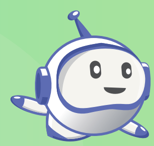


3 平面向量

雲端教室

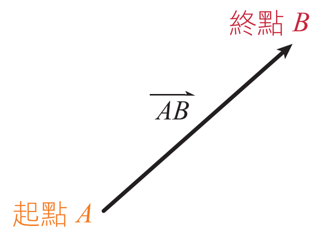
3-1 向量及其基本運算

課綱即時報	
新增	柯西不等式
刪除	無

重點一 向量的意義

1. **有向線段與向量：**

(1) 平面上相異兩點 A、B，以 A 為起點，B 為終點的有向線段，如圖，記為 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AB}$ 的長度記為 $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \overline{AB}$。



(2) 只考慮有向線段的長度與方向而不計其起點與終點，稱為向量。

觀念補充 //

❶ 向量具有長度和方向，因不計起點與終點，故簡寫成 $\vec{a}$，同時 $\vec{a}$ 可以任意平移。

❷ 任一有向線段 $\overrightarrow{AB}$，因具有長度與方向，所以也可用 $\vec{a}$ 來代表，即 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$。

2. **認識向量：**

(1) 零向量：起點與終點重合，例如：$\overrightarrow{AA}$ 以 $\vec{0}$ 表示，不可寫成 0，其長度為 0，方向為任意方向。

(2) 向量相等：長度相等，方向相同。

(3) 反向量：長度相等但方向相反的兩向量，例如：$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$。

3. **向量的坐標表示法：**

(1) O 為原點，A 坐標為 (a,b)，則 $\overrightarrow{OA}$ 可用 (a,b) 表示，即 $\overrightarrow{OA}=(a,b)$（稱位置向量）。

(2) 分向量：向量 $\overrightarrow{a}=(a,b)$ 在 x 軸的分向量為 $(a,0)$，在 y 軸的分向量為 $(0,b)$。

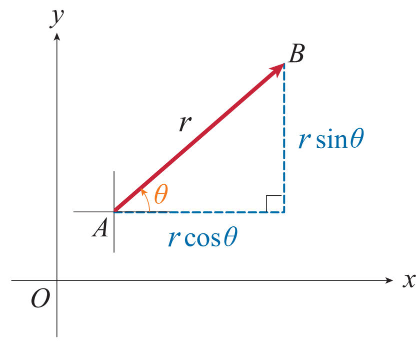
(3) 若 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，則 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$，其中 x_2-x_1 為 x 分量，y_2-y_1 為 y 分量。

(4) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(x\text{ 分量})^2+(y\text{ 分量})^2}$，即為 $\overrightarrow{AB}$ 之長度。

(5) $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，若 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}$ $\Leftrightarrow$ $a_1=b_1$，$a_2=b_2$。

4. **向量的方向角：**

如圖，坐標平面上，以 x 軸正向為始邊，逆時針轉到以 $\overrightarrow{AB}$ 為終邊的有向角 θ，稱為 $\overrightarrow{AB}$ 的方向角，其中 $0^\circ\le\theta<360^\circ$，若 $|\overrightarrow{AB}|=r$，方向角為 θ，則 $\overrightarrow{AB}=(r\cos\theta,r\sin\theta)$。



觀念補充 //

當 $\overrightarrow{a}=(a,b)$ 且方向角為 θ 時，$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{a^2+b^2}$ 且 $\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

1 老師講解　向量相等　學生練習

老師講解

$A(-1,0)$、$B(4,3)$ 為平面上兩點，若 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$，試求 C 坐標。

想法　若兩向量相等，則 x 分量相等，y 分量也相等。

[答：$(9,6)$]

解　令 $C(x,y)$

$\overrightarrow{AB}=(4-(-1),3-0)=(5,3)$

$\overrightarrow{BC}=(x-4,y-3)$

$\Rightarrow$ $(5,3)=(x-4,y-3)$

$\Rightarrow$ $x=9$，$y=6$

$\therefore$ $C(x,y)=(9,6)$

學生練習

$A(-3,1)$、$B(1,5)$ 為平面上兩點，若 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$，試求 $\overline{BC}$ 中點坐標。

[答：$(3,7)$]

解　令 $C(x,y)$

$\overrightarrow{AB}=(1-(-3),5-1)=(4,4)$

$\overrightarrow{BC}=(x-1,y-5)$

$\Rightarrow$ $(4,4)=(x-1,y-5)$

$\Rightarrow$ $C(x,y)=(5,9)$

$\overline{BC}$ 的中點坐標 $=\left(\dfrac{1+5}{2},\dfrac{5+9}{2}\right)=(3,7)$

2 老師講解　向量長度　學生練習

平行四邊形 $ABCD$ 中，已知 $A(1,2)$、$B(0,3)$、$C(-4,2)$，試求 $\overrightarrow{BD}$ 與 $|\overrightarrow{BD}|$。

想法　$\vec{a}$ 長度 $=\sqrt{(x\text{ 分量})^2+(y\text{ 分量})^2}$。

[答：$\overrightarrow{BD}=(-3,-2)$，$|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{13}$]

解　設 $D(x,y)$，因 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AB}=(0-1,3-2)=(-1,1)$

$\overrightarrow{DC}=(-4-x,2-y)$

得 $\begin{cases}-1=-4-x\\1=2-y\end{cases}\Rightarrow x=-3，y=1$

則 $D(-3,1)$，$\overrightarrow{BD}=(-3,-2)$

$|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$

平行四邊形 $ABCD$ 中，已知 $A(-1,4)$、$B(3,-2)$、$D(1,2)$，試求 $\overrightarrow{AC}$ 與 $|\overrightarrow{AC}|$。

[答：$\overrightarrow{AC}=(6,-8)$，$|\overrightarrow{AC}|=10$]

解　設 $C(x,y)$，因 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AB}=(3-(-1),-2-4)=(4,-6)$

$\overrightarrow{DC}=(x-1,y-2)$

得 $\begin{cases}4=x-1\\-6=y-2\end{cases}\Rightarrow x=5，y=-4$

則 $C(5,-4)$，$\overrightarrow{AC}=(6,-8)$

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{6^2+(-8)^2}=10$

3 老師講解　向量的方向角　學生練習

設 $|\overrightarrow{AB}|=2$，若 $\overrightarrow{AB}$ 的方向角為 $225°$，試求 $\overrightarrow{AB}$。

想法　若向量 $\overrightarrow{AB}$ 長度為 r，方向角為 θ，則 $\overrightarrow{AB}=(r\cos\theta,r\sin\theta)$。

[答：$(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$]

解　$\overrightarrow{AB}=(|\overrightarrow{AB}|\cos\theta,|\overrightarrow{AB}|\sin\theta)$

$=(2\cos225°,2\sin225°)$

$=(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$

設 $|\vec{a}|=4$，若 $\vec{a}$ 的方向角為 $\dfrac{5\pi}{3}$，試求 $\vec{a}$。

[答：$(2,-2\sqrt{3})$]

解　$\vec{a}=(|\vec{a}|\cos\theta,|\vec{a}|\sin\theta)$

$=\left(4\cos\dfrac{5\pi}{3},4\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)$

$=(2,-2\sqrt{3})$

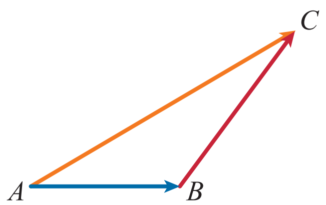
重點二　向量的運算性質

1. 向量的加法：

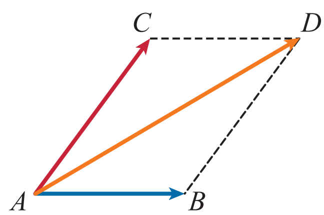
(1) 三角形法：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$，如圖 (a)。

(2) 平行四邊形法：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$，如圖 (b)。

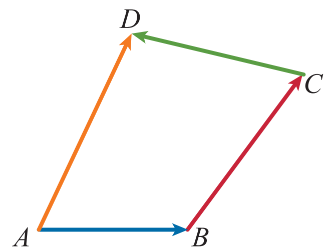
(3) 多邊形法則：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$（頭尾相連法），如圖 (c)。



(a)



(b)



(c)

(4) 向量加法的基本性質：

① 交換律：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}$。

② 結合律：$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}\right)$。

2. 向量的減法：

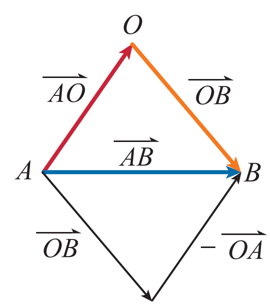
向量減法就是加上反向量，即 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$ 就是 $\overrightarrow{AB}+\left(-\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$。

觀念補充 //

向量合成與分解：

❶ 合成：$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$（$O$ 為任一點）。

❷ 分解：$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$。（規則：擠入 O 點，後面減前面）



3. 向量的實數積：

設向量 $\overrightarrow{a}$，$r\in\mathbb{R}$，考慮 $\overrightarrow{a}$ 的 r 倍，以 $r\overrightarrow{a}$ 表示，定義如下：

(1) $r>0$ 時，$r\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{a}$ 同向，且 $\left|r\overrightarrow{a}\right|=r\left|\overrightarrow{a}\right|$。

(2) $r<0$ 時，$r\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{a}$ 反向，且 $\left|r\overrightarrow{a}\right|=-r\left|\overrightarrow{a}\right|$。

4. 向量實數積的基本性質：

(1) $r\in\mathbb{R}$，$r\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)=r\overrightarrow{a}+r\overrightarrow{b}$。

(2) r、$s\in\mathbb{R}$，$(r+s)\overrightarrow{a}=r\overrightarrow{a}+s\overrightarrow{a}$；$(r\times s)\overrightarrow{a}=r\left(s\overrightarrow{a}\right)=s\left(r\overrightarrow{a}\right)$。

5. 兩向量的平行關係：

滿足實數積之兩向量具平行關係，亦即若 $\overrightarrow{a} \mathbin{/\mkern-5mu/} \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{a}=r\overrightarrow{b}$（$r\neq 0$）。

6. 向量坐標的加減法與實數積：

$\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$

(1) 加法：$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2)$。（同分量相加）

(2) 減法：$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2)$。（同分量相減）

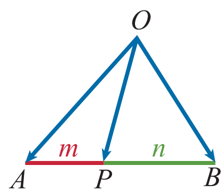
(3) 實數積：r 為實數，$r\overrightarrow{a}=r(a_1,a_2)=(ra_1,ra_2)$。

(4) 平行向量：$\overrightarrow{a} \mathbin{/\mkern-5mu/} \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{a}=r\overrightarrow{b}$，若 $b_1b_2\neq 0$，則 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$。（分量成比例）

7. 單位向量：

指任何長度為 1 的向量，x 軸上單位向量表成 $\overrightarrow{i}=(1,0)$，y 軸上單位向量表成 $\overrightarrow{j}=(0,1)$。將任一向量 $\overrightarrow{a}$ 切成 $|\overrightarrow{a}|$ 等分，每一等分即為一個單位向量。與 $\overrightarrow{a}$ 同方向的單位向量為 $\dfrac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}$，與 $\overrightarrow{a}$ 反方向的單位向量為 $-\dfrac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}$。

8. 向量分點公式（O 是任一點）：



內分點公式：如圖，若 P 在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$，則

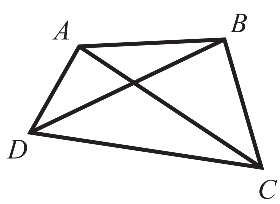
$$\overrightarrow{AP}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{OP}=\frac{n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m+n}。$$

4　老師講解　向量圖解法　學生練習

如圖，四邊形 $ABCD$，試求：

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$

(2) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}$



想法　運用向量運算之三角形法或平行四邊形法。

[答：(1) $\overrightarrow{0}$　(2) $\overrightarrow{DC}$]

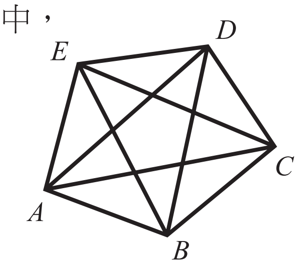
解 (1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{0}$

(2) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+(-\overrightarrow{BD})$
$=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}$
$=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}$
$=\overrightarrow{DC}$

如圖，五邊形 $ABCDE$ 中，試求：

(1) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{ED}$

(2) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}$



[答：(1) $\overrightarrow{AD}$　(2) $\overrightarrow{EC}$]

解 (1) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{ED}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE})+\overrightarrow{ED}$
$=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}$
$=\overrightarrow{AD}$

(2) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+(-\overrightarrow{AE})$
$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{EA}$
$=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}$
$=\overrightarrow{EC}$

5 老師講解　向量坐標的加減法與實數積運算　學生練習

已知 $A(3,2)$、$B(1,-1)$ 與 $C(7,4)$，

若 $\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，試求 P 點坐標。

想法　向量坐標的加減法規則 $\Rightarrow$ 同分量相加減。

[答：$(-1,-2)$]

解　設 $P(x,y)$

$\because\ \overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

$\Rightarrow\ (3-x,2-y)+2(1-x,-1-y)$

$-(7-x,4-y)=(0,0)$

$\Rightarrow\ (-2-2x,-4-2y)=(0,0)$

$\Rightarrow\ \begin{cases}-2-2x=0\\-4-2y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$

故 P 坐標為 $(-1,-2)$

已知 $A(2,2)$、$B(3,1)$、$C(4,-2)$ 與 $D(-1,-3)$ 為坐標平面上四點，若 O 為原點且 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CD}$，試求 P 點坐標。

[答：$(-9,-3)$]

解　設 $P(x,y)$

$\because\ \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB}=(1,-1)$，$\overrightarrow{CD}=(-5,-1)$

$\therefore\ (x,y)=(1,-1)+2(-5,-1)$

$=(-9,-3)$

故 P 坐標為 $(-9,-3)$

6 老師講解　向量平行　學生練習

設向量 $\vec{a}=(2-k,-1)$，$\vec{b}=(-3k,9)$，

若 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$，試求 k 之值。

想法　若 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}=r\vec{b}$

$\Rightarrow$ 若 $b_1b_2\neq 0$，則 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$。

[答：$\frac{3}{2}$]

解　$\because\ \vec{a}=(2-k,-1)$，$\vec{b}=(-3k,9)$

又 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$

$\Rightarrow\ \frac{2-k}{-3k}=\frac{-1}{9}$

$\Rightarrow\ 3k=18-9k$

$\Rightarrow\ 12k=18$

$\Rightarrow\ k=\frac{3}{2}$

設 $\vec{a}=(x,5)$，$\vec{b}=(2,3)$，

若 $(3\vec{a}+2\vec{b})\,/\!/\,\vec{a}$，試求 x 之值。

[答：$\frac{10}{3}$]

解　$(3\vec{a}+2\vec{b})\,/\!/\,\vec{a}$

$\Rightarrow\ (3x+4,15+6)\,/\!/\,(x,5)$

$\Rightarrow\ \frac{3x+4}{x}=\frac{21}{5}$

$\Rightarrow\ 15x+20=21x$

$\Rightarrow\ 6x=20$

$\Rightarrow\ x=\frac{10}{3}$

7 老師講解　由三角形兩邊向量求第三邊向量　學生練習

$\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB}=(2,2)$，$\overrightarrow{AC}=(4,3)$，試求 $\triangle ABC$ 之周長。

想法　向量分解法則：$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$。

[答：$2\sqrt{2}+\sqrt{5}+5$]

解　將 $\overrightarrow{BC}$ 做向量分解

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$
$=(4,3)-(2,2)$
$=(2,1)$

周長 $=|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|+|\overrightarrow{AC}|$
$=\sqrt{2^2+2^2}+\sqrt{2^2+1^2}+\sqrt{4^2+3^2}$
$=2\sqrt{2}+\sqrt{5}+5$

$\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB}=(-3,4)$，$\overrightarrow{AC}=(4,3)$，試求 $\triangle ABC$ 的周長。

[答：$10+5\sqrt{2}$]

解　$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$
$=(4,3)-(-3,4)$
$=(7,-1)$

周長 $=|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|+|\overrightarrow{AC}|$
$=\sqrt{(-3)^2+4^2}+\sqrt{7^2+(-1)^2}$
$+\sqrt{4^2+3^2}$
$=5+\sqrt{50}+5$
$=10+5\sqrt{2}$

8 老師講解　單位向量　學生練習

已知點 P 為 $A(-1,3)$ 與 $B(3,7)$ 之中點，且 $Q(5,8)$，試求與 $\overrightarrow{PQ}$ 同方向之單位向量。

想法　$\vec{a}$ 之單位向量為 $\pm\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$。

[答：$\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right)$]

解　令 $P(x,y)$

可得 $P(x,y)=\left(\dfrac{-1+3}{2},\dfrac{3+7}{2}\right)=(1,5)$

$\therefore\ \overrightarrow{PQ}=(5-1,8-5)=(4,3)$

$\Rightarrow\ |\overrightarrow{PQ}|=5$

故與 $\overrightarrow{PQ}$ 同方向之單位向量為

$\dfrac{1}{5}\overrightarrow{PQ}=\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right)$

已知 $\vec{a}=(-1,1)$，$\vec{b}=(1,-2)$，試求：

(1) 滿足 $\vec{b}=2\vec{a}+\vec{c}$ 之向量 $\vec{c}$。

(2) 與 $\vec{c}$ 同方向之單位向量 $\vec{u}$。

[答：(1) $(3,-4)$　(2) $\left(\dfrac{3}{5},-\dfrac{4}{5}\right)$]

解　(1) $\because\ \vec{b}=2\vec{a}+\vec{c}$
$\therefore\ \vec{c}=\vec{b}-2\vec{a}$
$=(1,-2)-2(-1,1)$
$=(3,-4)$

(2) 因 $|\vec{c}|=5$，依題意得

$\vec{u}=\dfrac{1}{5}\vec{c}=\dfrac{1}{5}(3,-4)=\left(\dfrac{3}{5},-\dfrac{4}{5}\right)$

9 老師講解　向量分點公式　學生練習

已知 $A(2,5)$、$B(-3,-5)$，若 P 為 $\overline{AB}$ 上一點，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=3:2$，則 P 點坐標為何？

想法

向量分點公式

$\Rightarrow$ P 在 $\overline{AB}$ 內且 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$

則 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$。

[答：$(-1,-1)$]

解　設 $P(x,y)$，$\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow$ $(x-2,y-5)=\dfrac{3}{5}(-5,-10)$

$=(-3,-6)$

$\Rightarrow$ $x=-1$，$y=-1$

$\therefore$ $P(-1,-1)$

已知 $A(-1,7)$、$B(4,-3)$，若 $P(x,y)$ 為平面上一點，且 $3\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{AP}$，則 P 點坐標為何？

[答：$(2,1)$]

解　設 $P(x,y)$，$3\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{AP}$

$\Rightarrow$ $(12-3x,-9-3y)=(2x+2,2y-14)$

$\Rightarrow$ $x=2$，$y=1$

$\therefore$ $P(2,1)$

進階例題

10 老師講解　求向量長度之最小值　學生練習

設 $\overrightarrow{a}=(1,1)$，$\overrightarrow{b}=(6,2)$，t 為任意實數，試求 $\left|t\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|$ 之最小值。

[答：$2\sqrt{2}$]

解　$\because$ $t\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(t+6,t+2)$

$\therefore$ $\left|t\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{(t+6)^2+(t+2)^2}$

$=\sqrt{2t^2+16t+40}$

$=\sqrt{2(t+4)^2+8}$

故當 $t=-4$ 時，有最小值 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

設 $\overrightarrow{a}=(3,-1)$，$\overrightarrow{b}=(4,-3)$，$\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$（$t\in\mathbb{R}$），試求 $\left|\overrightarrow{c}\right|$ 之最小值。

[答：1]

解　$\overrightarrow{c}=(3+4t,-1-3t)$

$\left|\overrightarrow{c}\right|=\sqrt{(3+4t)^2+(-1-3t)^2}$

$=\sqrt{25t^2+30t+10}$

$=\sqrt{25\left(t+\dfrac{3}{5}\right)^2+1}$

故當 $t=-\dfrac{3}{5}$ 時，有最小值 1

3-1 段落測驗

★表難題

1. 設 $A(-1,2)$、$B(2,6)$與 $C(3,-1)$：
   (1) 若 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，則 D 點坐標為 $\underline{(6,3)}$。
   (2) 若 P 點使 $ABCP$ 為一平行四邊形，則 P 點坐標為 $\underline{(0,-5)}$。

2. 已知向量 $\vec{a}$ 的方向角為 $\dfrac{3\pi}{4}$，且 $|\vec{a}|=3\sqrt{2}$，則向量 $\vec{a}=\underline{(-3,3)}$。

3. 已知向量 $\vec{a}=(1,7)$，$\vec{b}=(-3,k+4)$，若 $|\vec{a}|=\sqrt{2}|\vec{b}|$，則 $k=\underline{0\text{ 或 }-8}$。

4. 設 $\vec{a}=(\sin\theta+\cos\theta,\sin\theta-\cos\theta)$，則 $|\vec{a}|=\underline{\sqrt{2}}$。

5. 設 $\vec{a}=(2,3)$，$\vec{b}=(-3,1)$，$\vec{c}=(7,5)$，若 $\vec{c}=r\vec{a}+s\vec{b}$，則 $r+s=\underline{1}$。

6. 兩向量 $\vec{a}=(4,3)$，$\vec{b}=(5,x+1)$，若 $(2\vec{a}+\vec{b})\,/\!/\,\vec{a}$，則 $x=\underline{\dfrac{11}{4}}$。

7. 設 $A(3,-2)$、$B(x,y)$，若 $\overrightarrow{AB}$ 的單位向量為 $\vec{a}=\left(-\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$，又 $|\overrightarrow{AB}|=10$，
   則 $x=\underline{-3}$，$y=\underline{6}$。

8. $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB}=(1,3)$，$\overrightarrow{AC}=\left(-\dfrac{9}{4},\dfrac{3}{4}\right)$，則 $\triangle ABC$ 的周長為 $\underline{3\sqrt{10}}$。

9. $\triangle ABC$ 中，P 為 $\overline{BC}$ 上一點，且 $\overline{BC}=3\overline{PC}$，若 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則 $2x-y=\underline{0}$。

10. 已知 $\vec{a}=(3+x,4)$，$\vec{b}=(4,-3)$，$\vec{c}=(3,1-2y)$，且 $\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}=(3,1)$，則 $3x+2y$ 之值為 $\underline{5}$。【統測】

11. 在坐標平面上的平行四邊形 $ABCD$（按順序）中，若 $\overrightarrow{AB}=(4,8)$，$\overrightarrow{AD}=(1,4)$，則 $|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{BD}|=\underline{18}$。【統測】

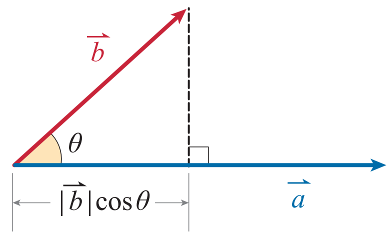
12. 設 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 為平面上之三個向量，且 $\vec{a}=(\cos 30^\circ,\sin 30^\circ)$，$\vec{b}=(\cos 150^\circ,\sin 150^\circ)$，$\vec{c}=(\cos 270^\circ,\sin 270^\circ)$，則 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\underline{(0,0)}$。【統測】

13. 已知 $A(1,-1)$與 $B(-2,3)$為平面上的兩點，設長度為 3 的向量 $\vec{v}=(a,b)$與向量 $\overrightarrow{AB}$ 同方向，則 $2a+b=\underline{-\dfrac{6}{5}}$。【統測】

3-2 》向量的內積

重點一　向量內積

1. 向量內積：



如圖，向量 $\overrightarrow{a}$ 、$\overrightarrow{b}$ 均不為零向量且夾角為 θ（$0\le\theta\le\pi$），

則定義 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的內積為 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$ 。

2. 向量夾角：

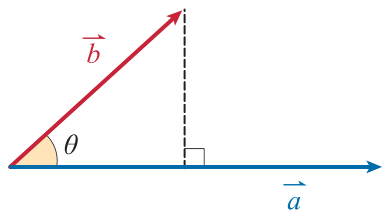
判定兩向量夾角須將兩向量平移至相同起點，

其夾角為 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}$ 。（$0\le\theta\le\pi$）

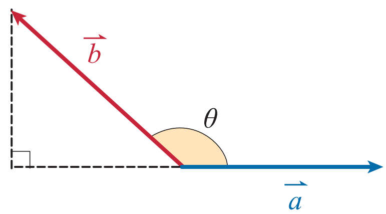
觀念補充 //

向量內積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 有正有負。

❶ 夾角為銳角，內積為正，如圖 (a)。　❷ 夾角為鈍角，內積為負，如圖 (b)。



(a)



(b)

3. 內積的性質：

(1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}$ 。（交換律）

(2) $\overrightarrow{a}\cdot\left(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\right)=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}$ 。（分配律）

(3) $r\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)=\left(r\overrightarrow{a}\right)\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\cdot\left(r\overrightarrow{b}\right)$ 。（結合律）

(4) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}=|\overrightarrow{a}|^2$ 。

(5) $\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)=|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2$ 。（類似：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$）

(6) $\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)=|\overrightarrow{a}|^2-|\overrightarrow{b}|^2$ 。（類似：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$）

4. 內積的坐標公式：

$\overrightarrow{a}=\left(a_1,a_2\right)$，$\overrightarrow{b}=\left(b_1,b_2\right)$，且 $\overrightarrow{a}$ 、$\overrightarrow{b}$ 的夾角為 θ，則 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2$ 。

5. 兩向量垂直：

若 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}\ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$，即 $a_1b_1+a_2b_2=0$ 。

1 老師講解　向量內積的定義　學生練習

已知$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$，若$\vec{a}$與$\vec{b}$夾角為$\dfrac{2\pi}{3}$，則$\vec{a}\cdot\vec{b}=$？

想法　向量內積定義：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$。

[答：$-\sqrt{3}$]

解　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$$=\sqrt{3}\times2\times\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$=2\sqrt{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\sqrt{3}$$

已知$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=5$，若$\vec{a}$與$\vec{b}$夾角為θ，且$\cos\theta=\dfrac{2}{3}$，則$\vec{a}\cdot\vec{b}=$？

[答：10]

解　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$$=3\times5\times\frac{2}{3}$$

$$=10$$

2 老師講解　向量內積的運算　學生練習

若正$\triangle ABC$之邊長為4，則$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$？

想法　判定兩向量夾角須將兩向量平移至相同起點，再代內積定義。

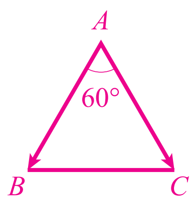
[答：8]

解　$\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{AC}$之夾角為60°，則

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\times4\times\cos60^\circ$$

$$=16\times\frac{1}{2}$$

$$=8$$



若正$\triangle ABC$之邊長為2，則$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$？

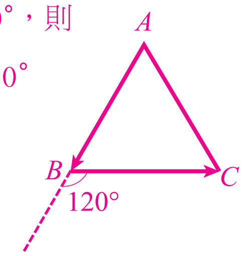
[答：-2]

解　$\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{BC}$之夾角為120°，則

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=2\times2\times\cos120^\circ$$

$$=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-2$$



3 老師講解　利用內積求向量夾角　學生練習

已知兩向量$\vec{a}$、$\vec{b}$，若$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=6\sqrt{3}$，則$\vec{a}$與$\vec{b}$之夾角$\theta=$？

想法　依內積定義求向量夾角$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$。

[答：30°]

解　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{6\sqrt{3}}{3\times4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \theta=30^\circ$

已知兩向量$\vec{a}$、$\vec{b}$，若$|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=4$，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=-10\sqrt{3}$，則$\vec{a}$與$\vec{b}$之夾角$\theta=$？

[答：150°]

解　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-10\sqrt{3}}{5\times4}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \theta=150^\circ$

C

3

4 老師講解　向量夾角公式　學生練習

已知 $\vec{a}=(1,1)$，$\vec{b}=(\sqrt{3}-1,\sqrt{3}+1)$，試求 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 之夾角。

想法　利用內積坐標運算求向量夾角 $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$。

[答：30°]

解　設 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 之夾角為 θ

$\because\ \vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(\sqrt{3}-1)+1\times(\sqrt{3}+1)$

$=2\sqrt{3}$

$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$|\vec{b}|=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2}=2\sqrt{2}$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow\ \theta=30^\circ$

已知 $\vec{a}=(5,12)$，$\vec{b}=(17,7)$，試求 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 之夾角。

[答：45°]

解　設 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 之夾角為 θ

$\because\ \vec{a}\cdot\vec{b}=5\times17+12\times7=169$

$|\vec{a}|=\sqrt{5^2+12^2}=13$

$|\vec{b}|=\sqrt{17^2+7^2}=13\sqrt{2}$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{169}{13\times13\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow\ \theta=45^\circ$

5 老師講解　利用內積求向量長度　學生練習

已知 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，且 $|2\vec{a}-\vec{b}|=2\sqrt{3}$，試求 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角。

想法　利用 $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$。

[答：$\dfrac{2\pi}{3}$]

解　設 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 之夾角為 θ

$|2\vec{a}-\vec{b}|^2=(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$

$=4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=4-4\times1\times2\times\cos\theta+4$

$=12$

$\Rightarrow\ \cos\theta=-\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow\ \theta=\dfrac{2\pi}{3}$

已知 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，且 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的夾角為 60°，試求 $|\vec{a}+\vec{b}|$。

[答：$\sqrt{19}$]

解　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=4+2\times2\times3\times\dfrac{1}{2}+9$

$=19$

$\Rightarrow\ |\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{19}$

6 向量垂直

老師講解

已知兩向量 $\overrightarrow{a}=(4,3)$，$\overrightarrow{b}=(5,x+1)$，若 $(2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{a}$，試求 x 之值。

想法　若 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}\Leftrightarrow\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$。

[答：9]

解　$(2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{a}\Leftrightarrow(2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{a}=0$

$\because\ 2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(3,5-x)$

$\therefore\ (2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{a}=12+3(5-x)=0$

$\Rightarrow\ x=9$

學生練習

若 $\overrightarrow{a}=(x,5)$，$\overrightarrow{b}=(2,3)$，且 $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{b}$，試求 x 之值。

[答：-14]

解　$(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{b}\Leftrightarrow(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{b}=0$

$\because\ \overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(x+2,8)$

$\therefore\ (\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{b}=2(x+2)+24=0$

$\Rightarrow\ x=-14$

進階例題

7 利用內積的運算性質求向量長度

老師講解

已知 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$，且 $|\overrightarrow{a}|=2$，$|\overrightarrow{b}|=3$，$|\overrightarrow{c}|=5$，試求 $|\overrightarrow{b}+2\overrightarrow{c}|$。

[答：7]

解　$\because\ \overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$

$\therefore\ \overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=-\overrightarrow{a}\ \Rightarrow\ |\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}|=|-\overrightarrow{a}|$

$\Rightarrow\ |\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}|^2=|-\overrightarrow{a}|^2$

展開得 $|\overrightarrow{b}|^2+2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+|\overrightarrow{c}|^2=|-\overrightarrow{a}|^2$

$\Rightarrow\ 3^2+2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+5^2=2^2$

$\Rightarrow\ \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=-15$

$\because\ |\overrightarrow{b}+2\overrightarrow{c}|^2=|\overrightarrow{b}|^2+4\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+4|\overrightarrow{c}|^2$

$=3^2+4\times(-15)+4\times5^2$

$=49$

$\therefore\ |\overrightarrow{b}+2\overrightarrow{c}|=7$

學生練習

已知 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$，且 $|\overrightarrow{a}|=3$，$|\overrightarrow{b}|=5$，$|\overrightarrow{c}|=7$，試求 $|2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|$。

[答：$\sqrt{91}$]

解　$\because\ \overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$

$\therefore\ \overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=-\overrightarrow{c}\ \Rightarrow\ |\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=|-\overrightarrow{c}|$

$\Rightarrow\ |\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2=|-\overrightarrow{c}|^2$

展開得 $|\overrightarrow{a}|^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2=|-\overrightarrow{c}|^2$

$\Rightarrow\ 3^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+5^2=7^2$

$\Rightarrow\ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\dfrac{15}{2}$

$\because\ |2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2=4|\overrightarrow{a}|^2+4\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2$

$=4\times3^2+4\times\dfrac{15}{2}+5^2$

$=91$

$\therefore\ |2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=\sqrt{91}$

3-2 段落測驗

★表難題

1. 設$|\overrightarrow{a}|=3$，$|\overrightarrow{b}|=4$，且$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$的夾角為$\frac{5}{6}\pi$，則$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=$ $\underline{-6\sqrt{3}}$。

2. 設$\overrightarrow{a}=(4,5)$，$\overrightarrow{b}=(3,-2)$，則$\overrightarrow{a}\cdot(2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=$ $\underline{84}$。

3. 在坐標平面上，若$\triangle ABC$三頂點坐標分別為$A(4,5)$、$B(5,-2)$、$C(1,1)$，
則$\angle A=$ $\underline{45^\circ}$。

4. 設$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$為平面上的兩個向量，若$|\overrightarrow{a}|=2$，$|\overrightarrow{b}|=3$，且$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=3$，
則$|3\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}|=$ $\underline{6}$。

5. 設$\overrightarrow{u}=(a-2,-1)$，$\overrightarrow{v}=(a,3)$，若$\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}$，則$a=$ $\underline{3\text{ 或 }-1}$。

6. 已知單位向量$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$之夾角為$\frac{2\pi}{3}$，且$2\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{b}$與$\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}$垂直，則$n=$ $\underline{\frac{2}{5}}$。

7. 設$|\overrightarrow{a}|=3$，$|\overrightarrow{b}|=\sqrt{2}$，又$|\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}|=\sqrt{5}$，則$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$的夾角為$\underline{135^\circ}$。

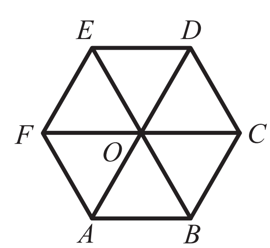
★ 8. $\triangle ABC$中，已知$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=5$，$\overline{AC}=6$，則$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$ $\underline{-\frac{5}{2}}$。

9. 向量$\overrightarrow{u}$的長度為2，向量$\overrightarrow{v}$的長度為5，且$\overrightarrow{u}$、$\overrightarrow{v}$兩向量夾角為$\frac{2\pi}{3}$，則向量$3\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$的長度為$\underline{\sqrt{31}}$。【統測】

★10. 已知兩向量$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$互相垂直，若$|\overrightarrow{a}|=4\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=5\sqrt{5}$，則$|\overrightarrow{b}|=$ $\underline{3\sqrt{5}}$。
【統測】

3-2 高手過招

1. 如圖所示，已知$ABCDEF$為一正六邊形，下列向量內積中，何者最大？$\underline{\text{B}}$
(A) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$ (B) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ (C) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ (D) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$。



3-3 內積的應用

重點一　內積應用

1. $\triangle ABC$ 之面積：

設 $\overrightarrow{AB}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{AC}=(x_2,y_2)$，則

$\triangle ABC$ 之面積 $=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2\times|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$。

2. 柯西不等式：

若 $\vec{a}=(a_1,a_2)$，$\vec{b}=(b_1,b_2)$，則 $(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2)^2$，

且當 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$　$\Leftrightarrow$　$(a_1,a_2)=r(b_1,b_2)$，即 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$（$b_1b_2\neq0$）時等號成立。

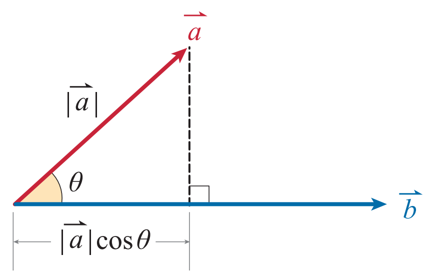
觀念補充 //

柯西不等式之推廣：$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(ax+by+cz)^2$；

其等號成立條件　$\Leftrightarrow$　$\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}$。

3. 向量的正射影：

設 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的夾角為 θ，如圖



(1) $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的分量為：$|\vec{a}|\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$。

(2) $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影為：$\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}$。

(3) $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影長為：$\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}$。

1 老師講解 運用向量法求三角形面積 學生練習

已知 $\overrightarrow{a}=(-3,4)$，$\overrightarrow{b}=(4,3)$，試求由 $\overrightarrow{a}$ 、$\overrightarrow{b}$ 所形成之三角形面積。

想法 利用向量法求 $\Delta=\frac{1}{2}\left|x_1y_2-x_2y_1\right|$。

[答：$\frac{25}{2}$ 平方單位]

解 $\Delta=\frac{1}{2}\left|x_1y_2-x_2y_1\right|$

$=\frac{1}{2}\left|(-3)\times 3-4\times 4\right|$

$=\frac{25}{2}$（平方單位）

已知 $A(1,-2)$、$B(6,10)$、$C(18,5)$，試求 $\triangle ABC$ 之面積。

[答：$\frac{169}{2}$ 平方單位]

解 先找兩起始點相同的向量

$\overrightarrow{AB}=(6-1,10-(-2))=(5,12)$

$\overrightarrow{AC}=(18-1,5-(-2))=(17,7)$

$\therefore\ \Delta=\frac{1}{2}\left|5\times 7-12\times 17\right|$

$=\frac{169}{2}$（平方單位）

2 老師講解 柯西不等式 學生練習

若實數 x、y 滿足 $x^2+y^2=13$，試求 $2x-3y$ 之最大值與最小值，並求出此時之 x、y 值。

想法 柯西不等式：
$\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(b_1^2+b_2^2\right)\geq\left(a_1b_1+a_2b_2\right)^2$。

[答：$x=2$，$y=-3$ 時，有最大值 13；
$x=-2$，$y=3$ 時，有最小值 -13]

解 由柯西不等式

$\left(x^2+y^2\right)\times\left[2^2+(-3)^2\right]\geq(2x-3y)^2$

$\Rightarrow\ (2x-3y)^2\leq 13^2$

$\Rightarrow\ -13\leq 2x-3y\leq 13$

故 $2x-3y$ 之最大值為 13，最小值為 -13

且當 $\frac{x}{2}=\frac{y}{-3}$ 時等號成立

令 $x=2r$，$y=-3r$

(1) 代入 $2x-3y=13$
得 $13r=13 \Rightarrow r=1$
則 $x=2$，$y=-3$ 時有最大值

(2) 代入 $2x-3y=-13$，得
$13r=-13 \Rightarrow r=-1$
則 $x=-2$，$y=3$ 時有最小值

若 $\overrightarrow{a}=(2,-1)$，$\overrightarrow{b}=(x,y)$，且 $x^2+y^2=20$，試求 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 之最大值與最小值，並求出此時之 x、y 值。

[答：$x=4$，$y=-2$ 時，有最大值 10；
$x=-4$，$y=2$ 時，有最小值 -10]

解 由 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=2x-y$，代柯西不等式

$\left(x^2+y^2\right)\left[2^2+(-1)^2\right]\geq(2x-y)^2$

$\Rightarrow\ 20\times 5\geq(2x-y)^2$

$\Rightarrow\ -10\leq 2x-y\leq 10$

故 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 的最大值為 10，最小值為 -10

且當 $\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}$ 時等號成立

令 $x=2r$，$y=-r$

(1) 代入 $2x-y=10$
得 $5r=10 \Rightarrow r=2$
則 $x=4$，$y=-2$ 時有最大值

(2) 代入 $2x-y=-10$，得
$5r=-10 \Rightarrow r=-2$
則 $x=-4$，$y=2$ 時有最小值

★3 老師講解 柯西不等式 學生練習

已知實數 x、y 滿足 $2x+y=12$， 試求 $4x^2+y^2$ 之最小值，並求此時 x 與 y 的值。

想法 柯西不等式：
$\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(b_1^2+b_2^2\right)\geq\left(a_1b_1+a_2b_2\right)^2$。

[答：最小值為 72，此時 $x=3$，$y=6$]

解 利用柯西不等式

$$\left[(2x)^2+y^2\right]\left(1^2+1^2\right)\geq(2x+y)^2$$

$$\Rightarrow\ \left(4x^2+y^2\right)\times2\geq12^2$$

$$\Rightarrow\ 4x^2+y^2\geq72$$

且當 $\dfrac{2x}{1}=\dfrac{y}{1}$ 時等號成立

則 $y=2x$，代入 $2x+y=12$

得 $x=3$，$y=6$

故當 $x=3$，$y=6$ 時

$4x^2+y^2$ 的最小值為 72

已知實數 x、y 滿足 $x-y=26$，試求 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}$ 的最小值，並求此時 x 與 y 的值。

[答：最小值為 52，此時 $x=18$，$y=-8$]

解 利用柯西不等式

$$\left[\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2\right]\left[3^2+(-2)^2\right]\geq(x-y)^2$$

$$\Rightarrow\ \left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\right)\times13\geq26^2$$

$$\Rightarrow\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\geq52$$

且當 $\dfrac{\frac{x}{3}}{3}=\dfrac{\frac{y}{2}}{-2}$ 時等號成立

則 $y=-\dfrac{4}{9}x$，代入 $x-y=26$

得 $x=18$，$y=-8$

故當 $x=18$，$y=-8$ 時

$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}$ 的最小值為 52

4 老師講解 正射影向量 學生練習

設 $A(2,5)$、$B(1,7)$、$C(5,9)$ 為平面上三點，$\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的正射影為 $\overrightarrow{AH}$，則 $\overrightarrow{AH}=$？

想法 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影為 $\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}$。

[答：$\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$]

解 $\overrightarrow{AB}=(1-2,7-5)=(-1,2)$

$\overrightarrow{AC}=(5-2,9-5)=(3,4)$

故 $\overrightarrow{AH}=\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2}\right)\overrightarrow{AC}$

$$=\frac{(-1)\times3+2\times4}{25}\times(3,4)$$

$$=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$$

設 $\vec{a}=(3,2)$，$\vec{b}=(1,1)$，試求 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上之正射影及正射影長。

[答：$\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{5}{2}\right)$，$\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$]

解 $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times1+2\times1=5$

則 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上之正射影為

$$\frac{5}{2}\times(1,1)=\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$$

正射影長為 $\sqrt{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(\dfrac{5}{2}\right)^2}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

進階例題

5 老師講解 正射影向量之應用 學生練習

試將 $\overrightarrow{a}=(-7,-4)$ 分解成與 $\overrightarrow{b}=(1,2)$ 平行及垂直之兩向量。

[答：$(-3,-6)$，$(-4,2)$]

解 設 $\overrightarrow{a}$ 分解成與 $\overrightarrow{b}$ 平行之分量為 $\overrightarrow{a_1}$

與 $\overrightarrow{b}$ 垂直之分量為 $\overrightarrow{a_2}$

則 $\overrightarrow{a_1}$ 即為 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上之正射影 $=\left(\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|^2}\right)\overrightarrow{b}$

$\because\ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-7-8=-15$ 代入

$\Rightarrow\ \overrightarrow{a_1}=\left(\dfrac{-15}{\sqrt{1^2+2^2}^{\,2}}\right)(1,2)=(-3,-6)$

又 $\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}=\overrightarrow{a}$

則 $\overrightarrow{a_2}=\overrightarrow{a}-\overrightarrow{a_1}$

$=(-7,-4)-(-3,-6)$

$=(-4,2)$

故 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 平行之分量為 $(-3,-6)$

垂直之分量為 $(-4,2)$

試將 $\overrightarrow{a}=(3,4)$ 分解成與 $\overrightarrow{b}=(-2,-1)$ 平行及垂直之兩向量。

[答：$(4,2)$，$(-1,2)$]

解 設 $\overrightarrow{a}$ 分解成與 $\overrightarrow{b}$ 平行之分量為 $\overrightarrow{a_1}$

與 $\overrightarrow{b}$ 垂直之分量為 $\overrightarrow{a_2}$

則 $\overrightarrow{a_1}$ 即為 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上之正射影 $=\left(\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|^2}\right)\overrightarrow{b}$

$\because\ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-6-4=-10$ 代入

$\Rightarrow\ \overrightarrow{a_1}=\left(\dfrac{-10}{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}^{\,2}}\right)(-2,-1)$

$=(4,2)$

又 $\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}=\overrightarrow{a}$

則 $\overrightarrow{a_2}=\overrightarrow{a}-\overrightarrow{a_1}$

$=(3,4)-(4,2)$

$=(-1,2)$

故 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 平行之分量為 $(4,2)$

垂直之分量為 $(-1,2)$

6 老師講解 柯西不等式 學生練習

設 a、b、$c\in\mathbb{R}$，若 $a^2+b^2+c^2=4$，試求 $2a+b+2c$ 的最大、最小值。

[答：最大值為 6，最小值為 -6]

解 柯西不等式推廣：

$(a^2+b^2+c^2)(2^2+1^2+2^2)\geq(2a+b+2c)^2$

$\Rightarrow\ 4\times9\geq(2a+b+2c)^2$

$\Rightarrow\ -6\leq 2a+b+2c\leq 6$

故 $2a+b+2c$ 的最大值為 6

最小值為 -6

設 a、b、c 為正數且 $a+b+c=8$，試求 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ 的最小值。

[答：$\dfrac{9}{8}$]

解 柯西不等式推廣：

$(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\geq(1+1+1)^2$

$\Rightarrow\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geq\dfrac{9}{8}$

故 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ 的最小值為 $\dfrac{9}{8}$

3-3 段落測驗

★表難題

1. 設 $A(4,9)$、$B(1,3)$、$C(3,8)$，則 $\triangle ABC$ 的面積為 $\underline{\frac{3}{2}}$ 平方單位。

2. 設坐標平面上 $A(4,-1)$、$B(3,2)$、$C(7,5)$，且 G 為 $\triangle ABC$ 之重心，則 $\triangle ABG$ 之面積為 $\underline{\frac{5}{2}}$ 平方單位。

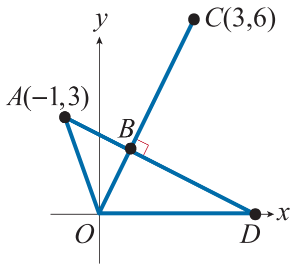
3. 設 x、$y\in\mathbb{R}$，且 $x^2+y^2=9$，則 $3x+4y$ 的最大值為 $\underline{15}$，最小值為 $\underline{-15}$。

★ 4. 設 x、$y>0$，則 $\left(x^2+\frac{9}{y^2}\right)\left(y^2+\frac{4}{x^2}\right)$ 的最小值為 $\underline{25}$。

5. 設 $\overrightarrow{a}=(-2,-1)$，$\overrightarrow{b}=(-3,2)$，則 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影為 $\underline{\left(-\frac{12}{13},\frac{8}{13}\right)}$。

6. 設 x 為實數，$\overrightarrow{a}=(6,x)$，$\overrightarrow{b}=(2,1)$，若 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上之正射影為 $(-4,-2)$，則 $x=\underline{-22}$。

★ 7. 如圖，$\angle ABC=90^\circ$，則 $\overrightarrow{OD}$ 在 $\overrightarrow{OC}$ 上的正射影為 $\underline{(1,2)}$。



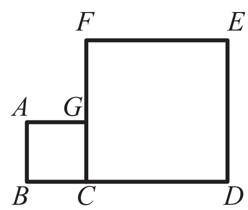
8. 設 $\overrightarrow{a}=(4,3)$，$\overrightarrow{b}=(x,y)$ 為平面上兩向量，且 $x^2+y^2=40$，則此兩向量內積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 的最大值為 $\underline{10\sqrt{10}}$。　【統測】

9. 設 $A(2,5)$、$B(4,3)$、$C(5,1)$ 為坐標平面上之三點，若 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的正射影為 $\overrightarrow{AD}$，則 $\left|\overrightarrow{AD}\right|:\left|\overrightarrow{AC}\right|=\underline{14:25}$。　【統測】

10. 已知坐標平面上三點 $A(x,1)$、$B(2,y)$、$C(3,4)$，O 為原點，若 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 在 $\overrightarrow{OC}$ 上之正射影相同，則 $3x-4y=\underline{2}$。

3-3 高手過招

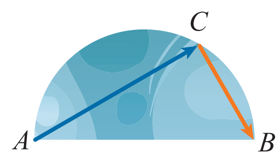
★ 1. 如圖，$ABCG$ 和 $CDEF$ 都是正方形且面積和為 1，則 $\overline{BD}$ 的最大值為 $\underline{\sqrt{2}}$。



2. 已知 $3x+4y=12$，則 $x^2+y^2-4x+2y+5$ 之最小值 $=\underline{4}$。

題目

小馬擅長游泳，為參加國際游泳比賽，以下是他體能訓練的規劃：如圖所示，在一半徑為 1 公里的半圓形湖練習游泳。他先由湖畔的 A 點沿直線採自由式游到湖邊的某個點 C，再沿直線採蛙式游到 B 點，其中 $\overline{AB}$ 為湖的直徑。已知他游自由式的速度為每小時 2 公里，游蛙式的速度為每小時 1.5 公里，試求小馬每趟（$A \to C \to B$）鍛鍊的時間最長為多少小時？



關　鍵　字　半圓形湖，$\overline{AB}$ 為湖的直徑

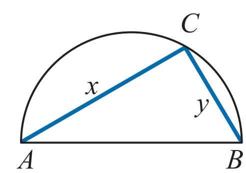
游自由式的速度為每小時 2 公里，游蛙式的速度為每小時 1.5 公里

單元公式　已知 a、b、x、$y \in \mathbb{R}$，則 $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$

其等號成立條件為 $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}$

翻譯成數學式　x、$y \in \mathbb{R}$，已知 $x^2+y^2=4$，試求 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{2y}{3}$ 之最大值

解　題　這一題稍難，不好下手，是很有鑑別度的題目



如圖，先設 $\overline{AC}=x$ 公里，$\overline{BC}=y$ 公里

因為 $\overline{AB}$ 為圓的直徑，可得 $\triangle ABC$ 為直角三角形

我們由畢氏定理知 $x^2+y^2=2^2=4$

而小馬游泳的時間為 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{1.5}=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2y}{3}$

接著代入柯西不等式（這是關鍵，要能想到）

由柯西不等式可知 $(x^2+y^2)\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\right] \geq \left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{2y}{3}\right)^2$

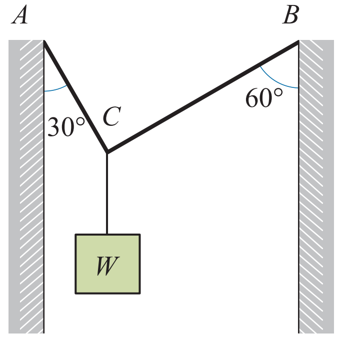
將 $x^2+y^2=4$ 代入可得 $4\times\dfrac{25}{36} \geq \left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{2y}{3}\right)^2$

找出 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{2y}{3}$ 的範圍為 $-\dfrac{5}{3} \leq \dfrac{x}{2}+\dfrac{2y}{3} \leq \dfrac{5}{3}$，故小馬鍛鍊的時間最長為 $\dfrac{5}{3}$ 小時

- **回顧：**柯西不等式與算幾不等式是兩個很重要的絕對不等式，柯西不等式不好記，推薦底下口訣：「平方和的乘積 ≥ 乘積和的平方」來輔助記憶。切入本題，這一題利用柯西不等式把解題的觀念揉合進來，從過程中形成了概念和方法，匯聚成活用的知識，這才是探究數學的求真之路。

★表難題

1. 利用一些省力裝置來吊掛物體時，繩子的拉力須克服物體的重力。某物理實驗室欲實際觀測繩子承受重物時的受力狀態，將一 500 公斤重的物體 W，用金屬線懸掛如圖。已知兩牆之間相距 10 公尺，$\overline{AC}=5$ 公尺，$\overline{BC}=5\sqrt{3}$ 公尺， 試求線段 AC、BC 所承受之拉力。（註：A、B 兩點等高）



答：線段 AC 承受拉力 $250\sqrt{3}$ 公斤重

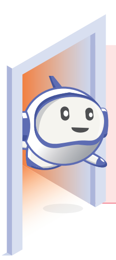
線段 BC 承受拉力 250 公斤重

2. 根據國民健康白皮書建議，國人最好養成每周至少運動 3 小時的習慣。小飛平日喜歡慢跑，已知某日在他慢跑的路線上有下列幾個地點：分別為學校 (O)、公園 (A)、早餐店 (B)、超商 (C)、捷運站 (P) 與市場 (Q)，假設其中三處的平面坐標為 $O(0,0)$、$A(-3,-5)$ 與 $B(6,0)$，且令 $C(x,y)$。今小飛從 O 點沿 $\overrightarrow{AO}$ 方向前進 $\overline{AO}$ 距離後到達 P 點，再沿 $\overrightarrow{BP}$ 方向前進 $2\overline{BP}$ 距離後到達 Q 點。若小飛繼續沿 $\overrightarrow{CQ}$ 方向前進 $3\overline{CQ}$ 距離後返回到起始點 O，試求 (x,y)。

答：$(-4,20)$

3. 纜車的功率為馬力，其計算公式為 $\dfrac{1}{60}\left|\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{v}\right|$，其中 $\overrightarrow{F}$ 為引擎之拉力（kg），$\overrightarrow{v}$ 為前進速度（m/s）。今一纜車之引擎拉力 $\overrightarrow{F}$ 為向上 1000 kg，向前之速度 $\overrightarrow{v}=3$ m/s，且兩向量夾角為 $85.2°$，試求纜車之引擎馬力為何？（$\cos 85.2° \fallingdotseq 0.084$）

答：4.2 馬力



高三人的淬鍊

看事情要有眼界，算數學要求正確。凱撒名言：「若你想出類拔萃，便沒人能阻擋你」。成就自己、超越自己，只要不被擊倒，你就是最強。

CH 3 統測考古題

統測解題影音

★表難題

(D) 1. 已知平面上兩向量 $\overrightarrow{a}=(2x+1,-3)$、$\overrightarrow{b}=(3,x-2)$，滿足 $|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2+|\overrightarrow{b}|^2$，則 $x=$ ？
(A) 3 (B) 1 (C) -1 (D) -3。【111(C)】

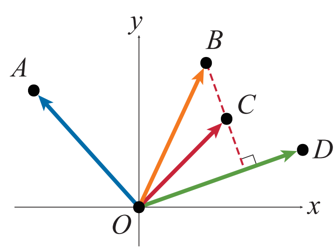
(B) 2. 已知 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$ 平面上的三向量，且 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=0$，$\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=0$，$|\overrightarrow{a}|=5$，$|\overrightarrow{b}|=12$，$|\overrightarrow{c}|=13$。若 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}<0$，則 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=$ ？
(A) -30 (B) -60 (C) -65 (D) -156。【110(C)】

(D) 3. 設平面上三點 $A(1,1)$、$B(5,-2)$、$C(5,2)$，且 $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 的正射影為 $\overrightarrow{AD}$，若 $\overrightarrow{DC}=(x,y)$，則 $x+y=$ ？
(A) $\dfrac{34}{25}$ (B) $\dfrac{89}{25}$ (C) $\dfrac{104}{25}$ (D) $\dfrac{112}{25}$。【109(C)】

(C) 4. 已知 $A(3,1)$、$B(2,-3)$、$C(7,-1)$ 及 $D(x,y)$ 為坐標平面上的四個點。若 $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CD}$，則 $x+y=$ ？
(A) -8 (B) -4 (C) 5 (D) 6。【109(B)】

(B) 5. 已知 $\overrightarrow{u}=(1,1)$，$\overrightarrow{v}=(x+4,y-1)$ 及 $\overrightarrow{w}=(2x,y)$。若 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 垂直且 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{w}$ 平行，則下列何者正確？
(A) $x=1$ (B) $y=-2$ (C) $y=1$ (D) $x=-2$。【108(C)】

★(D) 6. 如圖所示，以 O 為原點的直角坐標系上有四點，由左至右依序為 A、B、C、D，其中 A 落在第二象限，B、C、D 落在第一象限，且直線 BC 與直線 OD 的交點落在 O、D 兩點之間。已知 $\angle AOD>90^\circ$，且 $\overrightarrow{BC}$ 與 $\overrightarrow{OD}$ 的內積為 0。若向量 $\overrightarrow{OD}$ 分別與向量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 及 $\overrightarrow{OD}$ 求內積，依次得到 a、b、c 及 d 四個數值，則下列何者正確？



(A) $b>a>c>d$ (B) $b=c>d>a$ (C) $a>b>c>d$ (D) $d>b=c>a$。【108(B)】

(C) 7. 已知坐標平面上三個點 $A(1,2)$、$B(2,5)$、$C(0,-1)$，則向量 $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=$
(A) $(-2,5)$ (B) $(3,0)$ (C) $(1,3)$ (D) $(3,15)$。【107(B)】

★(A) 8. 已知 $|\overrightarrow{a}|=1$，$|\overrightarrow{b}|=\sqrt{5}$，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-2$。若 $t\overrightarrow{a}+(1-t)\overrightarrow{b}$ 和 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 垂直，其中 t 為實數，則 $t=$ (A) $\dfrac{7}{10}$ (B) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ (C) $\dfrac{3}{4}$ (D) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$。【106(C)】

(D) 9. 已知坐標平面上三點 $A(1,a)$、$B(2,3)$、$C(5,1)$，若向量內積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值為 1，則 $a=$ (A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 2。【106(B)】

(B) 10. 已知$|\overrightarrow{AB}|=4$，$|\overrightarrow{AC}|=3$，又$\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{AC}$的夾角為$\frac{\pi}{3}$，則$|\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}|$之值為何？

(A) $\sqrt{52}$ (B) $\sqrt{76}$ (C) $\sqrt{52+24\sqrt{3}}$ (D) 10。 【105(B)】

(A) 11. 已知向量$\vec{a}=(-6,8)$且與$\vec{b}$之夾角為 60°，則向量$\vec{a}$在$\vec{b}$上的正射影長為何？

(A) 5 (B) 7 (C) $5\sqrt{3}$ (D) 10。 【105(C)】

★(A) 12. 已知平面上四點坐標為$A(57,23)$、$B(7,-2)$、$C(5,12)$、$D(x,y)$。

若向量$\overrightarrow{AD}=\frac{7}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$，則$x+y=$？

(A) −4 (B) −2 (C) 2 (D) 4。 【104(C)】

(C) 13. 已知k為實數，若向量$\vec{a}=(1,k+1)$與向量$\vec{b}=(2k,3)$的內積為 18，則$k=$

(A) −1 (B) 1 (C) 3 (D) 5。 【104(B)】

(B) 14. 已知平面三向量$\vec{a}=(3,4)$，$\vec{b}=(x,-9)$，$\vec{c}=(-8,y)$。設$\vec{a}\perp\vec{b}$且$\vec{b}\parallel\vec{c}$，則$y-x$之值為何？

(A) −18 (B) −6 (C) 6 (D) 18。 【統測】

(C) 15. 設向量$\vec{a}$與$\vec{b}$之夾角為60°，且$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，則向量$\vec{a}$和$(-\vec{a}+2\vec{b})$之夾角為何？

(A) 30° (B) 60° (C) 90° (D) 120°。 【統測】

(C) 16. 設平面上三點$A(x,y)$，$B(-1,4)$及$C(9,-1)$。若向量$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$，則$D$點坐標為何？

(A) $(1,5)$ (B) $(3,2)$ (C) $(5,1)$ (D) $(2,3)$。 【統測】

(A) 17. 設平面二向量$\vec{u}=(2\cos\theta,\sin\theta)$，$\vec{v}=(\sin\theta,2\cos\theta)$且其內積$\vec{u}\cdot\vec{v}=1$，若$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，則$\theta$之值可能為何？

(A) $\frac{\pi}{12}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{3}$。（註：$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$） 【統測】

(A) 18. 向量$\vec{a}=(3,4)$，向量$\vec{b}\parallel\vec{a}$，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=-50$，求$|2\vec{a}+3\vec{b}|=$？

(A) 20 (B) 40 (C) 60 (D) 80。 【統測】

(A) 19. 平面上五個點$A\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{4}\right)$、$B\left(\frac{51}{13},\frac{1}{4}\right)$、$C\left(\frac{571}{13},\frac{69}{7}\right)$、$D\left(-\frac{51}{16},\frac{69}{17}\right)$、$E\left(-\frac{23}{4},-\frac{10}{3}\right)$，若向量相加$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=(m,n)$，求$m-n$之值。

(A) −3 (B) −1 (C) 1 (D) 3。 【統測】

C

3