4 式的運算

雲端教室

4-1 多項式的四則運算

重點一 認識多項式

1. **多項式：**

將數及不定元 x、y 經由 $+$、$-$、$\times$ 後形成的式子稱為多項式。

例如：x^2-x+1、$\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{3}$、$x^2-xy+y^2$。

我們只討論一種變數的多項式，稱為一元 n 次多項式。

觀念補充 //

多項式之文字符號不可出現在

❶ 分母，例如：$\dfrac{1}{x+1}$。

❷ 絕對值，例如：$|x+1|$。

❸ 根號內，例如：$\sqrt{x+1}$。

2. 多項式的一般表示法：

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$。其中：

(1) a_k 表 x^k 項的係數；a_n 稱為首項係數或領導係數。

(2) 若多項式 $f(x)$ 為 n 次多項式，以 $\deg f(x)=n$ 表示。

(3) 零次多項式：當 $a_n=\cdots=a_1=0$，只有 $a_0\neq 0$，稱 $f(x)$ 為零次多項式，例如：$f(x)=3$。

(4) 零多項式：若係數均為 0，稱 $f(x)$ 為零多項式，例如：$f(x)=0$。

3. 多項式的係數：

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

(1) 各項係數和：$a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0=f(1)$。

(2) 常數項：$a_0=f(0)$。

(3) 偶次項係數和：$a_0+a_2+a_4+\cdots=\dfrac{f(1)+f(-1)}{2}$。

(4) 奇次項係數和：$a_1+a_3+a_5+\cdots=\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}$。

4. 多項式相等：

(1) 兩個多項式 $f(x)$ 與 $g(x)$，若 $f(x)=g(x)$ $\Leftrightarrow$ 二者次數相同，對應項係數相同。

(2) 恆等式定理：設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 次數均不大於 n 次，若有 $n+1$ 個相異實數，
使 $f(x_k)=g(x_k)$，$k=1$，2，⋯，$n+1$，則 $f(x)=g(x)$。

1　老師講解　認識多項式　學生練習

設 $(a-b)x^2+(2a+3b)x+8$ 為一次多項式，且一次項係數為 10，試求 a、b 之值為何？

想法　$f(x)$ 為一次多項式，則高於一次之係數均為 0。

[答：$a=b=2$]

解　原式滿足 $\begin{cases}a-b=0\\2a+3b=10\end{cases}$

$\Rightarrow$ $a=b=2$

設 $f(x)=(a-3)x^3+(b-2)x^2-bx+a$ 為一次多項式，試求 $f(3)=$？

[答：-3]

解　原式滿足 $\begin{cases}a-3=0\\b-2=0\end{cases}$

$\Rightarrow$ $a=3$，$b=2$

故 $f(x)=-2x+3$

得 $f(3)=-6+3=-3$

★ 2 老師講解　求多項式之係數和　學生練習

設 $f(x)=\left(x^3-2x+2\right)^3$，試求展開後：

(1) 各項係數和。

(2) 奇次項係數和。

(3) 偶次項係數和。

想法　多項式所有係數和 $=f(1)$，

奇次項係數和 $=\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}$，

偶次項係數和 $=\dfrac{f(1)+f(-1)}{2}$。

[答：(1) 1　(2) -13　(3) 14]

解　(1) $f(1)=(1-2+2)^3=1$

(2) 奇次項係數和 $=\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}$

$=\dfrac{1-27}{2}$

$=-13$

(3) 偶次項係數和 $=\dfrac{f(1)+f(-1)}{2}$

$=\dfrac{1+27}{2}$

$=14$

設 $f(x)=\left(8x^3-9x^2-7x+9\right)^3$ 之展開式中各項係數和為 a，奇次項係數和為 b，偶次項係數和為 c，試求 $a+b+c$ 之值。

[答：2]

解　$a=f(1)=(8-9-7+9)^3=1$

$b=\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}=\dfrac{1-(-1)}{2}=1$

$c=\dfrac{f(1)+f(-1)}{2}=\dfrac{1+(-1)}{2}=0$

$\therefore\ a+b+c=2$

3 老師講解　多項式恆等定理　學生練習

設 $f(x)=3x^2+ax-6$，

$g(x)=bx^2+4x-c$，

a、b、$c\in\mathbb{R}$。若 $f(3)=g(3)$，$f(5)=g(5)$，$f(7)=g(7)$，試求 $a+b+c$ 之值。

想法　$f(x)$ 與 $g(x)$ 次數均不大於 2 次，若有 3 個相異實數，使 $f(x_k)=g(x_k)$，則 $f(x)=g(x)$。

[答：13]

解　依多項式恆等定理，得

$f(x)=g(x)\ \Rightarrow\ a=4$，$b=3$，$c=6$

故 $a+b+c=13$

設 $f(x)=(3a+6)x^3+(b+4)x^2+(c-2)x+(d+1)$，若 $f(11)=f(12)=f(13)=f(14)=9$，試求 $a+b+c+d$ 之值。

[答：4]

解　依多項式恆等定理，得

$f(x)=9$

$\Rightarrow\ \begin{cases}3a+6=b+4=c-2=0\\ d+1=9\end{cases}$

$\Rightarrow\ a=-2$，$b=-4$，$c=2$，$d=8$

故 $a+b+c+d=4$

重點二　多項式的四則運算

1. 多項式的加、減法：

將同次項的係數相加、減。

2. 多項式的乘法：

(1) 運用乘法分配律乘開，再合併同次項。

(2) 乘法公式：

二次公式	三次公式
① $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab \pm b^2$ ② $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	① $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ② $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ ③ $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ ④ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$

3. 多項式的除法：

(1) 除法：利用長除法、分離係數法或綜合除法。

(2) 除法原理：設 $f(x)$、 $g(x)$ 為兩多項式且 $g(x) \neq 0$，則恰存在兩多項式 $Q(x)$ 及 $r(x)$ 滿足 $f(x) = g(x) \times Q(x) + r(x)$，其中 $r(x) = 0$ 或 $\deg r(x) < \deg g(x)$。其中 $f(x)$ 稱為被除式，$g(x)$ 為除式，$Q(x)$ 為商式，$r(x)$ 為餘式 $\Rightarrow$ 被除式 = 除式 × 商式 + 餘式。

(3) 綜合除法：除式為一次式時，利用綜合除法較簡便。

例如：試求 $x^3 - 3x^2 + 5$ 除以 $x-2$ 之商式及餘式。

解：利用分離係數法將被除式依降次排列，若有缺項需補 0。

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & +0 & +5 & 2 \\ & +2 & -2 & -4 & \\ \hline \underbrace{1 \quad -1 \quad -2}_{\text{商式}} & & & \underbrace{\boxed{+1}}_{\text{餘式}} & \end{array}$$

商式：$x^2 - x - 2$

餘式：1

說明：① 除式為 $x-2$，將 2 置於右上角；若除式為 $x+2$，則改寫成 $x-(-2)$，將 -2 置於右上角。

② 運算時，上下排數字「相加」。

觀念補充 //

❶ 若除式為 $ax-b$，要先化成 $a\left(x-\dfrac{b}{a}\right)$，以 $\left(x-\dfrac{b}{a}\right)$ 除之。

❷ 比較 $f(x) \div (ax-b)$ 與 $f(x) \div \left(x-\dfrac{b}{a}\right)$ 差別：

令 $f(x) = (ax-b)\underbrace{Q(x)}_{\text{商式}} + \underbrace{r}_{\text{餘式}} \Rightarrow f(x) = a\left(x-\dfrac{b}{a}\right)Q(x) + r = \left(x-\dfrac{b}{a}\right) \times \underbrace{aQ(x)}_{\text{商式}} + \underbrace{r}_{\text{餘式}}$

二者的商式會差 a 倍，餘式不變。

4. **用一次多項式改寫另一多項式：**

欲以一次多項式 $x-\alpha$ 表示

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$
$$=A_n(x-\alpha)^n+A_{n-1}(x-\alpha)^{n-1}+\cdots+A_1(x-\alpha)+A_0，$$

可用綜合除法連續以 $f(x)$ 除以 $x-\alpha$ 來求相關係數 A_n，⋯，A_1，A_0。

4 老師講解　多項式之加減法運算　學生練習

設 $p(x)=x^3-2x^2$，$q(x)=2x^3-x^2-4x+3$，$r(x)=5x-7$，試求 $p(x)+q(x)-r(x)$。

想法　將同次項的係數相加、減。

[答：$3x^3-3x^2-9x+10$]

解　$p(x)+q(x)-r(x)$

$=(x^3-2x^2)+(2x^3-x^2-4x+3)-(5x-7)$

$=(3x^3-3x^2-4x+3)-(5x-7)$

$=3x^3-3x^2-9x+10$

設 $f(x)=x^3+2x^2-x+1$，$g(x)=-x^2+6x-2$，試求 $f(x)-2g(x)$。

[答：$x^3+4x^2-13x+5$]

解　$f(x)-2g(x)$

$=(x^3+2x^2-x+1)-2(-x^2+6x-2)$

$=x^3+4x^2-13x+5$

5 老師講解　多項式之乘法運算　學生練習

試求 $(2x^3+3x^2-4x+5)\times(4x^2-2x+3)$ 的乘積中，x^3 項的係數。

想法　運用乘法分配律乘開，再合併同次項求 x^3 項的係數。

[答：-16]

解　$(2x^3+3x^2-4x+5)\times(4x^2-2x+3)$

∴　x^3 項的係數為

$2\times3+3\times(-2)+(-4)\times4=-16$

試求 $(2x^2+x-3)\times(x^3-x^2+2x+5)$ 的乘積中，x^4 項的係數。

[答：-1]

解　$(2x^2+x-3)\times(x^3-x^2+2x+5)$

∴　x^4 項的係數為

$2\times(-1)+1\times1=-1$

6 老師講解　多項式除法之長除法運算　學生練習

若 $2x^3+x^2+ax+b$ 除以 x^2+x+1 的餘式為 $-4x+5$，則 $a+b=$ ？

想法　利用分離係數法之長除法運算，遇缺項要補 0。

[答：1]

解　分離係數法

$$
\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & 2 & - & 1 & & & & \\
\hline
1+1+1 & 2 & + & 1 & + & a & + & b \\
 & 2 & + & 2 & + & 2 & & \\
\hline
 & & - & 1 & + & (a-2) & + & b \\
 & & - & 1 & - & 1 & - & 1 \\
\hline
 & & & & & (a-1) & + & (b+1)
\end{array}
$$

餘式 $(a-1)x+(b+1)=-4x+5$

$\Rightarrow\ a=-3$，$b=4$

所求 $a+b=1$

若 $2x^3+2x^2+ax+b$ 除以 x^2+2x-2 的餘式為 $x+3$，則 $a+b=$ ？

[答：0]

解　分離係數法

$$
\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & 2 & - & 2 & & & & \\
\hline
1+2-2 & 2 & + & 2 & + & a & + & b \\
 & 2 & + & 4 & - & 4 & & \\
\hline
 & & - & 2 & + & (a+4) & + & b \\
 & & - & 2 & - & 4 & + & 4 \\
\hline
 & & & & & (a+8) & + & (b-4)
\end{array}
$$

餘式 $(a+8)x+(b-4)=x+3$

$\Rightarrow\ a=-7$，$b=7$

所求 $a+b=0$

7 老師講解　多項式除法之綜合除法運算　學生練習

利用綜合除法求 (x^4+3x^3+7) 除以 $(x+2)$ 的商式及餘式。

想法　利用綜合除法，將被除式依降次排列，遇缺項要補 0。

[答：商式為 x^3+x^2-2x+4，餘式為 -1]

解

$$
\begin{array}{rrrrrr|r}
 & 1 & +3 & +0 & +0 & +7 & -2 \\
+) & & -2 & -2 & +4 & -8 & \\
\hline
 & 1 & +1 & -2 & +4 & \boxed{-1} &
\end{array}
$$

故商式為 x^3+x^2-2x+4

餘式為 -1

利用綜合除法求 $5x^3-8x^2+3x-5$ 除以 $x-2$ 的商式及餘式。

[答：商式為 $5x^2+2x+7$，餘式為 9]

解

$$
\begin{array}{rrrrr|r}
 & 5 & -8 & +3 & -5 & 2 \\
+) & & +10 & +4 & +14 & \\
\hline
 & 5 & +2 & +7 & \boxed{+9} &
\end{array}
$$

故商式為 $5x^2+2x+7$

餘式為 9

8 老師講解　多項式除法之綜合除法　學生練習

試求 $6x^3-5x^2+3x-7$ 除以 $2x-1$ 的商式及餘式。

想法　綜合除法中，若除式為 $ax-b$，要先以 $\left(x-\dfrac{b}{a}\right)$ 除之，所得的商式要再除以 a。

[答：商式為 $3x^2-x+1$，餘式為 -6]

解　除式 $2x-1$ 改成 $2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$

再用被除式除以 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$

$$\begin{array}{r|rrrr|l}
 & 6 & -5 & +3 & -7 & \frac{1}{2} \\
+) & & +3 & -1 & +1 & \\
\hline
2 & 6 & -2 & +2 & -6 & \\
 & 3 & -1 & +1 & &
\end{array}$$

故商式為 $3x^2-x+1$

餘式為 -6

試求 $3x^4-5x^3-x^2+8x-4$ 除以 $3x-2$ 的商式及餘式。

[答：商式為 x^3-x^2-x+2，餘式為 0]

解　除式 $3x-2$ 改成 $3\left(x-\dfrac{2}{3}\right)$

再用被除式除以 $\left(x-\dfrac{2}{3}\right)$

$$\begin{array}{r|rrrrr|l}
 & 3 & -5 & -1 & +8 & -4 & \frac{2}{3} \\
+) & & +2 & -2 & -2 & +4 & \\
\hline
3 & 3 & -3 & -3 & +6 & +0 & \\
 & 1 & -1 & -1 & +2 & &
\end{array}$$

故商式為 x^3-x^2-x+2

餘式為 0

9 老師講解　綜合除法之應用　學生練習

多項式 $f(x)=x^3+3x^2-4x+1$，若 $f(x)=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$，試求 a、b、c、d 之值。

想法　運用綜合除法連續除以 $(x-1)$，所得餘數分別為係數 d、c、b、a。

[答：$a=1$，$b=6$，$c=5$，$d=1$]

解

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & +3 & -4 & +1 & 1 \\
 & +1 & +4 & +0 & \\
\hline
1 & +4 & +0 & +1 \to d & \\
 & +1 & +5 & & \\
\hline
1 & +5 & +5 \to c & & \\
 & +1 & & & \\
\hline
1 & +6 \to b & & & \\
1 \to a & & & &
\end{array}$$

$a=1$，$b=6$，$c=5$，$d=1$

若 $x^3-x^2+8x-5=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$，試求 a、b、c、d 之值。

[答：$a=1$，$b=-4$，$c=13$，$d=-15$]

解

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & -1 & +8 & -5 & -1 \\
 & -1 & +2 & -10 & \\
\hline
1 & -2 & +10 & -15 \to d & \\
 & -1 & +3 & & \\
\hline
1 & -3 & +13 \to c & & \\
 & -1 & & & \\
\hline
1 & -4 \to b & & & \\
1 \to a & & & &
\end{array}$$

$a=1$，$b=-4$，$c=13$，$d=-15$

＼進階例題／

10 老師講解　利用綜合除法化 $(x-a)$ 的多項式　學生練習

設 $f(x)=x^3+6x+7=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$，試求：

(1) $f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 的餘式。

(2) $f(1+\sqrt{2})$ 的值。

[答：(1) $9x+5$　(2) $20+11\sqrt{2}$]

解 (1) 運用綜合除法連續除以 $(x-1)$，得

$$
\begin{array}{llll|l}
1 & +0 & +6 & +7 & 1 \\
 & +1 & +1 & +7 & \\
\hline
1 & +1 & +7 & \multicolumn{2}{|l}{+14\to d} \\
 & +1 & +2 & & \\
\cline{1-3}
1 & +2 & \multicolumn{3}{|l}{+9\to c} \\
 & +1 & & & \\
\cline{1-2}
1 & \multicolumn{4}{|l}{+3\to b} \\
\cline{1-1}
\multicolumn{5}{l}{1\to a}
\end{array}
$$

$a=1$，$b=3$，$c=9$，$d=14$

得 $f(x)$

$=(x-1)^3+3(x-1)^2+9(x-1)+14$

$=(x-1)^2[(x-1)+3]+9(x-1)+14$

故 $f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 的餘式為

$9(x-1)+14=9x+5$

(2) 將 $x=1+\sqrt{2}$ 代入

$f(x)=(x-1)^3+3(x-1)^2+9(x-1)+14$

得 $f(1+\sqrt{2})$

$=(\sqrt{2})^3+3(\sqrt{2})^2+9(\sqrt{2})+14$

$=2\sqrt{2}+6+9\sqrt{2}+14$

$=20+11\sqrt{2}$

設 $f(x)=x^4-3x^3+x^2+x+9=a(x-2)^4+b(x-2)^3+c(x-2)^2+d(x-2)+e$，試求：

(1) $f(x)$ 除以 $(x-2)^2$ 的餘式。

(2) $f(2+\sqrt{3})$ 的值。

[答：(1) $x+5$　(2) $37+16\sqrt{3}$]

解 (1) 運用綜合除法連續除以 $(x-2)$，得

$$
\begin{array}{lllll|l}
1 & -3 & +1 & +1 & +9 & 2 \\
 & +2 & -2 & -2 & -2 & \\
\hline
1 & -1 & -1 & -1 & \multicolumn{2}{|l}{+7\to e} \\
 & +2 & +2 & +2 & & \\
\cline{1-4}
1 & +1 & +1 & \multicolumn{3}{|l}{+1\to d} \\
 & +2 & +6 & & & \\
\cline{1-3}
1 & +3 & \multicolumn{4}{|l}{+7\to c} \\
 & +2 & & & & \\
\cline{1-2}
1 & \multicolumn{5}{|l}{+5\to b} \\
\cline{1-1}
\multicolumn{6}{l}{1\to a}
\end{array}
$$

$a=1$，$b=5$，$c=7$，$d=1$，$e=7$

得 $f(x)$

$=(x-2)^4+5(x-2)^3+7(x-2)^2+(x-2)+7$

$=(x-2)^2\left[(x-2)^2+5(x-2)+7\right]+(x-2)+7$

故 $f(x)$ 除以 $(x-2)^2$ 的餘式為

$(x-2)+7=x+5$

(2) 將 $x=2+\sqrt{3}$ 代入

$f(x)=(x-2)^4+5(x-2)^3+7(x-2)^2+(x-2)+7$

得 $f(2+\sqrt{3})$

$=(\sqrt{3})^4+5(\sqrt{3})^3+7(\sqrt{3})^2+\sqrt{3}+7$

$=37+16\sqrt{3}$

4-1 段落測驗

★表難題

1. (A) $\dfrac{1}{x}+4$ (B) $\sqrt{2}x+8$ (C) $\dfrac{13}{5x-4}$ (D) $6\sqrt{x}+2$ (E) $2x^2+3x-4=0$ (F) 0.1。
以上為多項式者為___B、F___。（填代號）

2. 設 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+1$為整係數多項式，且$2|a|+3|b-1|+|c+2|=1$，則$f(x)$的次數為___3___。

3. 設 a、$b\in\mathbb{R}$，若 $f(x)=a(x^3-x^2)+b(x^3-x+2)+x^2+ax+2$為一次多項式，則 $a-b=$___2___。

★ 4. 設 $f(x)=(x^3-x^2-x+1)^4$之展開式中各項係數之和為 a，各奇次項係數之和為 b，各偶次項係數之和為 c，常數項為 d，則 $a+b+c+d=$___1___。

5. 設 $f(x)=x^2-2x+5$，$g(x)=a(x-1)(x-2)+b(x-2)(x-3)+c(x-5)(x-1)$，若 $f(x)=g(x)$，則 $b+c=$___$\dfrac{1}{3}$___。

6. 已知 $f(x)=3x^3+4x-5$，$g(x)=x^2-3x+1$，則
(1) $f(x)+g(x)=$___$3x^3+x^2+x-4$___。
(2) $f(x)-g(x)=$___$3x^3-x^2+7x-6$___。

7. 設 a、b 為實數，若多項式 x^2-3x+a 與 $x-2$ 的乘積再加上 $-3x+b$ 得 x^3-5x^2+4x+2，則 $a+b=$___5___。

8. 設 $3x^3-4x^2+ax-b$ 除以 x^2-x+1 之餘式為 $-2x+3$，則 $a+2b=$___-2___。

9. 多項式 x^3-2x^2+3x-5 除以 $x-1$ 的商式為___x^2-x+2___，餘式為___-3___。

10. 設$2x^3+3x^2-x+6=a(x+3)^3+b(x+3)^2+c(x+3)+d$，則 $a+b+c+d=$___4___。

11. 將$(x^4-3x^3+2x-5)(x^3-2)(x+3)$乘開化簡後，$x^3$ 項的係數為___3___。【104(C)】

12. 設$-2x^3-4x^2-x+3=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$，則 $a+b+c+d=$___3___。【統測】

13. 用 x^2-x+1 去除 $2x^3-3x^2+2x-5$，得到的餘式為___$-x-4$___。【統測】

14. $4x^4+4x^3+x^2+3$ 除以 $2x-1$ 的餘式為___4___。【統測】

15. 設 $f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=2x^2+3x+3$，$h(x)=-2x^2+cx-b$為三個多項式，且 a、b、c 均為實數，若已知 $f(x)-g(x)=h(x)$，則下列何者為二次多項式？___A___
(A) $f(x)+h(x)$ (B) $g(x)+h(x)$ (C) $f(x)+g(x)+h(x)$ (D) $f(x)+b[g(x)+h(x)]$ 【統測】

4-2 》餘式與因式定理

重點一　餘式定理

1. **餘式定理：**

(1) $f(x)$除以$(x-a)$的餘式為$f(a)$；反之，$f(a)$為$f(x)$除以$(x-a)$的餘式。

(2) $f(x)$除以$(ax-b)$的餘式為$f\left(\dfrac{b}{a}\right)$。

觀念補充 //

$f(x)$除以二次式$(x-\alpha)(x-\beta)$時之餘式假設法：

令$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)+ax+b$或$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)+a(x-\alpha)+f(\alpha)$。

1　老師講解　餘式定理之應用　學生練習

老師講解

試求$\left(x^3+6x^2+5x+2\right)^2$除以$x+1$之餘式。

想法　$f(x)$除以$(x-a)$的餘式為$f(a)$。

[答：4]

解　餘式$=f(-1)=(-1+6-5+2)^2=2^2=4$

學生練習

試求$\left(x^4-7x^2+5x+2\right)^2$除以$x-1$之餘式。

[答：1]

解　餘式$=f(1)=(1-7+5+2)^2=1$

2　老師講解　餘式定理之應用　學生練習

老師講解

$f(x)=216x^5-420x^4+6x^3-70x^2+24x-10$，試求$f(2)$。

想法　$f(2)$為$f(x)$除以$x-2$之餘式。

[答：−2]

解　$f(x)$除以$x-2$之餘式即為$f(2)$

由綜合除法

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
216 & -420 & +6 & -70 & +24 & -10 & 2 \\
 & +432 & +24 & +60 & -20 & +8 & \\
\hline
216 & +12 & +30 & -10 & +4 & \boxed{-2} &
\end{array}$$

$\therefore$　餘式即為$f(2)=-2$

學生練習

已知$f(x)=123x^4-234x^3-36x^2+48x-50$，試求$f(2)$。

[答：−2]

解　$f(x)$除以$x-2$之餘式即為$f(2)$

由綜合除法

$$\begin{array}{rrrrr|l}
123 & -234 & -36 & +48 & -50 & 2 \\
 & +246 & +24 & -24 & +48 & \\
\hline
123 & +12 & -12 & +24 & \boxed{-2} &
\end{array}$$

$\therefore$　餘式即為$f(2)=-2$

3 老師講解 **利用餘式定理求餘式** 學生練習

多項式 $f(x)$ 以 $x-1$ 除之餘式為 2，以 $x+2$ 除之餘式為 -4，則 $f(x)$ 以 x^2+x-2 除之餘式為何？

想法 令 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)+ax+b$。

[答：$2x$]

解 設 $f(x)=(x^2+x-2)Q(x)+ax+b$

$=(x-1)(x+2)Q(x)+ax+b$

$$\begin{cases} f(1)=a+b=2 & \cdots\cdots① \\ f(-2)=-2a+b=-4 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

解聯立得 $a=2$，$b=0$

$\therefore$ 餘式為 $2x$

設 $f(x)$ 除以 $x+2$ 餘 2，除以 $x-3$ 餘 -1，試求 $f(x)$ 除以 $(x+2)(x-3)$ 的餘式為何？

[答：$-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}$]

解 設 $f(x)=(x+2)(x-3)Q(x)+ax+b$

$$\begin{cases} f(-2)=-2a+b=2 & \cdots\cdots① \\ f(3)=3a+b=-1 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

解聯立得 $a=-\frac{3}{5}$，$b=\frac{4}{5}$

$\therefore$ 餘式為 $-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}$

重點二 因式定理

1. 因式與倍式：

若 $f(x)=g(x)\times h(x)$，則 $g(x)$ 與 $h(x)$ 為 $f(x)$ 的因式，$f(x)$ 為 $g(x)$ 與 $h(x)$ 的倍式，記做 $g(x)\mid f(x)$、$h(x)\mid f(x)$。

2. 因式定理：

$(x-a)$ 為多項式 $f(x)$ 的因式 $\Leftrightarrow$ $f(a)=0$。

觀念補充 //

因式定理推廣：

❶ 設 $f(x)$ 為一多項式，若 $f(x)$ 有 $(ax-b)$ 之因式，則 $f\left(\frac{b}{a}\right)=0$。

❷ 若 $f(a)=0$ 且 $f(b)=0$ $\Leftrightarrow$ $(x-a)(x-b)$ 是 $f(x)$ 的因式

$\Rightarrow$ 亦即 $f(x)=(x-a)(x-b)Q(x)$。

3. **整係數一次因式檢驗法（牛頓定理）：**

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是整係數 n 次多項式，若 $ax-b$ 是 $f(x)$ 的因式，則 $a\mid a_n$ 且 $b\mid a_0$。

4. **公因式與公倍式：**

(1) 互質：當兩個多項式只有常數公因式時，規定其共同因式為 1，稱兩多項式互質。
(2) 最高公因式：兩個多項式，取它們共同的因式稱為公因式，所有公因式中次數最高者稱為最高公因式，以 H.C.F 表之。
(3) 最低公倍式：兩個多項式，取它們共同的倍式稱為公倍式，所有公倍式中次數最低者稱為最低公倍式，以 L.C.M 表之。

觀念補充 //

❶ 最高公因式與最低公倍式之寫法不唯一，可能差常數倍。
❷ 若 $f(x)$、$g(x)$ 之首項係數均為 1，則 $f(x)\times g(x)=$ 兩者 H.C.F × L.C.M。
❸ H.C.F $\mid$ L.C.M 恆成立。

4　因式定理

老師講解

設 x^3+mx^2+7x-3 有 $x-1$ 之因式，試求 m 之值。

想法　$(x-a)$ 為多項式 $f(x)$ 的因式 $\Leftrightarrow f(a)=0$。

[答：-5]

解　由因式定理

$\Rightarrow f(1)=0$

$\Rightarrow 1+m+7-3=0$

$\Rightarrow m=-5$

學生練習

設 $x+1$ 為 x^3+ax^2-3x+2 之因式，試求 a 之值。

[答：-4]

解　由因式定理

$\Rightarrow f(-1)=0$

$\Rightarrow -1+a+3+2=0$

$\Rightarrow a=-4$

★5 老師講解　利用餘式定理與因式定理求多項式　學生練習

已知 $f(x)$ 為二次多項式，若 $f(1)=f(-2)=0$ 且 $f(3)=20$，試求 $f(x)$。

想法　$f(1)=f(-2)=0$ 表 $f(x)$ 有 $(x-1)(x+2)$ 之因式。

[答：$2(x-1)(x+2)$]

解　$\because$ $f(1)=f(-2)=0$

$\therefore$ $f(x)$ 有 $(x-1)(x+2)$ 之因式

設 $f(x)=a(x-1)(x+2)$

$\Rightarrow$ $f(3)=20$

$\Rightarrow$ $20=a\times 2\times 5$

$\Rightarrow$ $a=2$

故 $f(x)=2(x-1)(x+2)$

已知 $f(x)$ 為二次多項式，若 $f(-1)=f(3)=0$ 且 $f(5)=-24$，試求 $f(x)$。

[答：$-2(x+1)(x-3)$]

解　設 $f(x)=a(x+1)(x-3)$

$\Rightarrow$ $f(5)=-24$

$\Rightarrow$ $-24=a\times 6\times 2$

$\Rightarrow$ $a=-2$

故 $f(x)=-2(x+1)(x-3)$

6 老師講解　整係數一次因式檢驗法　學生練習

試將 $2x^3-5x^2-4x+3$ 因式分解。

想法　利用整係數一次因式檢驗法進行因式分解。

[答：$(x+1)(2x-1)(x-3)$]

解　設一次因式為 $ax-b$，則 $a|2$ 且 $b|3$

列出可能因式：$x\pm 1$，$x\pm 3$，$2x\pm 1$，$2x\pm 3$，再代入檢查

$\because$ $f(-1)=0$

$\therefore$ 原式有 $x+1$ 之因式

$\Rightarrow$ $2x^3-5x^2-4x+3$

$=(x+1)(2x^2-7x+3)$

$=(x+1)(2x-1)(x-3)$

試將 $f(x)=2x^3-3x^2+6x-9$ 因式分解。

[答：$(2x-3)(x^2+3)$]

解　設一次因式為 $ax-b$，則 $a|2$ 且 $b|9$

列出可能因式：$x\pm 1$，$x\pm 3$，$x\pm 9$，$2x\pm 1$，$2x\pm 3$，$2x\pm 9$

再代入檢查只有 $(2x-3)$ 符合

$\Rightarrow$ $(2x^3-3x^2+6x-9)\div(2x-3)=x^2+3$

$\therefore$ $2x^3-3x^2+6x-9=(2x-3)(x^2+3)$

7 老師講解　求最高公因式與最低公倍式　學生練習

試求兩多項式 $f(x)=(x+1)(x+3)^2$ 與 $g(x)=x^3+6x^2+11x+6$ 的H.C.F 與L.C.M。

想法　H.C.F 取所有公因式中次數最高者，L.C.M 取所有公倍式中次數最低者。

[答：H.C.F $=(x+1)(x+3)$，
L.C.M $=(x+1)(x+2)(x+3)^2$]

解　將 $g(x)$ 用一次因式檢驗法分解得
$g(x)=(x+1)(x+2)(x+3)$
$\therefore$ $f(x)$ 與 $g(x)$ 之
H.C.F $=(x+1)(x+3)$
$f(x)$ 與 $g(x)$ 之
L.C.M $=(x+1)(x+2)(x+3)^2$

試求兩多項式 $f(x)=(x-1)(x-2)$ 與 $g(x)=2x^3-7x^2+7x-2$ 的 H.C.F 與 L.C.M。

[答：H.C.F $=(x-1)(x-2)$，
L.C.M $=(x-1)(x-2)(2x-1)$]

解　$g(x)$ 用一次因式檢驗法分解得
$g(x)=(x-1)(x-2)(2x-1)$
$\therefore$ $f(x)$ 與 $g(x)$ 之
H.C.F $=(x-1)(x-2)$
$f(x)$ 與 $g(x)$ 之
L.C.M $=(x-1)(x-2)(2x-1)$

進階例題

8 老師講解　餘式定理的特殊假設法　學生練習

設 $f(x)$ 為三次以上多項式，若以 $x-1$ 除之，得餘式為 8，以 x^2+x+1 除之，得餘式為 $7x+16$，則以 x^3-1 除之，所得餘式為何？

[答：$-5x^2+2x+11$]

解　設餘式為 $a(x^2+x+1)+7x+16$
$f(1)=a\times3+23=8 \Rightarrow a=-5$
所求為 $-5(x^2+x+1)+7x+16$
$=-5x^2+2x+11$

已知多項式 $f(x)$，若以 $x-2$ 除之，得餘式為 10，以 x^2+x+1 除之，得餘式為 $x+1$，則以 $(x-2)(x^2+x+1)$ 除之，所得餘式為何？

[答：x^2+2x+2]

解　設餘式為 $a(x^2+x+1)+x+1$
$f(2)=10 \Rightarrow a=1$
所求為 $(x^2+x+1)+x+1=x^2+2x+2$

4-2 段落測驗

★表難題

1. 設 x^3+4x^2+ax-8 除以 $x-2$ 之餘數為 -4，則 $a=$ ___-10___。

2. 多項式 $f(x)=mx^3+2x^2-3$ 與 $g(x)=x^4-2mx^2+5x+4$ 除以 $x+1$ 所得餘式相同，則 $m=$ ___1___。

3. 已知 $f(x)=700x^4-1800x^3+900x^2-213x+30$，則 $f(2)=$ ___4___。

4. 設 $(x+4)\,|\,f(x)-2$ 且 $(x-5)\,|\,f(x)+7$，則 $f(x)$ 除以 $(x+4)(x-5)$ 的餘式為 ___$-x-2$___。

5. 若 $f(x)$ 除以 $x-1$ 之餘式為 3，除以 $x+1$ 之餘式為 1，則 $f(x)$ 除以 x^2-1 之餘式為 ___$x+2$___。

6. 因式分解 x^3-x^2-5x-3，得 ___$(x+1)^2(x-3)$___。

7. 因式分解 $4x^3-12x^2+11x-3$，得 ___$(x-1)(2x-1)(2x-3)$___。

8. 多項式 $(x-1)(x^2-5x+4)$ 與 $(2x^2-x-1)(2x+1)^2$ 的 H.C.F 為 ___$(x-1)$___，L.C.M 為 ___$(x-1)^2(x-4)(2x+1)^3$___。

9. 已知 $x-3$ 為 x^3+kx-6 之因式，則下列何者為 x^3+kx-6 之因式分解？___D___。
(A) $(x-3)(x-2)(x-1)$ (B) $(x-3)(x-2)(x+1)$ (C) $(x-3)(x+2)(x-1)$
(D) $(x-3)(x+2)(x+1)$。 【統測】

10. 已知 m、n 為實數，$Q(x)$ 為二次多項式。若 $x^4-mx^3-x^2-5x+n=(x^2-3x+2)Q(x)$，則 $2m+n=$ ___8___。 【統測】

★11. 已知 $f(x)$、$g(x)$ 兩多項式。若 $g(x)$ 除以 $2x-3$ 的餘式為 1，且 $f(x)=g(x)(2x-3)+5$，則 $(f(x))^2$ 除以 $(2x-3)^2$ 的餘式為 ___$20x-5$___。 【統測】

12. 設 $x-1$ 和 $x+1$ 為多項式 $x^5+ax^4+bx^3+5x^2+2x-5$ 的因式，則 $3a+b$ 之值為 ___-3___。 【統測】

13. 已知 $f(x)$ 為一實係數多項式，且 $f\left(\frac{3}{2}\right)=27$，$f\left(-\frac{5}{3}\right)=8$。若 $f(x)$ 除以 $6x^2+x-15$ 的餘式為 $ax+b$，則 $a+b=$ ___24___。 【統測】

4-2 高手過招

1. 已知 $f(x)$ 為三次多項式，以 x^2+x+2 除之得餘式為 $x+3$，以 x^2+x-2 除之得餘式為 $5x+7$，則 $f(x)=$ ___x^3+2x^2+4x+5___。

4-3 多項式方程式

重點一　多項式方程式

1. **多項式方程式：**

設 $f(x)$ 是一元 n 次多項式，若令 $f(x)=0$，稱 $f(x)=0$ 為一元 n 次方程式，若有一數 α 滿足 $f(\alpha)=0$，則稱 $x=\alpha$ 為 $f(x)=0$ 之根或解。

2. **一元二次方程式：**

$ax^2+bx+c=0$（a、b、c 為實數且 $a\neq 0$）稱為一元二次方程式，其公式解為

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ 。

3. **一元二次方程式根的判定：**

一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$，令根的判別式 $=b^2-4ac$

(1) $b^2-4ac>0 \Rightarrow$ 兩根是相異實根。

(2) $b^2-4ac=0 \Rightarrow$ 兩根是相等實根。

(3) $b^2-4ac<0 \Rightarrow$ 兩根是共軛虛根。

4. **根與係數的關係：**

若 α、β 為一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根，則

(1) 兩根之和：$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$。

(2) 兩根之積：$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$。

觀念補充 //

❶ 當兩根互為倒數時，$a=c$。

❷ 當兩根互為相反數時，$b=0$。

1 老師講解　解一元二次方程式　學生練習

試解下列方程式：

(1) $3x^2-8x-3=0$　(2) $x^2+2x-1=0$

想法　利用十字交乘法或代公式求解。

[答：(1) $x=-\frac{1}{3}$ 或 3　(2) $x=-1\pm\sqrt{2}$]

解 (1) $3x^2-8x-3=0$

$\Rightarrow (3x+1)(x-3)=0$

$\Rightarrow x=-\frac{1}{3}$ 或 3

(2) $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}$

$=\dfrac{-2\pm\sqrt{8}}{2}$

$=-1\pm\sqrt{2}$

試解下列方程式：

(1) $8x^2+2x-3=0$　(2) $x^2-4x+2=0$

[答：(1) $x=\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{3}{4}$　(2) $x=2\pm\sqrt{2}$]

解 (1) $8x^2+2x-3=0$

$\Rightarrow (2x-1)(4x+3)=0$

$\Rightarrow x=\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{3}{4}$

(2) $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\dfrac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\times1\times2}}{2\times1}$

$=\dfrac{4\pm\sqrt{8}}{2}=\dfrac{4\pm2\sqrt{2}}{2}$

$=2\pm\sqrt{2}$

2 老師講解　一元二次方程式之根與係數關係　學生練習

設 α、β 為方程式 $x^2-3x+1=0$ 之兩根，試求：(1) $\alpha^2+\beta^2$　(2) $\alpha^3+\beta^3$

想法　一元二次方程式根與係數關係，

兩根之和：$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$，

兩根之積：$\alpha\beta=\frac{c}{a}$。

[答：(1) 7　(2) 18]

解 由根與係數關係得 $\alpha+\beta=3$，$\alpha\beta=1$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=3^2-2\times1$

$=7$

(2) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=3^3-3\times1\times3$

$=18$

設 α、β 為 $x^2+4x-7=0$ 的兩根，試求：

(1) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$　(2) $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$

[答：(1) $\frac{4}{7}$　(2) $\frac{30}{49}$]

解 由根與係數關係得 $\alpha+\beta=-4$，$\alpha\beta=-7$

(1) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{-4}{-7}=\dfrac{4}{7}$

(2) $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$

$=\dfrac{(-4)^2-2\times(-7)}{(-7)^2}$

$=\dfrac{30}{49}$

3 一元二次方程式之判別式

老師講解

設 k 為實數，若方程式 $x^2+kx+2k-3=0$ 有實根，試求 k 的範圍。

想法 二次方程式有實根（相異或相等），則 $b^2-4ac\ge 0$。

[答：$k\ge 6$ 或 $k\le 2$]

解 $\because$ 方程式有實根

$\therefore$ $b^2-4ac\ge 0$

$\Rightarrow$ $k^2-4\times 1\times(2k-3)\ge 0$

$\Rightarrow$ $k^2-8k+12\ge 0$

$\Rightarrow$ $(k-6)(k-2)\ge 0$

$\Rightarrow$ $k\ge 6$ 或 $k\le 2$

學生練習

設 k 為實數，若方程式 $x^2+(k+2)x+(2k+1)=0$ 有相等實根，試求 k 之值。

[答：$k=0$ 或 4]

解 $\because$ 方程式有兩相等實根

$\therefore$ $b^2-4ac=0$

$\Rightarrow$ $(k+2)^2-4(2k+1)=0$

$\Rightarrow$ $k^2-4k=0$

$\Rightarrow$ $k(k-4)=0$

$\Rightarrow$ $k=0$ 或 4

重點二 複數運算

1. **虛數單位：**

在實數中找不到 $x^2+1=0$ 的根，我們用符號 $i=\sqrt{-1}$ 來表示其根，稱為虛數單位。

觀念補充 //

虛數不能比大小，若出現 $a>b$ 之不等式，則 a、b 一定是實數。

2. ***i* 的次方：** $i=\sqrt{-1}$，$i^2=-1$，$i^3=-i$，$i^4=1$。

3. ***i* 的週期性：** $i^{4n}=1$，$i^{4n+1}=i$，$i^{4n+2}=-1$，$i^{4n+3}=-i$。

4. **複數（$\mathbb{C}$）：實數與虛數合稱複數，一般表成 $a+bi$；其中 a 是實部，b 是虛部。**

(1) 當 $b=0$ 時，$a+bi=a$ 是實數。例如：$3+0i=3$ 是實數。

(2) 當 $a=0$，$b\ne 0$ 時，$a+bi=bi$ 是純虛數。例如：$0+3i=3i$ 是純虛數。

5. **複數相等：**

(1) 設 a、b、c、d 是實數，若 $a+bi=c+di \iff a=c$ 且 $b=d$。

(2) 設 a、b 是實數，若 $a+bi=0$，則 $a=0$ 且 $b=0$。

6. **複數運算：**

(1) $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\begin{cases}-\sqrt{ab}\text{，}a<0\text{，}b<0\\ \sqrt{ab}\text{，其他情形}\end{cases}$，例如：$\begin{cases}\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}=\sqrt{2}\,i\times\sqrt{3}\,i=\sqrt{6}\,i^2=-\sqrt{6}\\ \sqrt{2}\times\sqrt{-3}=\sqrt{2}\times\sqrt{3}\,i=\sqrt{6}\,i=\sqrt{-6}\end{cases}$

(2) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{a}{b}}\text{，}a>0\text{，}b<0\\ \sqrt{\dfrac{a}{b}}\text{，其他情形}\end{cases}$，例如：$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}\,i}=-\sqrt{2}\,i=-\sqrt{-2}\\ \dfrac{\sqrt{-6}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{\sqrt{6}\,i}{\sqrt{3}\,i}=\sqrt{2}\end{cases}$

7. **共軛複數：**

設 $z=a+bi$，其中 a、b 為實數，則 $a-bi$ 稱為 z 的共軛複數，記為 $\bar{z}$。例如：$z=1+2i$，$\bar{z}=1-2i$。

8. **複數的四則運算：**

設 a、b、c、d 是實數

(1) 加法：$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$。

(2) 減法：$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$。

(3) 乘法：$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$。

(4) 除法：$\dfrac{1}{a+bi}=\dfrac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}=\dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$。（將分子、分母同乘分母的共軛複數再化簡）

觀念補充 //

若 a、$b\in\mathbb{R}$，且 $a^2+b^2=0$，則 $a=b=0$；
但若 a、$b\in\mathbb{C}$，且 $a^2+b^2=0$，並不保證 $a=b=0$。例如：$a=1$，$b=i$，
代入 $a^2+b^2=1^2+i^2=0$。

9. **共軛複數的性質：**

(1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$。

(2) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$。

(3) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$。

(4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ （$z_2\neq0$）。

觀念補充 //

若 $z=\bar{z}$，則 $z\in\mathbb{R}$；若 $z=-\bar{z}$，則 z 為純虛數。

4 老師講解　複數相等概念　學生練習

設 x、$y\in\mathbb{R}$，且滿足 $2x-3yi=-x+2+(y+6)i$，試求 x、y 之值。

想法　a、b、c、d 是實數，
若 $a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c$ 且 $b=d$。

[答：$x=\dfrac{2}{3}$，$y=-\dfrac{3}{2}$]

解　$2x-3yi=-x+2+(y+6)i$

$$\therefore \begin{cases}2x=-x+2\\-3y=y+6\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{2}{3}，y=-\frac{3}{2}$$

設 x、y 為實數且 $x+y+12i=-5+(2x+y)i$，試求 x、y 之值。

[答：$x=17$，$y=-22$]

解

$$\begin{cases}x+y=-5\\2x+y=12\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ x=17，y=-22$$

5 老師講解　虛數 i 的運算　學生練習

化簡 $i+i^2+\cdots+i^{51}$。

想法　i 的週期性：
$i^{4n}=1$，$i^{4n+1}=i$，
$i^{4n+2}=-1$，$i^{4n+3}=-i$。

[答：-1]

解　所求

$$=(i+i^2+i^3+i^4)+\cdots+(i^{49}+i^{50}+i^{51})$$
$$=0+\cdots+0+i+(-1)+(-i)$$
$$=-1$$

化簡 $1+i+i^2+\cdots+i^{102}$。

[答：i]

解　所求

$$=1+(i+i^2+i^3+i^4)+\cdots+(i^{101}+i^{102})$$
$$=1+0+\cdots+0+(i^{101}+i^{102})$$
$$=1+i+(-1)$$
$$=i$$

6 老師講解 複數運算 學生練習

設 a、b 為實數，若 $\dfrac{a+bi}{3+4i}=2-i$，

則 $a-b=$ ？

想法 利用複數之乘法運算：

$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$ 。

[答：5]

解 原式

$\Rightarrow\ a+bi=(3+4i)(2-i)=10+5i$

$\Rightarrow\ a=10$，$b=5$

$\Rightarrow\ a-b=5$

若 $\dfrac{7-4i}{-2-i}=x+yi$（x、y 為實數），

試求 x、y。

[答：：$x=-2$，$y=3$]

解 $\dfrac{7-4i}{-2-i}=\dfrac{(7-4i)(-2+i)}{(-2-i)(-2+i)}$

$=\dfrac{-10+15i}{5}$

$=-2+3i$

$=x+yi$

$\Rightarrow\ x=-2$，$y=3$

7 老師講解 共軛複數 學生練習

試求下列各複數之共軛複數：

(1) $z=(2-i)(4+3i)$ (2) $z=\dfrac{2i}{1+i}$

想法 $z=a+bi$，則 $\bar{z}=a-bi$。

[答：(1) $11-2i$ (2) $1-i$]

解 (1) $\bar{z}=\overline{(2-i)(4+3i)}$

$=(2+i)(4-3i)$

$=11-2i$

(2) $\bar{z}=\overline{\left(\dfrac{2i}{1+i}\right)}$

$=\dfrac{-2i}{1-i}$

$=\dfrac{-2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}$

$=1-i$

試求下列各複數之共軛複數：

(1) $z=\dfrac{i-2}{3+i}$ (2) $z=\dfrac{2i^2+i}{1-3i^3}$

[答：(1) $\dfrac{-1-i}{2}$ (2) $\dfrac{1-7i}{10}$]

解 (1) $\bar{z}=\dfrac{-2-i}{3-i}$

$=\dfrac{(-2-i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}$

$=\dfrac{-5-5i}{10}$

$=\dfrac{-1-i}{2}$

(2) $z=\dfrac{2i^2+i}{1-3i^3}=\dfrac{-2+i}{1+3i}$

$\bar{z}=\dfrac{-2-i}{1-3i}$

$=\dfrac{(-2-i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}$

$=\dfrac{1-7i}{10}$

8 老師講解 **複數概念** 學生練習

已知複數 z 的虛部是 1，且 $\frac{1}{z}$ 的實部是 $\frac{3}{10}$，試求 z。

想法 若 $z=a+bi$，則 $\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}$。

[答：$z=\frac{1}{3}+i$ 或 $z=3+i$]

解 設 $z=a+i$，$a\in\mathbb{R}$

則 $\frac{1}{z}=\frac{1}{a+i}=\frac{a-i}{(a+i)(a-i)}$

$=\frac{a}{a^2+1}+\frac{-1}{a^2+1}i$

依題意 $\frac{a}{a^2+1}=\frac{3}{10}$

$\Rightarrow\ 10a=3a^2+3$

$\Rightarrow\ 3a^2-10a+3=0$

$\Rightarrow\ (3a-1)(a-3)=0$

$\Rightarrow\ a=\frac{1}{3}$ 或 3

故 $z=\frac{1}{3}+i$ 或 $z=3+i$

已知複數 z 的虛部為 3，且 $\frac{1}{z}$ 之實部為 $\frac{2}{13}$，試求 z。

[答：$z=2+3i$ 或 $z=\frac{9}{2}+3i$]

解 令 $z=a+3i$，$a\in\mathbb{R}$

則 $\frac{1}{z}=\frac{1}{a+3i}=\frac{a-3i}{(a+3i)(a-3i)}$

$=\frac{a}{a^2+9}+\frac{-3}{a^2+9}i$

依題意 $\frac{a}{a^2+9}=\frac{2}{13}$

$\Rightarrow\ 2a^2-13a+18=0$

$\Rightarrow\ (2a-9)(a-2)=0$

$\Rightarrow\ a=\frac{9}{2}$ 或 2

故 $z=2+3i$ 或 $z=\frac{9}{2}+3i$

重點三　一元二次方程式的虛根

1. 一元二次方程式的虛根：

一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$（a、b、c 為實數且 $a\neq0$），令根的判別式 $=b^2-4ac$，

當 $b^2-4ac<0$ $\Rightarrow$ 兩根是共軛虛根（因為 $\sqrt{b^2-4ac}$ 是虛數）。

2. 一元二次方程式虛根性質：

實係數方程式：設 a、b、$c\in\mathbb{R}$：$ax^2+bx+c=0$，若有虛根必定會共軛出現。

複係數方程式：設 a、b、$c\in\mathbb{C}$：$ax^2+bx+c=0$，若有虛根未必會共軛出現。

觀念補充 //

根與係數關係（兩根之和與兩根之積）不論實係數方程式或複係數方程式均成立。

9 老師講解　一元二次方程式根的性質　學生練習

若一元二次方程式 $x^2+(a+1)x+(2a-1)=0$ 有共軛虛根，試求實數 a 的範圍。

想法　判別式 $b^2-4ac<0$，則兩根為共軛虛根。

[答：$1<a<5$]

解　判別式 $b^2-4ac<0$

$\Rightarrow\ (a+1)^2-4(2a-1)<0$

$\Rightarrow\ a^2-6a+5<0$

$\Rightarrow\ (a-1)(a-5)<0$

$\Rightarrow\ 1<a<5$

若一元二次方程式 $x^2+(k+3)x-k=0$ 有共軛虛根，試求實數 k 的範圍。

[答：$-9<k<-1$]

解　判別式 $b^2-4ac<0$

$\Rightarrow\ (k+3)^2+4k<0$

$\Rightarrow\ k^2+10k+9<0$

$\Rightarrow\ (k+1)(k+9)<0$

$\Rightarrow\ -9<k<-1$

10 老師講解　實係數方程式之虛根共軛原則　學生練習

設 a、b 為實數，若 $1+\sqrt{2}\,i$ 為二次方程式 $2x^2+ax+b=0$ 之一根，試求 a、b 之值。

想法　實係數方程式有虛根必共軛出現。

[答：$a=-4$，$b=6$]

解　另一根必為 $1-\sqrt{2}\,i$，由根與係數的關係：

兩根之和：

$$\left(1+\sqrt{2}\,i\right)+\left(1-\sqrt{2}\,i\right)=-\frac{a}{2}$$

$\Rightarrow\ a=-4$

兩根之積：

$$\left(1+\sqrt{2}\,i\right)\left(1-\sqrt{2}\,i\right)=\frac{b}{2}$$

$\Rightarrow\ b=6$

設 a、b 為實數，若 $1-i$ 為二次方程式 $x^2+ax+b=0$ 之一根，試求 a、b 之值。

[答：$a=-2$，$b=2$]

解　另一根必為 $1+i$

由根與係數的關係：

兩根之和：

$(1+i)+(1-i)=-a$

$\Rightarrow\ a=-2$

兩根之積：

$(1+i)(1-i)=b$

$\Rightarrow\ b=2$

★ 11 老師講解

若$\alpha<0$，則$\sqrt{\alpha}$為虛數

學生練習

已知α、β為方程式$x^2+9x+4=0$之兩根，試求$\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)^2$之值。

想法　若α、β為負數，則$\sqrt{\alpha}$、$\sqrt{\beta}$是虛數。

[答：-5]

解　由根與係數關係：

兩根之和：$\alpha+\beta=-9$

兩根之積：$\alpha\beta=4$

可知α、β均為負數，則$\sqrt{\alpha}$、$\sqrt{\beta}$為虛數

$\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)^2$

$=\left(\sqrt{\alpha}\right)^2-2\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}+\left(\sqrt{\beta}\right)^2$

$=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$

$=-9+4$

$=-5$

設$x^2+3x+1=0$之兩根為α和β，試求$\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^2$之值。

[答：-5]

解　由根與係數關係：

$\begin{cases}\alpha+\beta=-3\\ \alpha\beta=1\end{cases}$

可知α、β均為負數，則$\sqrt{\alpha}$、$\sqrt{\beta}$為虛數

$\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^2$

$=\left(\sqrt{\alpha}\right)^2+2\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}+\left(\sqrt{\beta}\right)^2$

$=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}$

$=-3-2\times1$

$=-5$

進階例題

12 老師講解

虛係數方程式求實根

學生練習

設a為實數，若二次方程式$x^2-(a+i)x+(-2+2i)=0$有實根，試求a之值。

[答：1]

解　設α為方程式的實根

代入原式

$\Rightarrow\ \alpha^2-(a+i)\alpha+(-2+2i)=0$

$\Rightarrow\ \left(\alpha^2-a\alpha-2\right)-(\alpha-2)i=0$

故$\alpha^2-a\alpha-2=0$且$\alpha-2=0$

$\Rightarrow\ \alpha=2$

代回得$4-2a-2=0\ \Rightarrow\ a=1$

設a為實數，若$x^2-(i-2)x+(a-2)i-3=0$有實根，試求此實根。

[答：-3或1]

解　令實根為α，代入原式

$\Rightarrow\ \alpha^2-(i-2)\alpha+(a-2)i-3=0$

$\Rightarrow\ \left(\alpha^2+2\alpha-3\right)+(-\alpha+a-2)i=0$

故$\begin{cases}\alpha^2+2\alpha-3=0\\ -\alpha+a-2=0\end{cases}$

$\Rightarrow\ \alpha=-3$或1

4-3 段落測驗

★表難題

1. 已知 a、b 為實數且 $a \neq b$，判斷方程式 $(a-b)x^2+x+(b-a)=0$ 兩根的性質為__相異實根__。（填相異實根、相等實根或共軛虛根）

2. 方程式 $x+\dfrac{1}{x}=6$ 的根為__$3\pm 2\sqrt{2}$__。

3. 已知 $x^2-4x+1=0$，則 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=$__14__。

4. 設方程式 $x^2+(2m+5)x+\left(m^2-3m+2\right)=0$ 有實數解，則 m 之最小整數為__0__。

5. 設 x、y 為實數，若 $(x-2i)-y(1-i)=-2+x(5-3i)$，則 $x=$__0__，$y=$__2__。

6. 化簡下列各式：

   (1) $(5-2i)\times(4+3i)=$__$26+7i$__。

   (2) $\dfrac{1+3i}{2-i}=$__$\dfrac{-1+7i}{5}$__。

7. 設 a、c 為實數，若 $2+3i$ 為 $ax^2-4x+c=0$ 之一根，則 $a=$__1__，$c=$__13__。

★ 8. 化簡 $(1-i)^{100}-(1+i)^{100}=$__0__。

9. 設 $i=\sqrt{-1}$ 且 a 與 b 為兩實數，若 $(a+bi)(1+3i)=8+4i$，則 $(a+bi)^2=$__$-8i$__。

★ 10. 設 $x^2+6x+4=0$ 之兩根為 α 和 β，試求：

   (1) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}=$__7__。

   (2) $\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^2=$__$-10$__。

11. 已知 $i=\sqrt{-1}$ 且 a、b 為實數，若 $(2+i)(a+bi)=15+5i$，則 $a+b=$__6__。【104(C)】

12. 已知 a 和 c 為實數，若複數 $a+2i$ 為一元二次方程式 $x^2+2x+c=0$ 的一根，則 c 之值為__5__。【統測】

13. 若 α、β 為方程式 $x-\dfrac{3}{x}=-1$ 的兩相異實根，則 $\left(\dfrac{2}{\alpha}+1\right)\left(\dfrac{2}{\beta}+1\right)=$__$\dfrac{1}{3}$__。【統測】

★ 14. 令 $i=\sqrt{-1}$。若 $1+i$ 為方程式 $2x^2+kx+6+2i=0$ 的一根，則 $k=$__-6__。【統測】

15. 設 $f(x)=x^2-3x+2$，若 $i=\sqrt{-1}$，則 $f(-1+i)$ 之值為__$5-5i$__。【統測】

4-4 分式與根式的運算

重點一　分式

1. 分式：

將 $f(x)\div g(x)$ 表成 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$（$g(x)$ 為非零多項式），我們稱之為分式，例如：$\dfrac{x+1}{x+2}$。

2. 分式的四則運算：

(1) 加、減法：$\dfrac{f(x)}{g(x)}\pm\dfrac{h(x)}{k(x)}\quad\Rightarrow\quad$ 通分 $=\dfrac{f(x)k(x)\pm g(x)h(x)}{g(x)k(x)}$。

(2) 乘法：$\dfrac{f(x)}{g(x)}\times\dfrac{h(x)}{k(x)}=\dfrac{f(x)h(x)}{g(x)k(x)}$。

(3) 除法：$\dfrac{f(x)}{g(x)}\div\dfrac{h(x)}{k(x)}=\dfrac{f(x)}{g(x)}\times\dfrac{k(x)}{h(x)}=\dfrac{f(x)k(x)}{g(x)h(x)}$。

3. 部分分式：

將一個分式拆解成幾個真分式的和，稱為部分分式，

例如：$\dfrac{3x-4}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}$。

觀念補充 //

部分分式常見的基本類型：

❶ $\dfrac{\alpha x+\beta}{(x-a)(x-b)}=\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}$

❷ $\dfrac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{(x-a)\left(x^2+bx+c\right)}=\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{Bx+C}{x^2+bx+c}$

❸ $\dfrac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{(x-a)^3}=\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{(x-a)^2}+\dfrac{C}{(x-a)^3}$

4. 分式方程式：

方程式中含有分式者稱為分式方程式，其解必須驗算，不使分母為 0。

1 老師講解　分式的四則運算　學生練習

化簡

$$\frac{x^2+5x-6}{x^2-1}\times\frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}\div\frac{x-3}{x^2+2x+1}\text{。}$$

想法　分式乘除運算若有公因式可先約分，再依分子分母相乘規則。

[答：$x+6$]

解　逐項因式分解再約分：

$$\text{原式}=\frac{\cancel{(x-1)}(x+6)}{\cancel{(x+1)}\cancel{(x-1)}}\times\frac{\cancel{(x-2)}\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x+1)}\cancel{(x-2)}}\times\frac{\cancel{(x+1)^2}}{\cancel{x-3}}$$

$$=x+6$$

化簡 $\frac{3}{x+2}-\frac{x}{x-2}+\frac{4x}{x^2-4}$ 。

[答：$-\frac{x-3}{x+2}$]

解　$\text{原式}=\frac{3(x-2)-x(x+2)}{(x+2)(x-2)}+\frac{4x}{x^2-4}$

$$=\frac{(-x^2+x-6)+4x}{x^2-4}$$

$$=\frac{-x^2+5x-6}{x^2-4}$$

$$=-\frac{x-3}{x+2}$$

2 老師講解　解部分分式　學生練習

已知 $\frac{5x-6}{x^2-2x}$ 可化為 $\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x}$ ，

試求 A、B。

想法　原式兩邊同乘以分母之 L.C.M，再兩邊比較係數。

[答：$A=2$，$B=3$]

解　由 $\frac{5x-6}{x^2-2x}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x}$

兩邊同乘以 x^2-2x

得 $5x-6=Ax+B(x-2)$

令 $x=0$ 代入得 $B=3$

令 $x=2$ 代入得 $A=2$

$\therefore$　$A=2$，$B=3$

化 $\frac{2x-1}{x^2-x-2}$ 為部分分式。

[答：$\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+1}$]

解　令 $\frac{2x-1}{x^2-x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}$

兩邊同乘以 $(x-2)(x+1)$

得 $2x-1=A(x+1)+B(x-2)$

令 $x=2$ 代入得 $A=1$

令 $x=-1$ 代入得 $B=1$

$\therefore$　$\frac{2x-1}{x^2-x-2}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+1}$

3 老師講解　解部分分式　學生練習

若 $\dfrac{5x+5}{(2x+1)\left(x^2+1\right)}=\dfrac{A}{2x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$，

試求 A、B、C。

想法　原式兩邊同乘以分母之 L.C.M，再兩邊比較係數。

[答：$A=2$，$B=-1$，$C=3$]

解　兩邊同乘以 $(2x+1)\left(x^2+1\right)$

得 $5x+5=A\left(x^2+1\right)+(Bx+C)(2x+1)$

用 $x=-\dfrac{1}{2}$ 代入，得

$\dfrac{5}{2}=A\times\dfrac{5}{4}\quad\Rightarrow\quad A=2$

乘開比較 x^2 項係數：$A+2B=0$

$\therefore\quad B=-1$

乘開比較常數項：$A+C=5$

$\therefore\quad C=3$

化 $\dfrac{x^2}{(x-1)\left(x^2+x-1\right)}$ 為部分分式。

[答：$\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{-1}{x^2+x-1}$]

解　令 $\dfrac{x^2}{(x-1)\left(x^2+x-1\right)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+x-1}$

兩邊同乘以 $(x-1)\left(x^2+x-1\right)$

得 $x^2=A\left(x^2+x-1\right)+(Bx+C)(x-1)$

用 $x=1$ 代入，得 $A=1$

乘開比較 x^2 項係數：$A+B=1\quad\Rightarrow\quad B=0$

乘開比較常數項：$-A-C=0$

$\Rightarrow\quad C=-1$

$\therefore$　原式 $=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{-1}{x^2+x-1}$

C

4

若 $\dfrac{3x^2+2x+1}{(x+2)^3}$

$=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{(x+2)^2}+\dfrac{C}{(x+2)^3}$，

試求 A、B、C。

想法　利用綜合除法連續除以 $(x+2)$ 求出對應項係數。

[答：$A=3$，$B=-10$，$C=9$]

解　$\dfrac{3x^2+2x+1}{(x+2)^3}$

$=\dfrac{A}{(x+2)}+\dfrac{B}{(x+2)^2}+\dfrac{C}{(x+2)^3}$

兩邊同乘以 $(x+2)^3$

得 $3x^2+2x+1=A(x+2)^2+B(x+2)+C$

利用綜合除法連續除以 $(x+2)$

$$
\begin{array}{rrr|l}
3 & +2 & +1 & -2 \\
 & -6 & +8 & \\
\hline
3 & -4 & +9 \to C & \\
 & -6 & & \\
\hline
3 & -10 \to B & & \\
3 \to A & & &
\end{array}
$$

得 $A=3$，$B=-10$，$C=9$

若 $\dfrac{x^3-2x^2-2}{(x+1)^4}=\dfrac{A}{(x+1)}+\dfrac{B}{(x+1)^2}$

$+\dfrac{C}{(x+1)^3}+\dfrac{D}{(x+1)^4}$，

試求 A、B、C、D。

[答：$A=1$，$B=-5$，$C=7$，$D=-5$]

解　兩邊同乘以 $(x+1)^4$

得 x^3-2x^2-2

$=A(x+1)^3+B(x+1)^2+C(x+1)+D$

利用綜合除法連續除以 $(x+1)$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & -2 & +0 & -2 & -1 \\
 & -1 & +3 & -3 & \\
\hline
1 & -3 & +3 & -5 \to D & \\
 & -1 & +4 & & \\
\hline
1 & -4 & +7 \to C & & \\
 & -1 & & & \\
\hline
1 & -5 \to B & & & \\
1 \to A & & & &
\end{array}
$$

得 $A=1$，$B=-5$，$C=7$，$D=-5$

5　老師講解　解分式方程式　學生練習

試解分式方程式

$$\frac{x^2+3x}{(3x+1)(x+1)}+\frac{x}{x+1}=1\text{。}$$

想法　原式同乘以分母之 L.C.M 化成整式方程式求解，但解出的根需驗算使分母不為零。

[答：$x=1$]

解　等號兩邊同乘以 $(3x+1)(x+1)$，得

$x^2+3x+x(3x+1)=(3x+1)(x+1)$

$\Rightarrow\ 4x^2+4x=3x^2+4x+1$

$\Rightarrow\ x^2-1=0$

$\Rightarrow\ x=1$ 或 -1（不合）

$\therefore$ 方程式的解為 $x=1$

試解分式方程式

$$\frac{4}{(x-1)(x-3)}=\frac{x}{3-x}+\frac{2}{1-x}\text{。}$$

[答：$x=-2$]

解　等號兩邊同乘以 $(x-1)(x-3)$，得

$4=-x(x-1)-2(x-3)$

$\Rightarrow\ x^2+x-2=0$

$\Rightarrow\ (x+2)(x-1)=0$

$\Rightarrow\ x=-2$ 或 1（不合）

$\therefore$ 方程式的解為 $x=-2$

重點二　根式

1. 根式運算（下列 A、B 均使根式有意義）：

(1) $\sqrt{A}\times\sqrt{B}=\sqrt{AB}$

(2) $\sqrt{A}\div\sqrt{B}=\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}=\sqrt{\dfrac{A}{B}}$（$B\neq 0$）

(3) $\sqrt[3]{A}\times\sqrt[3]{B}=\sqrt[3]{AB}$

(4) $\sqrt[3]{A}\div\sqrt[3]{B}=\dfrac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B}}$（$B\neq 0$）

觀念補充 //

有理化公式：

平方公式：$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$。

立方公式：$(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=a+b$，

$(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=a-b$。

2. 雙重根式：

$\sqrt{(x+y)\pm 2\sqrt{xy}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$（其中 $x>y>0$，大數放前小數放後）。

6 老師講解 根式化簡

試化簡下列各式：

(1) $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$　(2) $\left(\sqrt[3]{3}+2\right)\left(\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}+4\right)$

想法　立方公式：

$\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a+b$。

[答：(1) $\sqrt{x}+2$　(2) 11]

解 (1) 原式 $=\dfrac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$

$=\dfrac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x})^2-2^2}$

$=\sqrt{x}+2$

(2) 代立方公式 $=\left(\sqrt[3]{3}\right)^3+2^3=3+8=11$

學生練習

試化簡下列各式：

(1) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$　(2) $\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)$

[答：(1) $3+2\sqrt{2}$　(2) 1]

解 (1) 原式 $=\dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3})}$

$=\dfrac{(\sqrt{6})^2+2\times\sqrt{6}\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{3})^2}$

$=\dfrac{9+2\sqrt{18}}{3}$

$=3+2\sqrt{2}$

(2) 代立方公式 $=\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-1^3=2-1=1$

7 老師講解 雙重根式

試化簡下列各式：

(1) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$　(2) $\sqrt{8-\sqrt{28}}$

想法　$\sqrt{(x+y)\pm2\sqrt{xy}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$（$x>y>0$）。

[答：(1) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$　(2) $\sqrt{7}-1$]

解 (1) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3+2+2\sqrt{3\times2}}$

$=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}$

$=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{8-\sqrt{28}}=\sqrt{8-2\sqrt{7}}$

$=\sqrt{7+1-2\sqrt{7}}$

$=\sqrt{(\sqrt{7}-1)^2}$

$=\sqrt{7}-1$

學生練習

試化簡下列各式：

(1) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$　(2) $\sqrt{14-6\sqrt{5}}$

[答：(1) $3+\sqrt{2}$　(2) $3-\sqrt{5}$]

解 (1) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}=\sqrt{11+2\sqrt{18}}$

$=\sqrt{9+2+2\sqrt{18}}$

$=\sqrt{(\sqrt{9}+\sqrt{2})^2}$

$=3+\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{14-6\sqrt{5}}=\sqrt{14-2\sqrt{45}}$

$=\sqrt{9+5-2\sqrt{45}}$

$=\sqrt{(\sqrt{9}-\sqrt{5})^2}$

$=3-\sqrt{5}$

4-4 段落測驗

★表難題

1. 試化簡下列各式：

(1) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2x}{x^2-1}=$ $\underline{\dfrac{3x-1}{x^2-1}}$。

(2) $\dfrac{x+4}{x^2-2x}-\dfrac{3}{x^2-3x+2}=$ $\underline{\dfrac{x+2}{x(x-1)}}$。

2. 化簡 $\dfrac{4x+6}{x^2+2x-3}\div\dfrac{4x^2-9}{x^2-3x+2}\times\dfrac{2x^2+3x-9}{x^2-4}=$ $\underline{\dfrac{2}{x+2}}$。

★ 3. 設 $a+b+c=0$，則 $a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=$ $\underline{-3}$。

4. 分式方程式 $\dfrac{1}{x+7}+\dfrac{1}{x+9}=\dfrac{1}{x+6}+\dfrac{1}{x+10}$ 的解為 $\underline{x=-8}$。

5. 設 $\dfrac{3x+1}{x^2-2x-15}=\dfrac{A}{x+3}+\dfrac{B}{x-5}$，則 $4A+B=$ $\underline{6}$。

6. 化部分分式 $\dfrac{2x^2-4x+6}{(x+1)(x-2)(x-3)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x-3}$，則 $A=$ $\underline{1}$，

$B=$ $\underline{-2}$，$C=$ $\underline{3}$。

7. 設 $\dfrac{x^2-x+2}{(x+2)^3}=\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{b}{(x+2)^2}+\dfrac{c}{(x+2)^3}$，則 $a=$ $\underline{1}$，$b=$ $\underline{-5}$，

$c=$ $\underline{8}$。

8. 化簡 $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}-\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=$ $\underline{0}$。

9. 設 $\alpha=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$，$\beta=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$，則以 α、β 為兩根之二次方程式為 $\underline{x^2-4x+1=0}$。

★10. 已知 $a=\sqrt{7+2\sqrt{12}}$，$b=\sqrt{4+\sqrt{12}}$，則 $a-b=$ $\underline{1}$。

★11. 設實數 $2+\sqrt{3}$ 的整數部分為 a，小數部分為 b。若 p 為有理數且 b 為方程式 $ax^2+px-6=0$ 之一根，則 $p=$ $\underline{6}$。【統測】

12. 已知 a、b、c 為實數，若 $x\neq\dfrac{3}{2}$ 且 $\dfrac{4x^2-6x-3}{(2x-3)^2}=a+\dfrac{b}{2x-3}+\dfrac{c}{(2x-3)^2}$ 恆成立，

則 $a+b+2c=$ $\underline{-2}$。【統測】

4-4 高手過招

1. 設 $x=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$，則 $\left(x^2+3x\right)^3=$ $\underline{-1}$。【統測】

題目

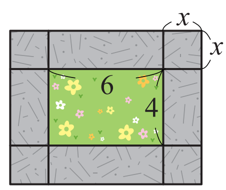
小萌平日喜歡園藝，她計劃在住家庭院四周圍出一個狹長的花圃，並在長 6 公尺，寬 4 公尺的花圃內框鋪上培養土來種植花卉。為了美化園藝空間，她在花圃外圍開闢一條小路，且設定路的寬度固定，同時小路的總面積須為 56 平方公尺。試求滿足此條件的路寬為多少公尺？

關鍵字　花圃長 6 公尺，寬 4 公尺
外圍小路寬度固定
小路的總面積須為 56 平方公尺

單元公式　$ax^2+bx+c=0$（a、b、c 為實數）之解為 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

翻譯成數學式　試求 $x^2+5x-14=0$ 之正實根

解題　依題意，先假設小路寬為 x 公尺（$x>0$）
再依據觀察到的情境列出方程式
我們用圖像幫助思考，繪圖如右



得出四個角落之正方形道路面積為 $4x^2$
算出長方形道路面積為 $2\times(6x+4x)$
進而列出小路總面積為 $4x^2+2\times(6x+4x)=56$
整理得 $x^2+5x-14=0$
將方程式因式分解得 $(x-2)(x+7)=0$
解出 $x=2$ 或 $x=-7$（負根，不合）
故路寬為 2 公尺

● **回顧：**一元二次方程式是數學教材中極為重要的主題，依據代數基本定理的論述，當解一元二次方程式碰到判別式 $b^2-4ac<0$ 時，發現實數系不夠用，需進一步擴展數系，複數系遂應運而生，至此整個數系臻於完備。如何列出本題關鍵的一元二次方程式呢？請同學認真體會上述的剖析和思維，對提升數學程度才有實質的幫助。

CH 4 素養競技場

★表難題

1. 某玩具製造公司專接國外訂單，每次接到訂單都需先用 3D 列印製作出半成品再校調、開模。依過去經驗，接到訂單數量 x 與報價總值有如下關係：

數量 x（千個）	報價總值（萬元）
5	37.5
10	70
15	97.5

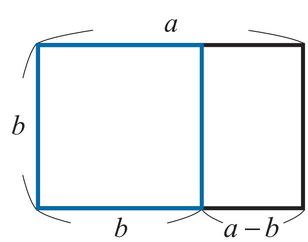
以此資料建立一個二次函數的報價總值函數 $g(x)$，試求 $g(x)$。

答：$g(x)=-\dfrac{1}{10}x^2+8x$

2. 依照「道路交通標誌標線號誌設置規則」中第 231 條規定，黃燈秒數係依該路段之速限設置秒數。設某交叉路口的「閃黃燈秒數」是以公式 $\dfrac{v}{10}-\dfrac{80}{v}+1$ 來規範，其中 v（公里／時）為該路段的最高時速限制。試問：將最高時速限制 v 訂為多少時，此交叉路口的「閃黃燈秒數」會剛好是 3 秒？

答：40 公里 / 小時

3. 將長為 a，寬為 b（$a>b$）之矩形裁掉邊長為 b 之正方形後，剩下長為 b，寬為 $a-b$ 之矩形，如圖，當大矩形與小矩形相似，即 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{a-b}$ 成立，此長寬之比值 $\dfrac{a}{b}$ 稱為黃金比例，試求黃金比例之值。



答：$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

高三人的考驗

如果不想甘於平凡，就要努力追求不凡，舞台是留給有實力的人。認眞，才能無憾人生。

統測解題影音

★表難題

(A) 1. 若 $\dfrac{x^2+2x+7}{(x-2)(x+2)(x+3)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{x+3}$，則 $A+B+C=$ ？

(A) 1 (B) 5 (C) 10 (D) 15。 【111(C)】

(B) 2. 若四次多項式 $ax^4+bx^3+6x^2+5x+2$ 除以 $(x+1)^2$ 所得的餘式為 $3x+4$，則 $a+b=$ ？

(A) -12 (B) -6 (C) -4 (D) -2。 【111(C)】

(B) 3. 已知 $i=\sqrt{-1}$，$\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^2=a+bi$，則 $a+b=$ ？

(A) $\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ (B) -1 (C) $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ (D) 1。 【110(C)】

(D) 4. 若 $\dfrac{3x-1}{(x-3)(x-1)}=\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{x-1}$，其中 A、B 為實數，則下列何者正確？

(A) $A=2$ (B) $B=1$ (C) $A=-2$ (D) $B=-1$。 【110(C)】

(C) 5. 已知三次多項式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 滿足 $f(1)=f(2)=f(-2)=2$，且 $f(-1)=8$，則下列何者正確？

(A) $a=-1$ (B) $b=1$ (C) $c=-4$ (D) $d=4$。 【110(C)】

(D) 6. 已知 $f(x)=x^2+bx+c$ 為二次多項式。若 $f(x)$ 被 $(x+1)^2$ 除的餘式被 $x-1$ 整除，且 $f(x)$ 被 $(x+1)^2$ 除的餘式被 $x+1$ 整除，則 $c=$ ？

(A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3。 【110(B)】

(B) 7. 已知多項式 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x^2+x+1)$ 所得之餘式為 $3x^2+5x-2$，則 $f(x)$ 除以 x^2+x+1 所得之餘式為何？

(A) -4 (B) $2x-5$ (C) 6 (D) $8x-5$。 【109(C)】

(C) 8. 設 α、β 為方程式 $x^2+5x+k=0$ 之二根，已知多項式 $f(x)=2x^2+7x+5$ 除以 $x-\alpha$、$x-\beta$ 所得的餘式分別為 -1、2，則 $k=$ ？

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7。 【109(C)】

(A) 9. 已知 $(x+1)^3$ 除 $f(x)$ 的餘式為 x^2-2x+3。若 $(x+1)^2$ 除 $f(x)$ 的餘式為 $ax+b$，則 $a+b=$ ？

(A) -2 (B) -1 (C) 3 (D) 4。 【109(B)】

★(A) 10. 已知 α、β 及 -3 為方程式 $x^3-x^2-11x+3=0$ 的三個相異解。求 $|\alpha-\beta|=$ ？

(A) $2\sqrt{3}$ (B) 4 (C) 6 (D) $4\sqrt{5}$。 【109(B)】

(D) 11. 已知 $f(x)$ 與 $g(x)$ 均為多項式，若以 x^2-3x+2 除 $f(x)$ 所得餘式為 $3x-4$，以 $x-1$ 除 $g(x)$ 所得餘式為 5，則以 $x-1$ 除 $f(x)+g(x)$ 所得餘式為何？
(A) -4　(B) -3　(C) 3　(D) 4。【108(C)】

(A) 12. 已知 $\dfrac{x^2+5x+6}{(x-2)(x^2+1)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$，其中 A、B 與 C 為實數，則 $A+2B+3C=$？
(A) -5　(B) 0　(C) 8　(D) 10。【108(C)】

★(B) 13. 設 $f(x)$ 為三次多項式，已知 $f(-1)=4$ 且 $f(-2)=f(1)=f(3)=0$。試問 $f(x)$ 除以 $x-2$ 之餘式為何？
(A) -6　(B) -2　(C) 3　(D) 5。【108(B)】

(D) 14. 已知 $z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，且 $\bar{z}$ 為其共軛複數。若 $\dfrac{1+z}{1+\bar{z}}=a+bi$，其中 a、b 為實數，則點 (a,b) 在第幾象限？　(A) 一　(B) 二　(C) 三　(D) 四。【107(C)】

(A) 15. 若 $f(x)=x^4-x^3+kx^2-2$ 為整係數多項式，其中 $k>0$ 且 $f(x)$ 有整係數一次因式 $x-h$，則 $k+h=$　(A) 3　(B) 2　(C) 1　(D) 0。【107(C)】

(C) 16. 求方程式 $\dfrac{-x^2}{x^2-4}=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{x-2}$ 所有解的和為何？
(A) -3　(B) -2　(C) -1　(D) 0。【106(C)】

(D) 17. 已知一元二次方程式 $x^2+x-5=0$ 有兩相異實根 a、b，若 $a<b$，則 $b-a=$
(A) 1　(B) $\sqrt{5}$　(C) $2\sqrt{5}$　(D) $\sqrt{21}$。【106(B)】

(A) 18. 已知 a、b 為實數，若 $f(x)=x^3+ax^2+bx-6$，$g(x)=x^2-7x+6$，且 $f(x)$ 可被 $g(x)$ 整除，求 $2a+3b$ 之值。
(A) 23　(B) 36　(C) 39　(D) 45。【105(C)】

(C) 19. 已知 $f(x)=x^2+ax+1$，以 $2x+3$ 除之所得餘式為 $\dfrac{1}{4}$，則 $f(x+1)$ 除以 $x-1$ 的餘式為何？　(A) 7　(B) 8　(C) 9　(D) 10。【105(B)】

(B) 20. 已知一個長方形的長增加 3 公分，寬增加 4 公分之後，可得一個正方形，且正方形的面積為原長方形面積的兩倍，則原長方形的面積為多少平方公分？
(A) 64　(B) 72　(C) 128　(D) 144。【105(B)】

(C) 21. 已知 a、b、c、d 為實數，若 $2x^3+x^2-5x-3=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$，則 $abcd=$？　(A) -20　(B) -10　(C) 10　(D) 20。【104(C)】