$ 與 $L_2：y=bx+a$ 相互垂直，且 $a^2+b^2=50$，則 $L_1$ 與 $L_2$ 的交點與原點的距離為多少？

(A) $4\sqrt{3}$ (B) 7 (C) $5\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{13}$。【110(C)】

( D ) 4. 若圓 $C$ 與 $y$ 軸相切，且圓心為拋物線 $y=x^2+4x+5$ 之頂點，則下列何者為圓 $C$ 的方程式？

(A) $x^2+y^2+4x-2y+4=0$ (B) $x^2+y^2-4x+2y+1=0$

(C) $x^2+y^2-4x+2y+4=0$ (D) $x^2+y^2+4x-2y+1=0$。【110(C)】

( B ) 5. 若直線 $y=mx$ 與拋物線 $f(x)=-x^2+4x-1$ 相切，且切點在第一象限內，則 $m=$？

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 6。【110(C)】

( A ) 6. 若直線 $L_1：y=mx+b$ 與直線 $L：2x+3y=1$ 平行，且直線 $L_1$ 與 $x$ 軸的交點之 $x$ 坐標為 2，則下列何者正確？

(A) $m+b=\dfrac{2}{3}$ (B) $m+b=6$ (C) $m\times b=\dfrac{2}{3}$ (D) $m\times b=9$。【110(B)】

( A ) 7. 若 $k$ 為實數，且點 $P(1,k)$ 為曲線 $kx^2+y^2+2x-4y+k-1=0$ 上之一點，求曲線之圖形為何？ (A) 圓 (B) 拋物線 (C) 橢圓 (D) 雙曲線。【109(C)】

( D ) 8. 已知圓 $C：(x-3)^2+(y-2)^2=1$。若點 $P$ 是圓 $C$ 上一點，則 $P$ 到直線 $L：3x+4y+8=0$ 的最短距離為何？ (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。【109(B)】

★( B ) 9. 已知坐標平面上三直線 $L_1：3x+3y=2$、$L_2：2x-3y=3$、$L_3：x-ay=-2$，且這三直線將平面分成六個區域，則 $a$ **不可以**是下列哪一個值？

(A) $\dfrac{3}{2}$ (B) 1 (C) $-1$ (D) $-9$。【108(C)】

★( D ) 10. 已知坐標平面上三直線 $L$、$L_1$ 與 $L_2$，若直線 $L$ 為水平線，$L_1$ 與 $L_2$ 的斜率分別為 $\dfrac{2}{3}$ 與 $-\dfrac{3}{2}$，且直線 $L$ 被 $L_1$ 與 $L_2$ 所截出的線段長為 26，則此三直線所圍成的三角形面積為多少平方單位？ (A) 39 (B) 52 (C) 78 (D) 156。【108(C)】

( D ) 11. 已知直線 $L$ 之斜率為 2，$x$ 截距為 3。試問 $L$ 與兩坐標軸所包圍三角形之面積為何？

(A) $\frac{9}{4}$ (B) $\frac{9}{2}$ (C) 6 (D) 9。【108(B)】

( D ) 12. 已知直線 $L_1$ 通過 $(2,3)$、$(1,5)$ 兩點，且直線 $L_2$ 的 $x$ 截距是 1、$y$ 截距是 4。若 $L_1$ 與 $L_2$ 的斜率分別為 $m_1$ 與 $m_2$，則下列何者正確？

(A) $0<m_1<m_2$ (B) $m_1<0<m_2$ (C) $m_2<0<m_1$ (D) $m_2<m_1<0$。【107(C)】

( D ) 13. 設 $P(x,y)$ 為圓 $x^2+y^2-6x+8y=0$ 上的動點，若 $4x+3y+5$ 的最大值為 $M$，最小值為 $m$，則 $M+m=$ (A) $-5$ (B) 0 (C) 5 (D) 10。【107(C)】

★( D ) 14. 設點 $O_1$ 為圓 $C：x^2+y^2-6x+4y+9=0$ 之圓心。今以另一點 $O_2$ 為圓心、$\overline{O_1O_2}$ 為半徑作一圓，且此圓與圓 $C$ 交於 $A$、$B$ 兩點。若 $\overline{AO_2}=3$，則 $\overline{AB}=$

(A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (B) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$。【107(C)】

( D ) 15. 若 $x^2+y^2+kx+2y+k+1=0$ 表示一圓，則 $k$ 的範圍為何？

(A) $2<k<4$ (B) $0<k<3$ (C) $k<2$ 或 $k>3$ (D) $k<0$ 或 $k>4$。【107(B)】

( B ) 16. 設打水漂遊戲中石頭落入水中的漣漪是以圓的形式展現。若某人向河面擲出石頭的方向是沿著直線 $y=x-1$ 行進，下列哪一個圓方程式可為此漣漪的形式？

(A) $x^2-2x+y^2+4y+1=0$ (B) $x^2-4x+y^2-2y+4=0$

(C) $x^2-2x+y^2-4y+4=0$ (D) $x^2-4x+y^2-6y+9=0$。【106(C)】

( D ) 17. 若直線 $3x-2y+6=0$ 的斜率為 $a$，$y$ 截距為 $b$，$x$ 截距為 $c$，且此直線與兩坐標軸所圍成的封閉區域面積為 $d$，求 $ab-cd$ 之值為？

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{9}{2}$ (C) $\frac{15}{2}$ (D) $\frac{21}{2}$。【105(C)】

( C ) 18. 已知圓的方程式為 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$；直線方程式為 $x+y-1=0$，若圓和直線的交點分別為 $A$ 與 $B$，圓心為 $O$，則下列何者正確？

(A) $\overline{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) 圓心 $O$ 到直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的距離為 $\frac{1}{2}$ (C) 圓心 $O$ 與 $A$、$B$ 形成的三角形 $ABO$ 面積為 $\frac{1}{2}$ (D) 交點 $A$、$B$ 的坐標分別為 $(-1,0)$，$(0,1)$。【105(C)】

( A ) 19. 已知直線 $L$ 過點 $(1,3)$，且與 $x$ 軸、$y$ 軸在第二象限圍出一個等腰直角三角形，則下列何者為直線 $L$ 的方程式？

(A) $x-y=-2$ (B) $x+y=-2$ (C) $2x-2y=1$ (D) $x+y=2$。【105(B)】

( A ) 20. 已知 $P(a,1)$、$Q(-1,b)$ 為平面上兩點。若 $P$ 為直線 $L：3x-4y=2$ 上一點，且直線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 與直線 $L$ 垂直，則 $a+b=$

(A) 7 (B) 9 (C) 11 (D) 13。【104(C)】