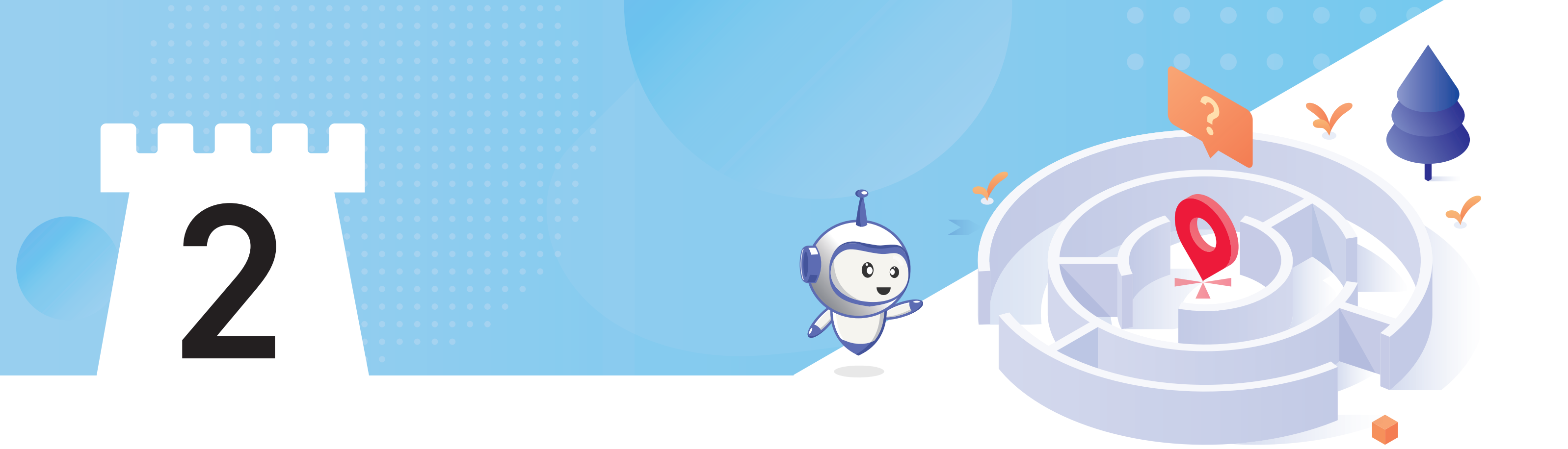


2

三角函數

雲端教室

2-1 有向角及其度量

課綱即時報	
新增	無
刪除	內切圓半徑、外接圓半徑與三角形面積之關係

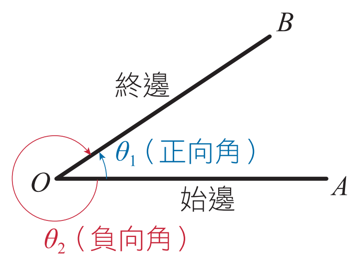
重點一 角度單位

1. **有向角：**

在平面上固定一邊為始邊（平行 x 軸正向），另一邊為終邊自由旋轉，觀察始邊與終邊的夾角 θ，如圖，$\overline{OA}$ 為始邊，$\overline{OB}$ 為終邊。

(1) 當始邊至終邊的方向是逆時針旋轉為正向角（例如：θ_1）。

(2) 當始邊至終邊的方向是順時針旋轉為負向角（例如：θ_2）。



2. **角度的度量：**

(1) 度度量（六十分制）：

將圓周切成 360 等分，每 1 等分所對之圓心角稱為 1 度，記做 1°；又 1 度 $=60$ 分，1 分 $=60$ 秒，記做 $1^\circ=60'$，$1'=60''$。

(2) 弳度量（弧度制）：

在圓周上取一弧，使其弧長恰等於半徑，此時圓弧所對之圓心角稱為 1 弳。

(3) 弳與度的換算：

$$1\text{ 弳}=\frac{180^\circ}{\pi}\fallingdotseq 57^\circ 17'\text{；}1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{弳}\fallingdotseq 0.01745\text{弳。}$$

觀念補充 //

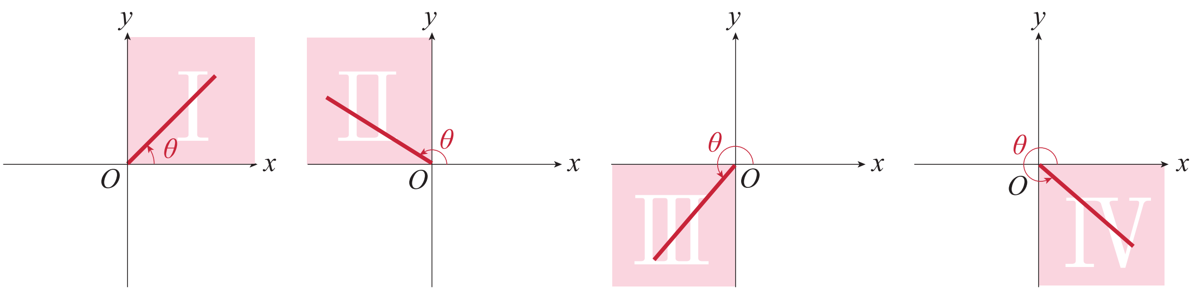
一平角 $1\pi=180^\circ \Rightarrow$ 單位換算：度$\times\dfrac{\pi}{180^\circ}=$弳，弳$\times\dfrac{180^\circ}{\pi}=$度。

3. 標準位置角：

(1) 坐標平面上以原點為頂點，x 軸正向為始邊的有向角 θ，稱為標準位置角。

(2) 當標準位置角 θ 的終邊恰好落在坐標軸上，則稱 θ 為象限角。

(3) 當標準位置角 θ 的終邊落在第一（二、三、四）象限，則稱 θ 為第一（二、三、四）象限角。



θ 終邊在第一象限 稱 θ 為第一象限角	θ 終邊在第二象限 稱 θ 為第二象限角	θ 終邊在第三象限 稱 θ 為第三象限角	θ 終邊在第四象限 稱 θ 為第四象限角

4. 同界角：

(1) 凡是具有相同始邊與終邊的有向角稱為同界角（例如：30° 與 390°）。

(2) 兩同界角必相差 360° 的整數倍。

(3) 同界角有無限多個，我們只找正同界角中最小者及負同界角中最大者，分別稱為最小正同界角及最大負同界角。

(4) 除 360° 的整數倍外，其餘角度之最小正同界角與最大負同界角恆相差 360°。

1 角度換算

老師講解

試完成下列各角度換算，度化為弧度，弧度化為度：

(1) 100°　(2) -315°　(3) $\frac{7\pi}{12}$　(4) 2

想法　度 $\times\frac{\pi}{180^\circ}=$ 弳，弳 $\times\frac{180^\circ}{\pi}=$ 度。

[答：(1) $\frac{5\pi}{9}$　(2) $-\frac{7\pi}{4}$　(3) 105°　(4) $\frac{360^\circ}{\pi}$]

解 (1) $100^\circ=100\times\frac{\pi}{180}=\frac{5\pi}{9}$

(2) $-315^\circ=-315\times\frac{\pi}{180}=-\frac{7\pi}{4}$

(3) $\frac{7\pi}{12}=\frac{7}{12}\times180^\circ=105^\circ$

(4) $2=2\times\frac{180^\circ}{\pi}=\frac{360^\circ}{\pi}$

學生練習

試完成下列各角度換算，度化為弧度，弧度化為度：

(1) 300°　(2) 3°　(3) 3π　(4) 3

[答：(1) $\frac{5\pi}{3}$　(2) $\frac{\pi}{60}$　(3) 540°　(4) $\frac{540^\circ}{\pi}$]

解 (1) $300^\circ=300\times\frac{\pi}{180}=\frac{5\pi}{3}$

(2) $3^\circ=3\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{60}$

(3) $3\pi=3\times180^\circ=540^\circ$

(4) $3=3\times\frac{180^\circ}{\pi}=\frac{540^\circ}{\pi}$

試判斷下列各角度為第幾象限角並求其最小正同界角與最大負同界角。

(1) $\theta=-1200^\circ$ (2) $\theta=\dfrac{31\pi}{7}$

想法 同界角必相差 360° 的整數倍，且除 360° 的整數倍外，最小正同界角與最大負同界角恆差 360°。

[答：(1) 第三象限角，最小正同界角為 240°，最大負同界角為 -120°
(2) 第一象限角，最小正同界角為 $\dfrac{3\pi}{7}$，最大負同界角為 $-\dfrac{11\pi}{7}$]

解 (1) 最小正同界角為 $360^\circ\times4-1200^\circ=240^\circ$
而 240° 為第三象限角
其最大負同界角為 $240^\circ-360^\circ=-120^\circ$

(2) 最小正同界角為 $\dfrac{31}{7}\pi-4\pi=\dfrac{3\pi}{7}$
而 $\dfrac{3\pi}{7}$ 為第一象限角
其最大負同界角為 $\dfrac{3\pi}{7}-2\pi=-\dfrac{11\pi}{7}$

試判斷下列各角度為第幾象限角並求其最小正同界角與最大負同界角。

(1) $\theta=1000^\circ$ (2) $\theta=\dfrac{7\pi}{3}$

[答：(1) 第四象限角，最小正同界角為 280°，最大負同界角為 -80°
(2) 第一象限角，最小正同界角為 $\dfrac{\pi}{3}$，最大負同界角為 $-\dfrac{5\pi}{3}$]

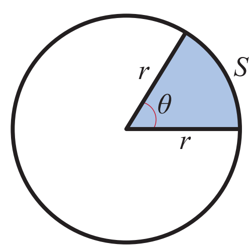
解 (1) 最小正同界角為 $1000^\circ-360^\circ\times2=280^\circ$
而 280° 為第四象限角
其最大負同界角為 $280^\circ-360^\circ=-80^\circ$

(2) 最小正同界角為 $\dfrac{7\pi}{3}-2\pi=\dfrac{\pi}{3}$
而 $\dfrac{\pi}{3}$ 為第一象限角
其最大負同界角為 $\dfrac{\pi}{3}-2\pi=-\dfrac{5\pi}{3}$

重點二 扇形的弧長與面積

1. 扇形弧長：

如圖所示，設一圓之半徑為 r，取圓上弧長 S，此弧所對之圓心角為 θ，則 $S=r\theta$（θ 代弧度）。



2. 扇形面積：

若扇形之圓心角為 θ（弧度），半徑為 r，則

(1) 扇形面積 $=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}Sr$。

(2) 扇形周長 $=2r+r\theta$。

3　老師講解　扇形的周長與面積　學生練習

一扇形之周長等於其所在圓周長的一半，若此圓半徑為 4，試求：
(1) 此扇形之圓心角。
(2) 此扇形面積。

想法　扇形弧長 $S=r\theta$，扇形面積 $=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}Sr$。

[答：(1) $\pi-2$　(2) $8(\pi-2)$ 平方單位]

解　設扇形圓心角為 θ

(1) $r\theta+2r=\frac{1}{2}\times 2\pi r$

$\Rightarrow\ \theta+2=\pi$

$\Rightarrow\ \theta=\pi-2$

(2) 扇形面積 $A=\frac{1}{2}\times 4^2(\pi-2)$

$=8(\pi-2)$（平方單位）

一扇形之弧長為 8，且其周長值等於其面積值，試求：
(1) 此扇形之圓心角。
(2) 此扇形面積。

[答：(1) 2　(2) 16 平方單位]

解　設扇形圓心角為 θ

(1) $r\theta+2r=\frac{1}{2}r^2\theta$

$\Rightarrow\ \theta+2=\frac{1}{2}r\theta$

$\Rightarrow\ 2+\theta=\frac{1}{2}\times 8$

$\Rightarrow\ \theta=2$

(2) $\because\ r\theta=8$

$\Rightarrow\ r\times 2=8\ \Rightarrow\ r=4$

扇形面積 $A=\frac{1}{2}\times 4^2\times 2$

$=16$（平方單位）

4　老師講解　扇形面積　學生練習

設鐘面上時針與分針的長度分別為 1 公分、2 公分，試求從上午 4:15 到上午 5:00 這段時間內，分針和時針所掃過的面積比。

想法　分針 1 分鐘走 6°，且扇形面積 $=\frac{1}{2}r^2\theta$。

[答：48：1]

解　分針走 45 分鐘之圓心角

$=45\times 6^\circ=270^\circ=\frac{3\pi}{2}$

面積 $A_1=\frac{1}{2}r_1^2\theta_1=\frac{1}{2}\times 2^2\times\frac{3\pi}{2}=3\pi$

時針走 45 分鐘之圓心角

$=\frac{1}{12}\times 45\times 6^\circ=\frac{\pi}{8}$

面積 $A_2=\frac{1}{2}r_2^2\theta_2=\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{16}$

$\therefore\ A_1：A_2=3\pi：\frac{\pi}{16}=48：1$

一鐘面上分針的長度為 6 公分，試求從上午 6:20 到上午 7:00 這段時間內，鐘面上分針所掃過的面積為多少平方公分？

[答：24π 平方公分]

解　分針 1 分鐘走 6°

從 6:20 ～ 7:00 的 40 分鐘內

分針所掃過之區域的圓心角

$=6^\circ\times 40=240^\circ=\frac{4\pi}{3}$

故所求面積

$=\frac{1}{2}\times 6^2\times\frac{4\pi}{3}=24\pi$（平方公分）

2-1 段落測驗

★表難題

1. 試完成下列角度換算：

(1) $-960^\circ=$ $\underline{-\dfrac{16\pi}{3}}$ 弧度。

(2) $\dfrac{23\pi}{6}$ 弧度 $=$ $\underline{690}$ 度。

2. 若 $-\dfrac{25\pi}{6}$ 之最大負同界角為 α 弧度，最小正同界角為 β 弧度，則 $(\alpha,\beta)=$ $\underline{\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{11\pi}{6}\right)}$。

3. 若三角形三內角度數的比為 5：6：7，則此三角形的最大內角為 $\underline{\dfrac{7\pi}{18}}$ 弧度。

4. 在 9 點 30 分時，時鐘的時針與分針所夾的較小角為 $\underline{\dfrac{7\pi}{12}}$ 弧度。

5. 10 弳為第 <u>三</u> 象限角。

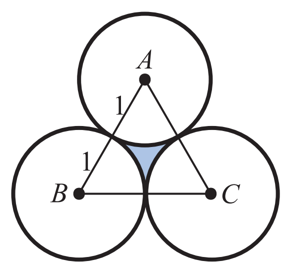
6. 半徑為 2 的扇形區域，其面積為 5 平方單位，則此扇形之周長為 $\underline{9}$。

7. 已知一扇形之面積與其圓心角所對應之弧長相等，則此扇形半徑為 $\underline{2}$。

8. 長 20 公分之單擺下端在弧長為 5 公分之圓弧上擺動，則此單擺所掃過的區域面積為 $\underline{50}$ 平方公分。

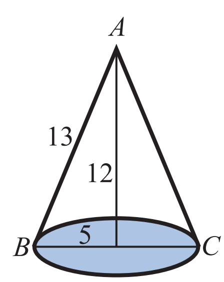
★ 9. 某人在圓形跑道上作等速率運動，每分鐘經過弧長所對之圓心角為 3 弳，若跑 1760 公尺共需 4 分 $53\dfrac{1}{3}$ 秒，則此圓形軌道半徑長為 $\underline{120}$ 公尺。

★10. 如圖，設半徑為 1 的三個圓互相外切，則此三個圓間所圍成的區域面積為 $\underline{\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{2}}$ 平方單位。



2-1 高手過招

1. 如圖，將一頂聖誕帽（直圓錐狀）沿斜高截開張成一扇形，已知底圓半徑為 5 公分，圓錐的高為 12 公分，則扇形的圓心角 $\theta=$ $\underline{\dfrac{10\pi}{13}}$。



2-2 三角函數的定義與性質

重點一　銳角三角函數

1. 銳角三角函數：

定義：在直角 ΔABC 中，$\angle C=90^\circ$，且 $\overline{AB}=c$，$\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$，如圖：

$\angle A$ 的正弦 $=\sin A=\dfrac{\angle A\text{ 對邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{a}{c}$，

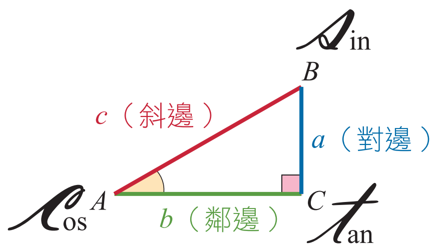
$\angle A$ 的餘弦 $=\cos A=\dfrac{\angle A\text{ 鄰邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{b}{c}$，

$\angle A$ 的正切 $=\tan A=\dfrac{\angle A\text{ 對邊}}{\angle A\text{ 鄰邊}}=\dfrac{a}{b}$，

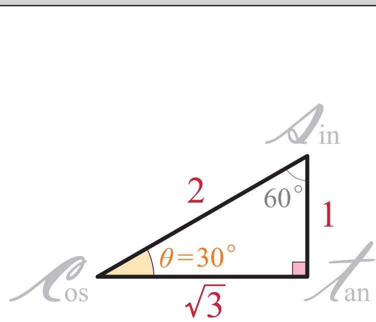
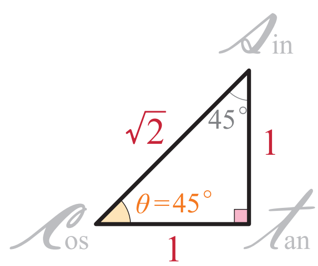
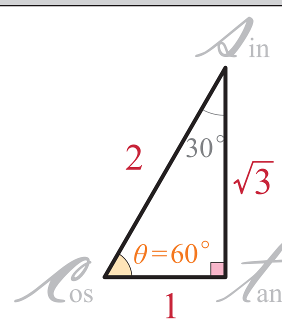
$\angle A$ 的餘切 $=\cot A=\dfrac{\angle A\text{ 鄰邊}}{\angle A\text{ 對邊}}=\dfrac{b}{a}$，

$\angle A$ 的正割 $=\sec A=\dfrac{\text{斜邊}}{\angle A\text{ 鄰邊}}=\dfrac{c}{b}$，

$\angle A$ 的餘割 $=\csc A=\dfrac{\text{斜邊}}{\angle A\text{ 對邊}}=\dfrac{c}{a}$。



2. 特別角：

函數／角度	$30^\circ=\dfrac{\pi}{6}$	$45^\circ=\dfrac{\pi}{4}$	$60^\circ=\dfrac{\pi}{3}$
圖示			
sin	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$
tan	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cot	$\sqrt{3}$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
sec	$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2
csc	2	$\sqrt{2}$	$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

1 老師講解 銳角三角函數的定義 學生練習

已知 θ 為銳角且 $\tan\theta=\dfrac{3}{4}$，試求 $\dfrac{\sin\theta}{1-\cot\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1-\tan\theta}$ 的值。

想法 銳角三角函數定義：
$\sin\theta=\dfrac{對邊}{斜邊}$，$\cos\theta=\dfrac{鄰邊}{斜邊}$，$\tan\theta=\dfrac{對邊}{鄰邊}$。

[答：$\dfrac{7}{5}$]

解 由 $\tan\theta=\dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow\ \sin\theta=\dfrac{3}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$，$\cot\theta=\dfrac{4}{3}$

代入原式 $=\dfrac{\frac{3}{5}}{1-\frac{4}{3}}+\dfrac{\frac{4}{5}}{1-\frac{3}{4}}$

$=-\dfrac{9}{5}+\dfrac{16}{5}$

$=\dfrac{7}{5}$

已知 θ 為銳角且 $\cot\theta=\dfrac{5}{12}$，試求 $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\dfrac{\sec\theta}{2-\tan\theta}$ 的值。

[答：-5]

解 由 $\cot\theta=\dfrac{5}{12}$

$\Rightarrow\ \sin\theta=\dfrac{12}{13}$，$\cos\theta=\dfrac{5}{13}$

$\tan\theta=\dfrac{12}{5}$，$\sec\theta=\dfrac{13}{5}$

代入原式 $=\dfrac{\frac{12}{13}}{1-\frac{5}{13}}+\dfrac{\frac{13}{5}}{2-\frac{12}{5}}$

$=\dfrac{3}{2}-\dfrac{13}{2}$

$=-5$

2 老師講解 特別角的三角函數值 學生練習

試求下列各式的值：

(1) $\sin30^\circ\times\cos45^\circ\times\sec60^\circ\times\csc45^\circ$

(2) $\sin^2 60^\circ+\tan30^\circ\times\cot60^\circ$

想法 熟記特別角之三角函數值。

[答：(1) 1 (2) $\dfrac{13}{12}$]

解 (1) 原式 $=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times2\times\sqrt{2}$

$=1$

(2) 原式 $=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$=\dfrac{13}{12}$

試求下列各式的值：

(1) $\sin\dfrac{\pi}{3}\times\tan\dfrac{\pi}{6}\times\sec\dfrac{\pi}{4}\times\cot\dfrac{\pi}{4}$

(2) $1-\tan^2\dfrac{\pi}{3}\times\sec^2\dfrac{\pi}{6}$

[答：(1) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (2) -3]

解 (1) 原式 $=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times\sqrt{2}\times1$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(2) 原式 $=1-(\sqrt{3})^2\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$

$=-3$

重點二　三角恆等式

1. 三角基本關係式：

(1) 平方關係：

① $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　② $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$　③ $\cot^2\theta+1=\csc^2\theta$

(2) 倒數關係：

① $\sin\theta\times\csc\theta=1 \Leftrightarrow \csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$

② $\cos\theta\times\sec\theta=1 \Leftrightarrow \sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$

③ $\tan\theta\times\cot\theta=1 \Leftrightarrow \cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$

(3) 商數關係：

① $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　② $\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

(4) 餘角關係：

① $\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$，$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$

② $\cot(90^\circ-\theta)=\tan\theta$，$\tan(90^\circ-\theta)=\cot\theta$

③ $\csc(90^\circ-\theta)=\sec\theta$，$\sec(90^\circ-\theta)=\csc\theta$

觀念補充 //

利用下圖之正六邊形來幫助記憶：

倒數關係：

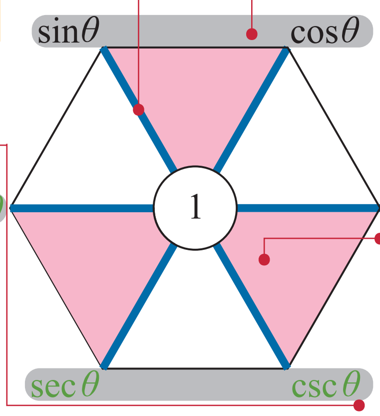
正對面的函數乘積＝1。例如：

$\sin\theta\times\csc\theta=1 \Rightarrow \csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$

餘角關係：

同一水平線兩端函數互為餘角關係。

例如：$\sin\theta=\cos(90^\circ-\theta)$



商數關係：

相鄰三個函數，

中間函數＝兩邊函數乘積。

例如：$\sec\theta=\tan\theta\times\csc\theta$

$\Rightarrow \csc\theta=\dfrac{\sec\theta}{\tan\theta}$

平方關係：

任一倒三角形ABC，恆有$A^2+B^2=C^2$。

例如：$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

2. 常見公式：

(1) $\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$　(2) $(\sin\theta\pm\cos\theta)^2=1\pm2\sin\theta\cos\theta$

3 老師講解　三角恆等式　學生練習

試求：

(1) $\sin^2 10^\circ + \sin^2 80^\circ + \sec^2 50^\circ - \cot^2 40^\circ$

(2) $(\sin 3^\circ - \csc 3^\circ)^2 + (\cos 3^\circ - \sec 3^\circ)^2$

$-(\tan 3^\circ)^2 - (\cot 3^\circ)^2$

想法　平方關係、倒數關係與餘角關係之綜合應用。

[答：(1) 2　(2) −1]

解 (1) 原式 $= (\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ) + (\sec^2 50^\circ - \tan^2 50^\circ)$

$= 1 + 1$

$= 2$

(2) 原式

$= (\sin^2 3^\circ - 2\sin 3^\circ \csc 3^\circ + \csc^2 3^\circ) + (\cos^2 3^\circ - 2\cos 3^\circ \sec 3^\circ + \sec^2 3^\circ) - \tan^2 3^\circ - \cot^2 3^\circ$

$= (\sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ) - 2\sin 3^\circ \csc 3^\circ - 2\cos 3^\circ \sec 3^\circ + (\sec^2 3^\circ - \tan^2 3^\circ) + (\csc^2 3^\circ - \cot^2 3^\circ)$

$= 1 - 2 - 2 + 1 + 1$

$= -1$

試求：

(1) $\cos^2 57^\circ + \cos^2 33^\circ - \csc^2 27^\circ + \cot^2 27^\circ$

(2) $(\sin 83^\circ + \cos 83^\circ)^2 + (\sin 7^\circ - \cos 7^\circ)^2$

[答：(1) 0　(2) 2]

解 (1) 原式 $= (\sin^2 33^\circ + \cos^2 33^\circ) - (\csc^2 27^\circ - \cot^2 27^\circ)$

$= 1 - 1$

$= 0$

(2) 原式

$= (\sin^2 83^\circ + 2\sin 83^\circ \cos 83^\circ + \cos^2 83^\circ) + (\sin^2 7^\circ - 2\sin 7^\circ \cos 7^\circ + \cos^2 7^\circ)$

$= (\sin^2 83^\circ + \cos^2 83^\circ) + (\sin^2 7^\circ + \cos^2 7^\circ) + 2\sin 83^\circ \cos 83^\circ - 2\cos 83^\circ \sin 83^\circ$

$= 1 + 1$

$= 2$

4 老師講解　商數關係的應用　學生練習

若 $\tan\theta = \dfrac{1}{3}$，試求 $\dfrac{\sin\theta + \cos\theta}{2\sin\theta - \cos\theta}$ 之值。

想法　商數關係 $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$。

[答：−4]

解 $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow \cos\theta = 3\sin\theta$

代入原式 $= \dfrac{\sin\theta + 3\sin\theta}{2\sin\theta - 3\sin\theta}$

$= \dfrac{4\sin\theta}{-\sin\theta}$

$= -4$

若 $\dfrac{\sin\theta - 3\cos\theta}{2\sin\theta + \cos\theta} = \dfrac{1}{3}$，試求 $\cot\theta$ 之值。

[答：$\dfrac{1}{10}$]

解 原式 $\Rightarrow 3\sin\theta - 9\cos\theta = 2\sin\theta + \cos\theta$

$\Rightarrow 10\cos\theta = \sin\theta$

$\Rightarrow \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{1}{10}$

故 $\cot\theta = \dfrac{1}{10}$

5　老師講解　三角恆等式搭配乘法公式　學生練習

若 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{2}{3}$，試求：

(1) $\sin\theta\times\cos\theta$　(2) $\tan\theta+\cot\theta$

想法　$\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$。

[答：(1) $-\dfrac{5}{18}$　(2) $-\dfrac{18}{5}$]

解 (1) $\because\ \sin\theta+\cos\theta=\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ (\sin\theta+\cos\theta)^2=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$

$\Rightarrow\ 1+2\sin\theta\times\cos\theta=\dfrac{4}{9}$

$\Rightarrow\ \sin\theta\times\cos\theta=-\dfrac{5}{18}$

(2) $\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\times\cos\theta}$

$=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

$=-\dfrac{18}{5}$

已知 $0^\circ\leq\theta\leq45^\circ$，若 $\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{5}{2}$，試求：

(1) $\sin\theta+\cos\theta$　(2) $\sin^2\theta-\cos^2\theta$

[答：(1) $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$　(2) $-\dfrac{3}{5}$]

解 (1) $\because\ \tan\theta+\cot\theta=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{5}{2}$

$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=\dfrac{2}{5}$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$

$\Rightarrow\ (\sin\theta+\cos\theta)^2=\dfrac{9}{5}$

$\therefore\ \sin\theta+\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$（取正）

(2) $\sin^2\theta-\cos^2\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)$

由 $(\sin\theta-\cos\theta)^2$

$=1-2\sin\theta\cos\theta=1-\dfrac{4}{5}=\dfrac{1}{5}$

$\Rightarrow\ \sin\theta-\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$（取負）

$\therefore\ \sin^2\theta-\cos^2\theta=\dfrac{3}{\sqrt{5}}\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)=-\dfrac{3}{5}$

6　老師講解　三角恆等式搭配根與係數關係　學生練習

若 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 為 $3x^2+4x+7k=0$ 之兩根，試求 k 之值。

想法　α、β 為 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根，則根與係數關係：$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$。

[答：$\dfrac{1}{6}$]

解 由兩根和：$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{4}{3}$

兩根積：$\sin\theta\times\cos\theta=\dfrac{7k}{3}$

$\Rightarrow\ (\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$

$\Rightarrow\ \left(-\dfrac{4}{3}\right)^2=1+2\times\dfrac{7k}{3}$

$\Rightarrow\ \dfrac{16}{9}=1+\dfrac{14k}{3}\ \Rightarrow\ k=\dfrac{1}{6}$

若 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 為 $5x^2-3x+k=0$ 之兩根，試求 k 之值。

[答：$-\dfrac{8}{5}$]

解 由兩根和：$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{3}{5}$

兩根積：$\sin\theta\times\cos\theta=\dfrac{k}{5}$

$\Rightarrow\ (\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$

$\Rightarrow\ \left(\dfrac{3}{5}\right)^2=1+2\times\dfrac{k}{5}$

$\Rightarrow\ \dfrac{9}{25}=1+\dfrac{2k}{5}$

$\Rightarrow\ k=-\dfrac{8}{5}$

7 平方關係、餘角關係

老師講解

試求 $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \cdots + \sin^2 89^\circ$ 之值。

[答：$\frac{89}{2}$]

解 利用 $\sin^2 1^\circ + \sin^2 89^\circ$

$= \sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ$

$= 1$

$\therefore \left(\sin^2 1^\circ + \sin^2 89^\circ\right) + \left(\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ\right) + \cdots + \left(\sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ\right) + \sin^2 45^\circ$

$= 1 \times 44 + \frac{1}{2}$

$= \frac{89}{2}$

學生練習

試求 $\cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 70^\circ + \cos^2 80^\circ$ 之值。

[答：4]

解 利用 $\cos^2 10^\circ + \cos^2 80^\circ$

$= \cos^2 10^\circ + \sin^2 10^\circ$

$= 1$

$\therefore \left(\cos^2 10^\circ + \cos^2 80^\circ\right) + \left(\cos^2 20^\circ + \cos^2 70^\circ\right) + \left(\cos^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ\right) + \left(\cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ\right)$

$= 1 + 1 + 1 + 1$

$= 4$

8 三角恆等式搭配立方公式

老師講解

已知 θ 為銳角，若 $\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{3}$，試求 $\sin^3\theta - \cos^3\theta$。

[答：$\frac{13}{27}$]

解 將 $\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{3}$ 兩邊平方

得 $(\sin\theta - \cos\theta)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$

$\Rightarrow\ 1 - 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{9}$

$\Rightarrow\ \sin\theta\cos\theta = \frac{4}{9}$

則 $\sin^3\theta - \cos^3\theta$

$= (\sin\theta - \cos\theta)\left(\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta\right)$

$= \frac{1}{3} \times \left(1 + \frac{4}{9}\right)$

$= \frac{13}{27}$

學生練習

已知 θ 為銳角，若 $\sin\theta - \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$，試求 $\sin^3\theta - \cos^3\theta$。

[答：$\frac{9\sqrt{3}}{16}$]

解 將 $\sin\theta - \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 兩邊平方

得 $(\sin\theta - \cos\theta)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$\Rightarrow\ 1 - 2\sin\theta\cos\theta = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow\ \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{8}$

則 $\sin^3\theta - \cos^3\theta$

$= (\sin\theta - \cos\theta)\left(\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(1 + \frac{1}{8}\right)$

$= \frac{9\sqrt{3}}{16}$

2-2 段落測驗

★表難題

★ 1. $\dfrac{1}{1+\sin 5^\circ}+\dfrac{1}{1+\tan 10^\circ}+\dfrac{1}{1+\cot 10^\circ}+\dfrac{1}{1+\csc 5^\circ}=$ ＿2＿。

2. $\cos 30^\circ \times \cos 60^\circ + \sin 30^\circ \times \sin 60^\circ =$ ＿$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$＿。

3. $\left(1+2\sin\dfrac{\pi}{6}+\cos\dfrac{\pi}{4}\right)\left(1-\sin\dfrac{\pi}{4}+2\cos\dfrac{\pi}{3}\right)=$ ＿$\dfrac{7}{2}$＿。

4. $1+\sin^4\theta+\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^2\theta=$ ＿2＿。

5. 若 $\tan^2 45^\circ - \cos^2 60^\circ = k\sin 45^\circ \times \cos 45^\circ \times \tan 60^\circ$，則 $k=$ ＿$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$＿。

★ 6. 已知 θ 為銳角，且 $\sin\theta > \cos\theta$。若 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{17}}{3}$，則 $\sin\theta-\cos\theta=$ ＿$\dfrac{1}{3}$＿。

7. 設 θ 為實數，若 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$，則 $\tan\theta+\cot\theta=$ ＿$\dfrac{5}{2}$＿。

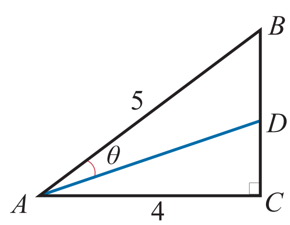
★ 8. 設 t 是任意實數，若 $x=\dfrac{1-\sin^2 t}{1+\sin^2 t}$，$y=\dfrac{2\sin t}{1+\sin^2 t}$，則 $x^2+y^2=$ ＿1＿。【統測】

9. 在坐標平面上原點至點 $(\sin 15^\circ, \sin 75^\circ)$ 的距離為＿1＿。【統測】

10. 設 θ、k 為實數，若 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 為方程式 $3x^2+2x+k=0$ 之兩根，則 $k=$ ＿$-\dfrac{5}{6}$＿。【統測】

2-2 高手過招

1. 直角 $\triangle ABC$ 中，如圖，若 $\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=4$，$\angle A$ 的角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D，設 $\angle DAB=\theta$，試求 $\tan\theta=$ ＿$\dfrac{1}{3}$＿。



2. 已知 θ 為銳角，若 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，試求 $\sin^3\theta+\cos^3\theta=$ ＿$\dfrac{5\sqrt{7}}{16}$＿。

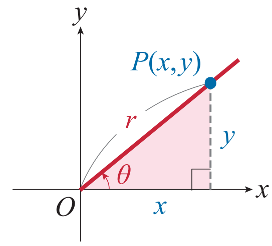
3. 化簡 $(1+\tan\theta+\sec\theta)(1+\cot\theta-\csc\theta)=$ ＿2＿。

2-3 》任意角的三角函數

重點一　任意角三角函數的定義

1. **標準位置角 θ 終邊上一點 $P(x, y)$，**

　$\overline{OP} = r = \sqrt{x^2 + y^2}$，如圖，



　則定義任意角三角函數：$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$，$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$，$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$。

　再利用倒數關係得：$\cot\theta = \dfrac{x}{y}$，$\sec\theta = \dfrac{r}{x}$，$\csc\theta = \dfrac{r}{y}$。

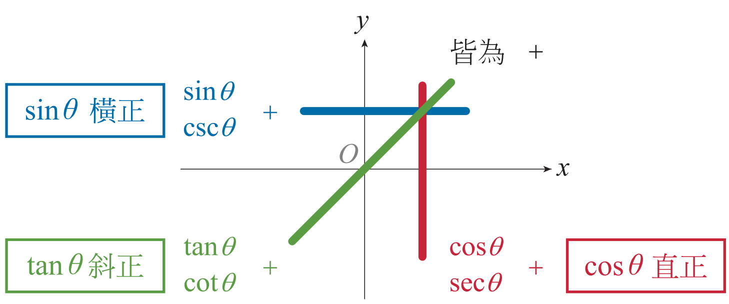
2. **三角函數值的正負號：**

　三角函數值的正負符號取決於角 θ 終邊的所在位置，規則如下：

	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限
$\sin\theta$ $\csc\theta$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\theta$ $\sec\theta$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan\theta$ $\cot\theta$	$+$	$-$	$+$	$-$

觀念補充 //

可用右圖輔助記憶：



1 老師講解　任意角三角函數之定義　學生練習

已知 $P(12,-5)$ 為角 θ 終邊上一點，試求其六個三角函數值。

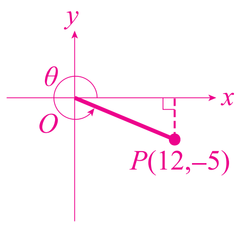
想法　任意角三角函數定義：

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$，$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$，

$\cot\theta=\dfrac{x}{y}$，$\sec\theta=\dfrac{r}{x}$，$\csc\theta=\dfrac{r}{y}$。

[答：見解析]

解　如圖所示



$\because\ P(12,-5)$

$\therefore\ r=\overline{OP}=13$，$x=12$，$y=-5$

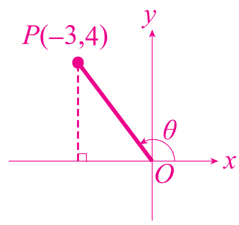
故 $\sin\theta=-\dfrac{5}{13}$，$\cos\theta=\dfrac{12}{13}$，$\tan\theta=-\dfrac{5}{12}$

$\cot\theta=-\dfrac{12}{5}$，$\sec\theta=\dfrac{13}{12}$，$\csc\theta=-\dfrac{13}{5}$

已知 $P(-3,4)$ 為角 θ 終邊上一點，試求其六個三角函數值。

[答：見解析]

解　如圖所示



$\because\ P(-3,4)$

$\therefore\ r=\overline{OP}=5$，$x=-3$，$y=4$

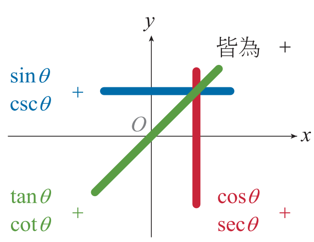
故 $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$，$\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$，$\tan\theta=-\dfrac{4}{3}$

$\cot\theta=-\dfrac{3}{4}$，$\sec\theta=-\dfrac{5}{3}$，$\csc\theta=\dfrac{5}{4}$

2 老師講解　利用三角函數值的正負判斷 θ 之象限　學生練習

已知 $\sin\theta\cos\theta<0$ 且 $\tan\theta\csc\theta>0$，試求 θ 為第幾象限角?

想法



[答：第四象限角]

解　$\sin\theta\cos\theta<0$，兩者異號

$\Rightarrow$ θ 為第二或第四象限角

$\tan\theta\csc\theta>0$，兩者同號

$\Rightarrow$ θ 為第一或第四象限角

故 θ 為第四象限角

已知 $\tan\theta>0$ 且 $\sec\theta<0$，試求點 $(\cos\theta,\csc\theta)$ 在第幾象限?

[答：第三象限]

解　$\tan\theta>0$　$\Rightarrow$　θ 為第一或第三象限角

$\sec\theta<0$　$\Rightarrow$　θ 為第二或第三象限角

故 θ 為第三象限角

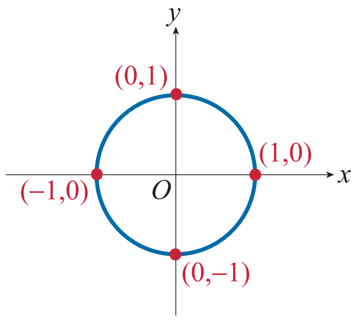
則點 $(\cos\theta,\csc\theta)$ 之坐標符號為 $(-,-)$

在第三象限

重點二　利用銳角求任意角三角函數值

1. 象限角的三角函數值：

在單位圓上布建四個點分別為：$(1,0)$、$(0,1)$、$(-1,0)$、$(0,-1)$，如圖所示。



θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
0°	0	1	0	無意義	1	無意義
90°	1	0	無意義	0	無意義	1
180°	0	-1	0	無意義	-1	無意義
270°	-1	0	無意義	0	無意義	-1

2. 化任意角三角函數為銳角三角函數：

(1) 負角公式：

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$，$\cos(-\theta)=\cos\theta$，$\tan(-\theta)=-\tan\theta$。

例如：$\sin(-30^\circ)=-\sin 30^\circ$，$\cos(-30^\circ)=\cos 30^\circ$，$\tan(-30^\circ)=-\tan 30^\circ$。

利用倒數關係，可得另三個三角函數負角公式，規則相同。

(2) 非第一象限角之轉換式（θ 為銳角）：

① 第二象限角之轉換式$=F(180^\circ-\theta)=\pm F(\theta)$

② 第三象限角之轉換式$=F(180^\circ+\theta)=\pm F(\theta)$

③ 第四象限角之轉換式$=F(360^\circ-\theta)=\pm F(\theta)$

例如：$\sin 240^\circ=\sin(180^\circ+60^\circ)=-\sin 60^\circ=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

(3) 常見特別角之三角函數值：

	120°	135°	150°	210°	225°	240°	300°	315°	330°
sin	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
cos	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
tan	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(4) 任意角三角函數的轉換技巧：（口訣：奇變、偶不變；正負、看象限）

① 原函數（$\frac{\pi}{2}\times$偶數$\pm\theta$）$=\pm$原函數(θ)

② 原函數（$\frac{\pi}{2}\times$奇數$\pm\theta$）$=\pm$餘函數(θ)

例如：

	$\frac{\pi}{2}-\theta$	$\frac{\pi}{2}+\theta$	$\pi-\theta$	$\pi+\theta$	$\frac{3\pi}{2}-\theta$	$\frac{3\pi}{2}+\theta$	$2\pi-\theta$	$2\pi+\theta$
sin	$\cos\theta$	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\sin\theta$
cos	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\cos\theta$

3 利用銳角求任意角三角函數值

老師講解

試求：

(1) $\cos 240^\circ+\tan(-315^\circ)+\sin(-750^\circ)$
$+\sec 180^\circ$

(2) $\sin 600^\circ\cot 210^\circ+\tan 135^\circ+\cos 120^\circ$

想法 依轉換公式化簡任意角的三角函數值。

[答：(1) -1　(2) -3]

解 (1) 原式

$=-\cos 60^\circ+\tan 45^\circ-\sin 30^\circ+(-1)$

$=-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}+(-1)$

$=-1$

(2) 原式

$=(-\sin 60^\circ)(\cot 30^\circ)-\tan 45^\circ-\cos 60^\circ$

$=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\sqrt{3}-1-\frac{1}{2}$

$=-3$

學生練習

試求：

(1) $\cos 180^\circ\times\sin 330^\circ-\tan 180^\circ\times\cot 585^\circ$

(2) $\sin 150^\circ+\cot(-135^\circ)-\cos 420^\circ$

[答：(1) $\frac{1}{2}$　(2) 1]

解 (1) 原式

$=(-1)\times(-\sin 30^\circ)-0\times\cot 45^\circ$

$=(-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)-0\times 1$

$=\frac{1}{2}$

(2) 原式

$=\sin 30^\circ-(-\cot 45^\circ)-\cos 60^\circ$

$=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}$

$=1$

4 老師講解 利用已知三角函數值求任意角三角函數值 學生練習

已知 $\sin\theta=\frac{3}{5}$ 且 $\tan\theta<0$，試求 $\frac{\sin\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\tan\theta}$ 之值。

想法 依任意角三角函數之定義代入求值，特別注意 θ 所屬象限。

[答：$-\frac{1}{5}$]

解 $\because\ \sin\theta=\frac{3}{5}>0$ 且 $\tan\theta<0$

$\therefore\ \theta$ 為第二象限角

則 $\cos\theta=-\frac{4}{5}$，$\tan\theta=-\frac{3}{4}$，$\cot\theta=-\frac{4}{3}$

$$\text{代入原式}=\frac{\frac{3}{5}}{1-\left(-\frac{4}{3}\right)}+\frac{-\frac{4}{5}}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}=\frac{9}{35}-\frac{16}{35}=-\frac{7}{35}=-\frac{1}{5}$$

已知 $\cos\theta=-\frac{4}{5}$ 且 $\sin\theta<0$，試求 $\cot\theta+\csc\theta$ 之值。

[答：$-\frac{1}{3}$]

解 $\because\ \cos\theta=-\frac{4}{5}<0$ 且 $\sin\theta<0$

$\therefore\ \theta$ 為第三象限角

則 $\cot\theta=\frac{4}{3}$，$\csc\theta=-\frac{5}{3}$

$$\text{代入原式}=\frac{4}{3}+\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{1}{3}$$

5 老師講解 利用銳角求任意角三角函數之轉換 學生練習

已知 θ 非象限角，試求 $\frac{\sin(-\theta)}{\sin(180^\circ+\theta)}-\frac{\cos(360^\circ-\theta)}{\sin(90^\circ-\theta)}-\frac{\sin(270^\circ-\theta)}{\cos(-\theta)}$ 之值。

想法 任意角轉換技巧：

(1) 原函數 $\left(\frac{\pi}{2}\times\text{偶數}\pm\theta\right)=\pm$ 原函數 (θ)。

(2) 原函數 $\left(\frac{\pi}{2}\times\text{奇數}\pm\theta\right)=\pm$ 餘函數 (θ)。

[答：1]

解 $$\text{原式}=\frac{-\sin\theta}{-\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{\cos\theta}-\frac{-\cos\theta}{\cos\theta}=1-1+1=1$$

已知 θ 非象限角，試求 $\frac{\sin(\pi-\theta)}{\sin(\pi+\theta)}-\frac{\tan(-\theta)}{\cot\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)}+\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\sin(3\pi-\theta)}$ 之值。

[答：-1]

解 $$\text{原式}=\frac{\sin\theta}{-\sin\theta}-\frac{-\tan\theta}{\tan\theta}+\frac{-\sin\theta}{\sin\theta}=-1+1-1=-1$$

進階例題

6 老師講解　利用已知三角函數值求任意角三角函數值　學生練習

若 $\cos(-123^\circ)=k$，試求 $\tan213^\circ$ 之值。

[答：$-\dfrac{k}{\sqrt{1-k^2}}$]

解　$\cos(-123^\circ)=-\cos57^\circ=k=\dfrac{k}{1}$

$\tan213^\circ=\tan33^\circ=\cot57^\circ=-\dfrac{k}{\sqrt{1-k^2}}$

已知 $\tan22^\circ=k$，試求 $\sin2002^\circ$ 之值。

[答：$-\dfrac{k}{\sqrt{k^2+1}}$]

解　$\tan22^\circ=k=\dfrac{k}{1}$

$$\begin{aligned}\sin2002^\circ&=\sin(360^\circ\times5+202^\circ)\\&=\sin202^\circ\\&=\sin(180^\circ+22^\circ)\\&=-\sin22^\circ\\&=-\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}\end{aligned}$$

7 老師講解　利用任意角之三角函數轉換式求值　學生練習

試求 $\sin1^\circ+\sin2^\circ+\cdots+\sin359^\circ+\sin360^\circ$ 之值。

[答：0]

解　原式整理

$$\begin{aligned}&=(\sin1^\circ+\sin359^\circ)+(\sin2^\circ+\sin358^\circ)\\&\quad+\cdots+\sin180^\circ+\sin360^\circ\\&=(0+0+\cdots+0)+\sin180^\circ+\sin360^\circ\\&=0+0+0\\&=0\end{aligned}$$

試求 $\cos1^\circ+\cos2^\circ+\cdots+\cos179^\circ+\cos180^\circ$ 之值。

[答：-1]

解　原式整理

$$\begin{aligned}&=(\cos1^\circ+\cos179^\circ)+(\cos2^\circ+\cos178^\circ)\\&\quad+\cdots+\cos90^\circ+\cos180^\circ\\&=(0+0+\cdots+0)+0+(-1)\\&=-1\end{aligned}$$

2-3 段落測驗

★表難題

1. 設 $P(-24, a)$ 為 θ 角終邊上一點，若 $\cot\theta = \dfrac{12}{5}$，則 $\dfrac{3\sin\theta - \cos\theta}{2\tan\theta + \sec\theta} =$ $\underline{\dfrac{12}{13}}$。

2. 設 $P(\cos\theta, \tan\theta)$ 在第三象限，則 θ 為第 $\underline{\text{二}}$ 象限角。

3. $\sin 810^\circ + \cos(-540^\circ) + \sec 675^\circ + \csc 1215^\circ =$ $\underline{2\sqrt{2}}$。

4. 若 $\sin\theta = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ 且 $\cot\theta > 0$，則 $\tan\theta \times \sec\theta =$ $\underline{-3\sqrt{10}}$。

5. $\dfrac{\sin 240^\circ \cot 210^\circ}{\tan 315^\circ + \cos 120^\circ} =$ $\underline{1}$。

★ 6. $\cos\dfrac{\pi}{7} + \cos\dfrac{3\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7} =$ $\underline{0}$。

7. 已知 θ 非象限角，則 $\dfrac{\sin(\pi - \theta)}{\sin(2\pi + \theta)} + \dfrac{\tan\left(\dfrac{3\pi}{2} - \theta\right)}{\cot(-\theta)} + \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right)}{\cos(-\theta)} =$ $\underline{1}$。

8. $\sin^2 210^\circ + \cos^2 570^\circ + \sec^2 930^\circ - \tan^2 1290^\circ + \csc^2 1650^\circ - \cot^2 2010^\circ =$ $\underline{3}$。【統測】

9. 設 θ 為銳角，則 $\dfrac{\cos(-\theta)}{\sin(360^\circ + \theta)} + \dfrac{\tan(180^\circ + \theta)}{\cot(270^\circ + \theta)} - \dfrac{\sin(270^\circ - \theta)}{\cos(90^\circ + \theta)} =$ $\underline{-1}$。【統測】

10. 設 θ 為第四象限角，若 $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{2}{3}$，則 $\sin\theta - \cos\theta =$ $\underline{-\dfrac{\sqrt{14}}{3}}$。【統測】

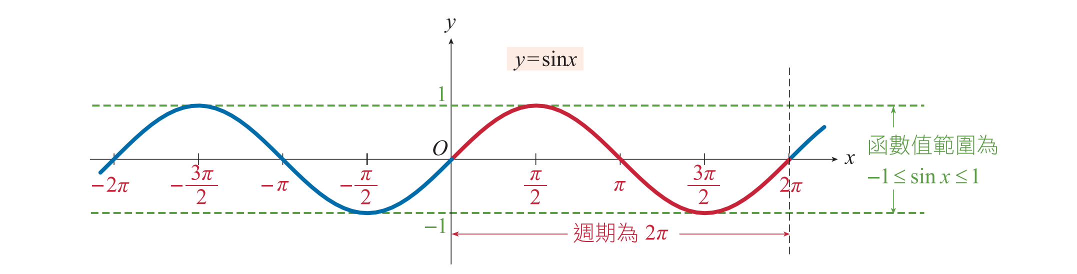
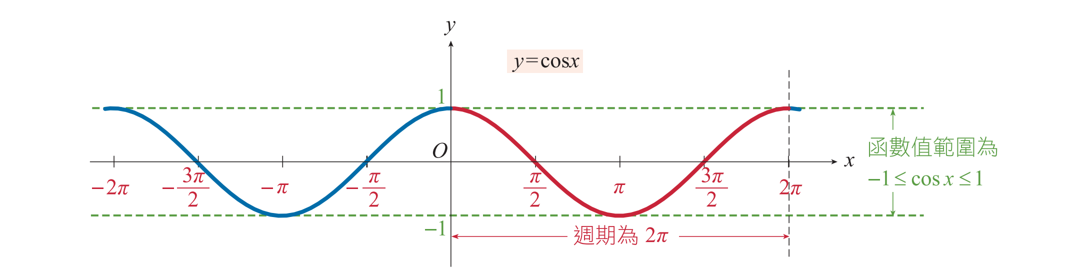
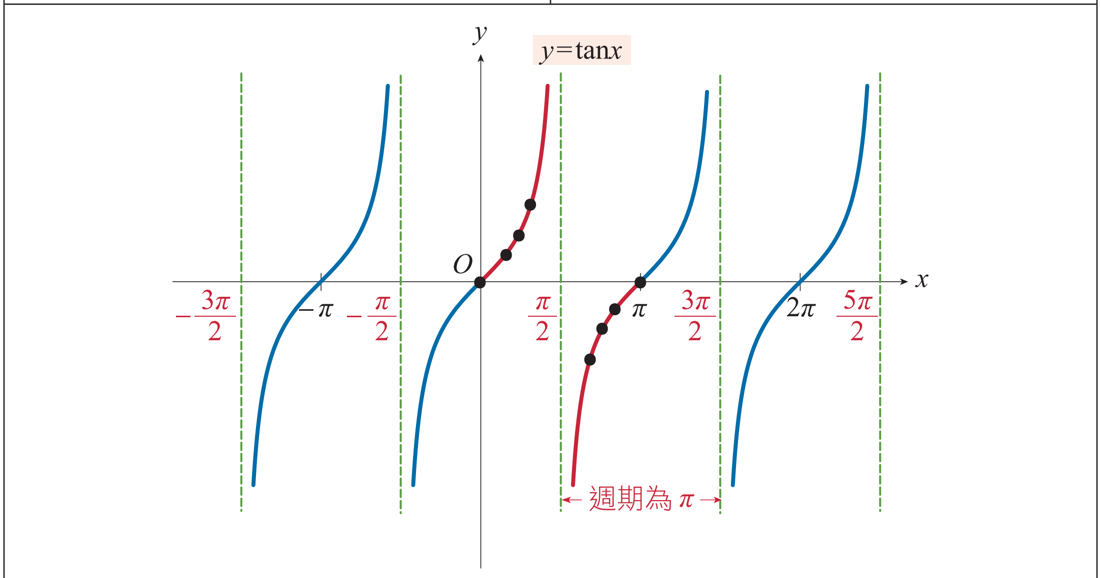
2-3 高手過招

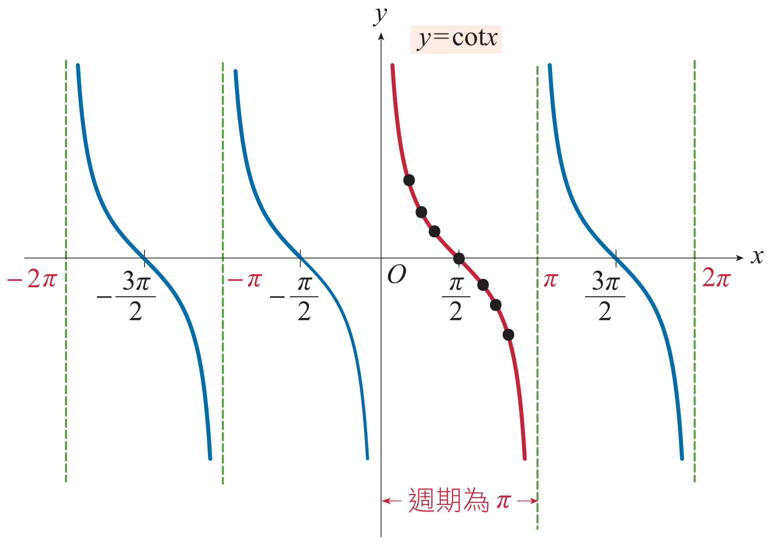
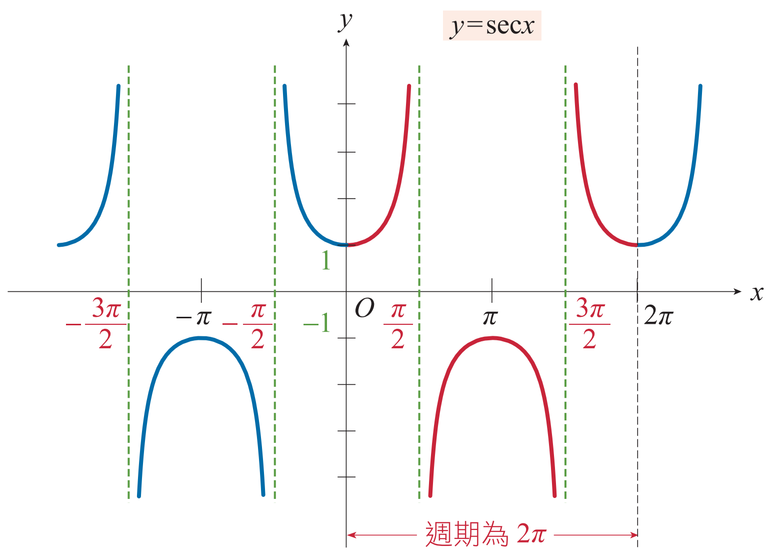
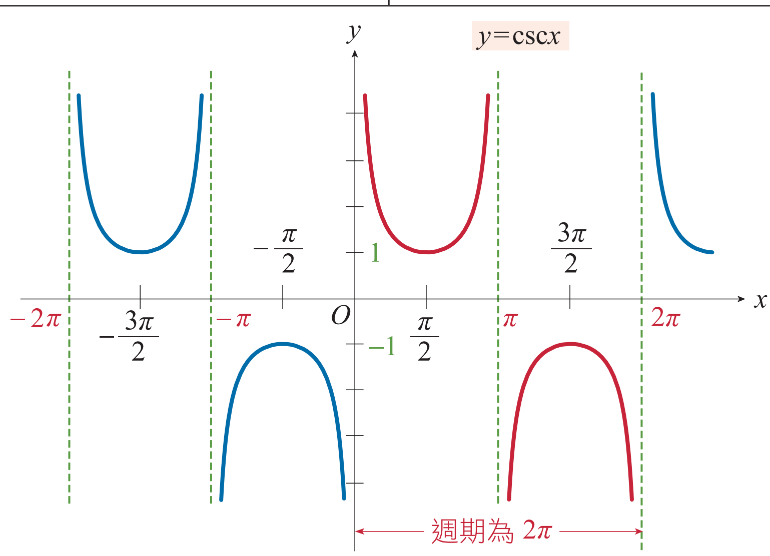
1. 若 $\cos x = \tan x$，則 $\sin x =$ $\underline{\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}}$。

2-4 三角函數的圖形與週期

重點一　三角函數圖形

1. 三角函數的圖形：

<table>
<tr><th>三角函數</th><th>定義域</th><th>值域</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$y=\sin x$</td><td>$\{x \mid x\in\mathbb{R}\}$</td><td>$\{y \mid -1\le y\le 1\}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$y=\cos x$</td><td>$\{x \mid x\in\mathbb{R}\}$</td><td>$\{y \mid -1\le y\le 1\}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$y=\tan x$</td><td>$\left\{x \,\middle|\, x\ne k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})\right\}$</td><td>$\{y \mid y\in\mathbb{R}\}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
</table>

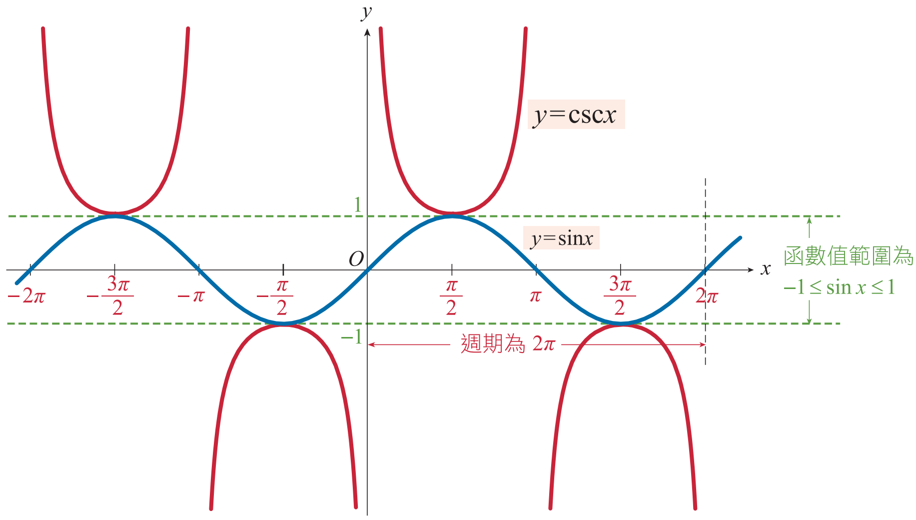
<table>
<tr><th>三角函數</th><th>定義域</th><th>值域</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$y=\cot x$</td><td>$\left\{x \middle| x \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\right\}$</td><td>$\left\{y \middle| y \in \mathbb{R}\right\}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$y=\sec x$</td><td>$\left\{x \middle| x \neq k\pi+\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})\right\}$</td><td>$\left\{y \middle| \ |y| \geq 1\right\}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$y=\csc x$</td><td>$\left\{x \middle| x \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\right\}$</td><td>$\left\{y \middle| \ |y| \geq 1\right\}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
</table>

觀念補充 //

觀察下方 $y=\csc x$ 的圖形和 $y=\sin x$ 的圖形：

$\csc x$ 的圖形在 $y=-1 \sim y=1$ 之間的中空地帶剛好可以塞進 $\sin x$ 的圖形，

因為 $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$，$\sec x$ 和 $\cos x$ 也類似。



2. 三角函數的週期：

若一函數恆有 $f(x+T)=f(x)$ 之關係，我們稱 f 為週期函數。習慣取滿足條件的最小正數 T，此 T 稱為 $f(x)$ 之週期，亦即其函數值每隔 T 就會再重現一次。

例如：$\sin(2\pi+x)=\sin x$，則稱 $\sin x$ 之週期為 2π。

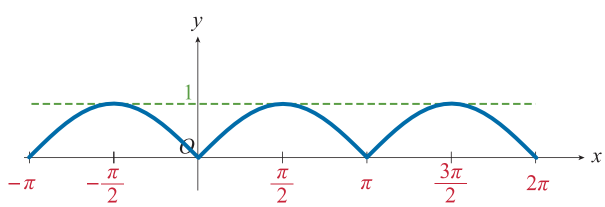
(1) 週期為 2π 的三角函數有：$\sin x$，$\cos x$，$\sec x$，$\csc x$。
　週期為 π 的三角函數有：$\tan x$，$\cot x$。

(2) 若 $f(x)$ 之週期為 T，則函數 $af(kx+b)+c$ 之週期為 $\dfrac{T}{|k|}$。

(3) 三角函數加絕對值：$|\sin x|$、$|\cos x|$、$|\tan x|$、$|\cot x|$、$|\sec x|$、$|\csc x|$ 之週期均為 π。

觀念補充 //

$y=|\sin x|$ 的圖形就是把 $y=\sin x$ 圖形中負的部分翻正，如圖所示，所以週期減半。



3. 銳角三角函數的大小關係：

(1) 當 $0^\circ<\theta<45^\circ$ 時：$\sin\theta<\cos\theta$，$\tan\theta<\cot\theta$，$\sec\theta<\csc\theta$（正函數＜餘函數）。
　例如：$\sin 40^\circ<\cos 40^\circ$。

(2) 當 $45^\circ<\theta<90^\circ$ 時：$\sin\theta>\cos\theta$，$\tan\theta>\cot\theta$，$\sec\theta>\csc\theta$（正函數＞餘函數）。
　例如：$\sin 50^\circ>\cos 50^\circ$。

1 老師講解　求三角函數之週期　學生練習

試求下列各函數之週期：

(1) $y=3\sin x+\dfrac{\pi}{4}$　(2) $y=5\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

(3) $y=3+\tan\pi x$　(4) $y=|\sec x|+1$

想法　若 $f(x)$ 週期為 T，則 $af(kx+b)+c$ 週期為 $\dfrac{T}{|k|}$。

[答：(1) 2π　(2) π　(3) 1　(4) π]

解 (1) $\because$ $\sin x$ 週期為 2π

$\therefore$ 原式週期為 2π

(2) $\because$ $\sin x$ 週期為 2π

$\therefore$ 原式週期為 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

(3) $\because$ $\tan x$ 週期為 π

$\therefore$ 原式週期為 $\dfrac{\pi}{\pi}=1$

(4) $\because$ $\sec x$ 週期為 2π

$\therefore$ 原式週期為 π

試求下列各函數之週期：

(1) $y=8\csc x+3\pi$　(2) $y=\tan 3x-1$

(3) $y=\dfrac{1}{3}\sec\dfrac{x}{2}$　(4) $y=7\cos 2x-11$

[答：(1) 2π　(2) $\dfrac{\pi}{3}$　(3) 4π　(4) π]

解 (1) $\because$ $\csc x$ 週期為 2π

$\therefore$ 原式週期為 2π

(2) $\because$ $\tan x$ 週期為 π

$\therefore$ 原式週期為 $\dfrac{\pi}{3}$

(3) $\because$ $\sec x$ 週期為 2π

$\therefore$ 原式週期為 $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$

(4) $\because$ $\cos x$ 週期為 2π

$\therefore$ 原式週期為 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

2 老師講解　三角函數週期之變化　學生練習

某工廠使用交流電的電流強度 I（安培）與時間 t（秒）可用函數 $I=100\sin\left(100\pi t+\dfrac{5\pi}{6}\right)$ 表示，試求最大電流及電流強度變化的週期。

想法　$\sin x$ 週期為 2π，且 $|\sin x|\le 1$。

[答：最大電流為 100 安培，週期為 $\dfrac{1}{50}$ 秒]

解 $\because$ $\sin x$ 的最大值為 1

$\therefore$ $I=100\sin\left(100\pi t+\dfrac{5\pi}{6}\right)$

最大電流為 100 安培

且週期為 $\dfrac{2\pi}{100\pi}=\dfrac{1}{50}$（秒）

受到潮汐影響，設某港口的水深 y（公尺）與時間 t（小時）可用函數 $y=2\sin\dfrac{\pi}{6}t+8$ 表示。試求：

(1) $t=7$ 時的水深。

(2) 潮汐的週期。

[答：(1) 7 公尺　(2) 12 小時]

解 (1) 將 $t=7$ 代入 $y=2\sin\dfrac{\pi}{6}t+8$ 中

得 $y=2\sin\dfrac{7\pi}{6}+8=2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+8=7$

即 $t=7$（小時）時水深為 7 公尺

(2) 函數週期為 $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}=12$

所以潮汐的週期為 12 小時

3 老師講解　三角函數之大小關係　學生練習

設 $a=\sin 55^\circ$，$b=\cos 55^\circ$，$c=\tan 55^\circ$，試比較 a、b、c 的大小關係。

想法　當 $45^\circ<\theta<90^\circ$ 時，$1>\sin\theta>\cos\theta$。

[答：$c>a>b$]

解　$\because$　$a=\sin 55^\circ$

$b=\cos 55^\circ=\sin 35^\circ$

$c=\tan 55^\circ>\tan 45^\circ=1$

$\therefore$　$c>a>b$

設 $a=\tan 40^\circ$，$b=\sec 40^\circ$，$c=\csc 40^\circ$，試比較 a、b、c 的大小關係。

[答：$c>b>a$]

解　$\because$　$a=\tan 40^\circ<\tan 45^\circ=1$，$a$ 最小

$$b=\sec 40^\circ=\frac{1}{\cos 40^\circ}=\frac{1}{\sin 50^\circ}<\frac{1}{\sin 40^\circ}=c$$

$\therefore$　$c>b>a$

4 老師講解　解三角函數方程式　學生練習

若 $2\sin^2 x-5\sin x-3=0$，試求 $\sin x$。

想法　類比解二次方程式的技巧解三角函數方程式。

[答：$-\frac{1}{2}$]

解　對三角函數方程式進行十字交乘

原式 $=(2\sin x+1)(\sin x-3)=0$

$\Rightarrow$　$\sin x=-\frac{1}{2}$ 或 3（不合）

若 $8\cos^2 x+10\cos x-3=0$，試求 $\cos x$。

[答：$\frac{1}{4}$]

解　對三角函數方程式進行十字交乘

原式 $=(4\cos x-1)(2\cos x+3)=0$

$\Rightarrow$　$\cos x=\frac{1}{4}$ 或 $-\frac{3}{2}$（不合）

已知 $0 \le x < 2\pi$，試求函數 $y=\cos^2 x+2\sin x+3$ 的最大值與最小值。

想法 運用二次函數配方法求極值。

[答：最大值為 5，最小值為 1]

解 利用 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

將原函數改寫為

$y=(1-\sin^2 x)+2\sin x+3$

$=-\sin^2 x+2\sin x+4$

再利用配方法得

$y=-(\sin x-1)^2+5$

因為 $-1 \le \sin x \le 1$

當 $\sin x=1$ 時，最大值為 5

當 $\sin x=-1$ 時，

最小值為 $-(-1-1)^2+5=1$

設 $0 \le x < 2\pi$，若 $2\sin^2 x+\cos x$ 的最大值為 a，最小值為 b，試求 (a,b)。 【統測】

[答：$\left(\dfrac{17}{8},-1\right)$]

解 利用 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

將原函數改為

$y=2(1-\cos^2 x)+\cos x$

$=-2\left(\cos x-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{17}{8}$

當 $\cos x=\dfrac{1}{4}$ 時，最大值 $a=\dfrac{17}{8}$

當 $\cos x=-1$ 時，最小值 $b=-1$

故 $(a,b)=\left(\dfrac{17}{8},-1\right)$

2-4 段落測驗

★表難題

1. 函數 $f(x)=4\cos\left(\frac{3}{2}x+\pi\right)+1$ 的週期為 $\underline{\frac{4\pi}{3}}$。

2. 函數 $f(x)=\left|\cot\left(\frac{x}{2}+\pi\right)\right|+5$ 的週期為 $\underline{2\pi}$。

3. 將 $y=\sin x$ 的圖形，先沿水平方向壓縮為原來的 $\frac{1}{4}$ 倍，再向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 單位，然後向下平移 3 單位，則新函數圖形之週期為 $\underline{\frac{\pi}{2}}$。

4. 有一彈簧綁鉛塊，距離平衡點的位移 y（公分）與時間 t（秒）可用函數 $y=5\cos\left(\pi t+\frac{2\pi}{5}\right)$ 表示，則最大位移為 $\underline{5}$ 公分，振動一次所需要的時間為 $\underline{2}$ 秒。

5. 設 $a=\sin 40^\circ$，$b=\cos 70^\circ$，$c=\tan 50^\circ$，$d=\cot 35^\circ$，則 a、b、c、d 的大小為 $\underline{b<a<c<d}$。

6. 若 $3\sec^2 x-11\sec x-4=0$，則 $\sec x=\underline{4}$。

7. 已知 $0\le x<2\pi$，則方程式 $2\cos^2 x-3\cos x+1=0$ 之解為 $\underline{0、\frac{\pi}{3}或\frac{5\pi}{3}}$。

★ 8. 已知 $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{5\pi}{6}$，則函數 $y=\cos^2 x+\sin x-1$ 的最大值為 $\underline{\frac{1}{4}}$，最小值為 $\underline{0}$。

9. 若 θ 為一銳角，且 $a=\sin\frac{\theta}{3}$，$b=\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{\pi}{2}\right)$，$c=\tan\frac{\theta}{3}$，試比較 a、b、c 大小。
$\underline{b<a<c}$　【統測】

10. 設 $0\le\theta\le\pi$，且 $2\sin^2\theta+11\cos\theta-7=0$，則 $\theta=\underline{\frac{\pi}{3}}$。　【統測】

2-4 高手過招

1. 若 $f(x)=\sec^2\frac{x}{2}+\csc^2\frac{x}{2}$ 的週期為 P，則 P 之值為 $\underline{\pi}$。
（提示：$\sin 2x=2\sin x\cos x$）　【105(C)】

2-5 》正弦定理與餘弦定理

重點一　正弦定理

1. $\triangle ABC$ 之面積 $=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ 。

2. 正弦定理：

$\triangle ABC$ 中，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，其中 R 為 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑。

推論：$\sin A：\sin B：\sin C=a：b：c$。

1　老師講解　利用正弦定理求外接圓半徑　學生練習

等腰 $\triangle ABC$ 中，$a=8$，$\angle B=\angle C=75^\circ$，試求 $\triangle ABC$ 之外接圓半徑 R 之值。

想法　正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$。

[答：8]

解　$\angle A=180^\circ-\angle B-\angle C$

$=180^\circ-75^\circ-75^\circ$

$=30^\circ$

由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=2R$

$\Rightarrow\ \dfrac{8}{\sin 30^\circ}=\dfrac{8}{\frac{1}{2}}=2R$

$\Rightarrow\ R=8$

$\triangle ABC$ 中，$c=12$，$\sin C=\dfrac{3}{5}$，試求 $\triangle ABC$ 之外接圓半徑 R 之值。

[答：10]

解　由正弦定理 $\dfrac{c}{\sin C}=2R$

$\Rightarrow\ \dfrac{12}{\sin C}=\dfrac{12}{\frac{3}{5}}=2R$

$\Rightarrow\ R=10$

2 老師講解　利用正弦定理求三內角之正弦比　學生練習

設 $\triangle ABC$ 之三邊長為 a、b、c，若 $(b+c):(c+a):(a+b)=5:6:7$，試求 $\sin A:\sin B:\sin C$。

想法　正弦定理之推論：
$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$。

[答：4：3：2]

解　令 $b+c=5k\cdots\cdots①$

$c+a=6k\cdots\cdots②$

$a+b=7k\cdots\cdots③$

$\dfrac{①+②+③}{2}\Rightarrow a+b+c=9k$

分別代回 ①②③ 得 $a=4k$，$b=3k$，$c=2k$

$\Rightarrow a:b:c=4:3:2$

$\therefore \sin A:\sin B:\sin C=4:3:2$

$\triangle ABC$ 中，若 $(a+b):(b+c):(c+a)=11:9:12$，試求 $\sin A:\sin B:\sin C$。

[答：7：4：5]

解　令 $a+b=11k\cdots\cdots①$

$b+c=9k\cdots\cdots②$

$c+a=12k\cdots\cdots③$

$\dfrac{①+②+③}{2}\Rightarrow a+b+c=16k$

分別代回 ①②③ 得 $c=5k$，$b=4k$，$a=7k$

$\Rightarrow a:b:c=7:4:5$

$\therefore \sin A:\sin B:\sin C=7:4:5$

3 老師講解　利用正弦定理求三內角之正弦比　學生練習

$\triangle ABC$ 中，若 $2a+b-5c=0$，$6a-4b-c=0$，試求 $\sin A:\sin B:\sin C$。

想法　正弦定理之推論：
$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$。

[答：3：4：2]

解　$\begin{cases}2a+b-5c=0\cdots\cdots①\\6a-4b-c=0\cdots\cdots②\end{cases}$

$①\times4+②\Rightarrow a=\dfrac{3}{2}c$

代回 ① 得 $b=2c$

故 $\sin A:\sin B:\sin C$

$=a:b:c$

$=\dfrac{3}{2}c:2c:c$

$=3:4:2$

$\triangle ABC$ 中，若 $(a-2b+2c)^2+(a+2b-3c)^2=0$，試求 $\sin A:\sin B:\sin C$。

[答：2：5：4]

解　$\begin{cases}a-2b+2c=0\cdots\cdots①\\a+2b-3c=0\cdots\cdots②\end{cases}$

$②-①\Rightarrow b=\dfrac{5}{4}c$

代回 ① 得 $a=\dfrac{1}{2}c$

故 $\sin A:\sin B:\sin C$

$=a:b:c$

$=\dfrac{1}{2}c:\dfrac{5}{4}c:c$

$=2:5:4$

重點二 餘弦定理

1. $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 或 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$。

2. $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ 或 $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$。

3. $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ 或 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$。

觀念補充 //

$\triangle ABC$ 中，若 c 為最大邊：

❶ $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}>0$，得 $c^2<a^2+b^2$ $\Leftrightarrow$ 銳角三角形。

❷ $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=0$，得 $c^2=a^2+b^2$ $\Leftrightarrow$ 直角三角形（即畢氏定理）。

❸ $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0$，得 $c^2>a^2+b^2$ $\Leftrightarrow$ 鈍角三角形。

4 老師講解　已知三邊比求角度　學生練習

$\triangle ABC$ 中，$a:b:c=3:2:\sqrt{7}$，試求 $\angle C$。

想法　餘弦定理：$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$。

[答：60°]

解　令 $a=3t$，$b=2t$，$c=\sqrt{7}t$

由餘弦定理

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(3t)^2+(2t)^2-(\sqrt{7}t)^2}{2\times 3t\times 2t}=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow\ \angle C=60^\circ$

$\triangle ABC$ 中，$a:b:c=2:3:4$，試求 $\cos A$。

[答：$\dfrac{7}{8}$]

解　令 $a=2t$，$b=3t$，$c=4t$

由餘弦定理

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(3t)^2+(4t)^2-(2t)^2}{2\times 3t\times 4t}=\frac{7}{8}$$

5 老師講解　利用餘弦定理求第三邊　學生練習

在 $\triangle ABC$ 中，若 $b=5$，$c=3$，$\angle A=60^\circ$，試求 a。

想法　餘弦定理：$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$。

[答：$\sqrt{19}$]

解　由餘弦定理

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{25+9-a^2}{30}$$

$$\Rightarrow a=\sqrt{19}$$

在 $\triangle ABC$ 中，若 $a=3$，$b=5$，$\angle C=120^\circ$，試求 c。

[答：7]

解　由餘弦定理

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}=\frac{9+25-c^2}{30}$$

$$\Rightarrow c=7$$

★表難題

★ 6 老師講解　由三邊長關係式求角度　學生練習

$\triangle ABC$ 中，若 $b^2-(c-a)^2=ac$，試求 $\angle B$。

想法　餘弦定理：$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$。

[答：60°]

解　原式 $\Rightarrow b^2-\left(c^2-2ac+a^2\right)=ac$

$\Rightarrow a^2+c^2-b^2=ac$

代入 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{ac}{2ac}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \angle B=60^\circ$

$\triangle ABC$ 中，若 $(a+b+c)(b+c-a)=3bc$，試求 $\angle A$。

[答：60°]

解　原式 $\Rightarrow \left[(b+c)+a\right]\left[(b+c)-a\right]=3bc$

$\Rightarrow (b+c)^2-a^2=3bc$

$\Rightarrow b^2+c^2-a^2=bc$

代入 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{bc}{2bc}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \angle A=60^\circ$

重點三 解三角形

三角形的三內角與三邊長合稱三角形的六要素，若已知其中三要素，欲求其餘三要素，稱為解三角形。

觀念補充 //

❶ 若題目給「角」條件多於「邊」，例如：AAS 型或 ASA 型 $\Rightarrow$ 利用正弦定理。

❷ 若題目給「邊」條件多於「角」，例如：SAS 型或 SSS 型 $\Rightarrow$ 利用餘弦定理。

❸ 若題目給一組對角對邊，例如：SSA 型 $\Rightarrow$ 利用正弦定理。
但因平面幾何並無 SSA 全等性質，因此無法確定唯一三角形，故其結果可能有兩解、一解或無解。

7 已知一組對角對邊解三角形

老師講解

$\triangle ABC$ 中，$a=15$，$b=5\sqrt{6}$，$\angle A=60^\circ$，試求 $\angle B$ 與 $\angle C$。

想法 給一組對角對邊 $\angle A$ 及 a，利用正弦定理。

[答：$\angle B=45^\circ$，$\angle C=75^\circ$]

解 給一組對角對邊角 A 及 a

由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

$\Rightarrow \dfrac{15}{\sin 60^\circ}=\dfrac{5\sqrt{6}}{\sin B}$

$\Rightarrow \sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \angle B=45^\circ$ 或 135°（不合）

$\angle C=180^\circ-60^\circ-45^\circ=75^\circ$

學生練習

$\triangle ABC$ 中，若 $a=3\sqrt{3}$，$\angle A=30^\circ$，$b=6\sqrt{3}$，試求 $\angle C$ 及 c。

[答：$\angle C=60^\circ$，$c=9$]

解 給一組對角對邊角 A 及 a

由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

$\Rightarrow \dfrac{3\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}=\dfrac{6\sqrt{3}}{\sin B}$

$\Rightarrow \sin B=1$

$\therefore \angle B=90^\circ$

$\angle C=180^\circ-30^\circ-90^\circ=60^\circ$

$\dfrac{c}{\sin 60^\circ}=\dfrac{6\sqrt{3}}{\sin 90^\circ} \Rightarrow c=9$

8 老師講解　**已知三邊長解三角形**　學生練習

在 $\triangle ABC$ 中，$a=\sqrt{2}$，$b=2$，$c=\sqrt{3}-1$，試求 $\angle B$ 及 $\angle A$。

想法 給三邊長（SSS），利用餘弦定理。

[答：$\angle B=135^\circ$，$\angle A=30^\circ$]

解 由餘弦定理

$$\cos B=\frac{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-1)^2-2^2}{2\times\sqrt{2}\times(\sqrt{3}-1)}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow\ \angle B=135^\circ$

再利用正弦定理 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sin A}=\dfrac{2}{\sin 135^\circ}$

$\Rightarrow\ \sin A=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow\ \angle A=30^\circ$

$\triangle ABC$ 中，$\overline{BC}=4$，$\overline{AC}=6$，$\overline{AB}=2\sqrt{7}$，試求 $\angle C$ 與 $\sin A$。

[答：$\angle C=60^\circ$，$\sin A=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$]

解 由餘弦定理

$$\cos C=\frac{4^2+6^2-(2\sqrt{7})^2}{2\times4\times6}=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow\ \angle C=60^\circ$

再利用正弦定理 $\dfrac{4}{\sin A}=\dfrac{2\sqrt{7}}{\sin 60^\circ}$

$\Rightarrow\ \sin A=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

重點四　三角形面積之求法

Δ 表 $\triangle ABC$ 之面積

1. 給兩邊夾一角：

$$\Delta=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C\text{。}$$

2. 給三邊長：

海龍公式，令 $s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$，則 $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$。

9 老師講解 兩邊夾一角求三角形面積 學生練習

$\triangle ABC$ 中，$\overline{AC}=2$，$\overline{BC}=2\sqrt{3}$，$\angle A=120^\circ$，試求 $\angle C$ 與 $\triangle ABC$ 之面積。

想法 $\triangle ABC$ 面積 $=\dfrac{1}{2}ab\sin C$。

[答：$\angle C=30^\circ$，面積為 $\sqrt{3}$ 平方單位]

解 由正弦定理 $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}=\dfrac{2}{\sin B}$

$\Rightarrow\ \sin B=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \angle B=30^\circ$ 或 150°（不合）

$\angle C=180^\circ-120^\circ-30^\circ=30^\circ$

$\Delta=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}\sin 30^\circ$

$=\sqrt{3}$（平方單位）

在 $\triangle ABC$ 中，已知 $c=5$，$b=8$，$\angle A=60^\circ$，試求 a 與 $\triangle ABC$ 之面積。

[答：$a=7$，面積為 $10\sqrt{3}$ 平方單位]

解 由餘弦定理

$\cos 60^\circ=\dfrac{25+64-a^2}{2\times5\times8}$

$\Rightarrow\ a=7$

$\Delta=\dfrac{1}{2}\times5\times8\sin 60^\circ$

$=20\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=10\sqrt{3}$（平方單位）

10 老師講解 海龍公式求三角形面積 學生練習

$\triangle ABC$ 之三邊長分別為 4、7、9， 試求 $\triangle ABC$ 之面積。

想法 海龍公式 $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$。

[答：$6\sqrt{5}$ 平方單位]

解 $s=\dfrac{4+7+9}{2}=10$，利用海龍公式

$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=\sqrt{10(10-4)(10-7)(10-9)}$

$=6\sqrt{5}$（平方單位）

$\triangle ABC$ 中，$a=5$，$b=6$，$c=7$，試求 $\triangle ABC$ 之面積。

[答：$6\sqrt{6}$ 平方單位]

解 $s=\dfrac{5+6+7}{2}=9$，利用海龍公式

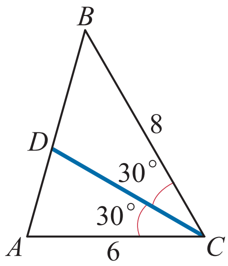
$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=\sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}$

$=6\sqrt{6}$（平方單位）

11 老師講解 已知兩邊夾一角求內角平分線長 學生練習

如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AC}=6$，$\overline{BC}=8$，且 $\angle C=60^\circ$，若 $\angle C$ 的角平分線交 $\overline{AB}$ 於 D，試求 $\overline{CD}$。



想法 $\Delta=\frac{1}{2}ab\sin C$。

[答：$\frac{24\sqrt{3}}{7}$]

解 令 $\overline{CD}=x$

$\angle ACD=\angle BCD=30^\circ$

$\triangle ABC$ 面積 $=\triangle ACD$ 面積 $+\triangle BCD$ 面積

$\Rightarrow \frac{1}{2}\times 6\times 8\times\sin 60^\circ$

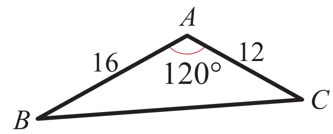
$=\frac{1}{2}\times 6\times x\times\sin 30^\circ+\frac{1}{2}\times x\times 8\times\sin 30^\circ$

$\Rightarrow 48\sqrt{3}=6x+8x$

$\Rightarrow x=\frac{24}{7}\sqrt{3}$

故 $\overline{CD}=\frac{24\sqrt{3}}{7}$

如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=16$，$\overline{AC}=12$，且 $\angle BAC=120^\circ$，若 $\angle A$ 的角平分線交 $\overline{BC}$ 邊於 D，試求 $\overline{AD}$。



[答：$\frac{48}{7}$]

解 令 $\overline{AD}=x$

$\angle BAD=\angle CAD=60^\circ$

$\triangle ABC$ 面積 $=\triangle ABD$ 面積 $+\triangle ACD$ 面積

$\Rightarrow \frac{1}{2}\times 16\times 12\times\sin 120^\circ$

$=\frac{1}{2}\times 16\times x\times\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\times x\times 12\times\sin 60^\circ$

$\Rightarrow 192=16x+12x$

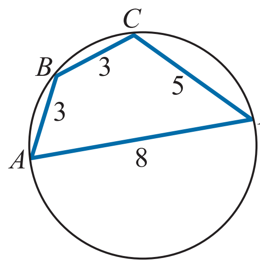
$\Rightarrow x=\frac{48}{7}$

故 $\overline{AD}=\frac{48}{7}$

進階例題

12 老師講解 求圓內接四邊形之對角線長 學生練習

如圖，圓內接四邊形 $ABCD$ 中，
$\overline{AB}=\overline{BC}=3$，$\overline{CD}=5$，$\overline{DA}=8$，試求：
(1) $\cos A$ (2) $\overline{BD}$

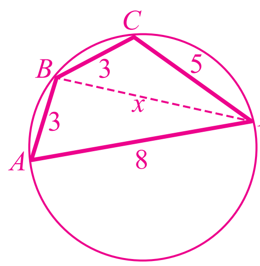


[答：(1) $\frac{1}{2}$ (2) 7]

解 (1) 因圓內接四邊形之對角互補

得 $\angle C=180^\circ-\angle A$

如圖，設 $\overline{BD}=x$，觀察 $\triangle ABD$ 與 $\triangle BCD$



利用餘弦定理

$$x^2=3^2+8^2-2\times3\times8\cos A$$
$$=3^2+5^2-2\times3\times5\cos(180^\circ-\angle A)$$

$\Rightarrow$ $78\cos A=39$

$\Rightarrow$ $\cos A=\frac{1}{2}$

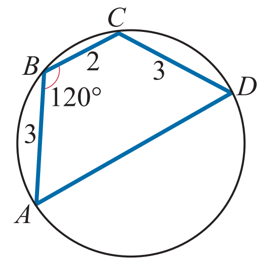
(2) 觀察 $\triangle ABD$，利用餘弦定理

$$x^2=3^2+8^2-2\times3\times8\times\frac{1}{2}=49$$

$\Rightarrow$ $x=7$

故 $\overline{BD}=7$

圓內接四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=3$，
$\overline{BC}=2$，$\overline{CD}=3$，$\angle ABC=120^\circ$，
試求 $\overline{AD}$。

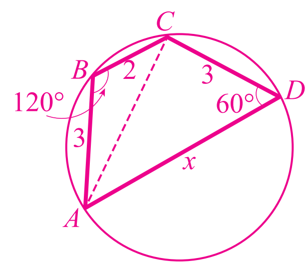


[答：5]

解 因圓內接四邊形之對角互補

得 $\angle CDA=180^\circ-\angle ABC=60^\circ$

如圖，設 $\overline{AD}=x$，觀察 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ACD$



利用餘弦定理

$$\overline{AC}^2=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos120^\circ$$
$$=3^2+x^2-2\times3\times x\times\cos60^\circ$$

$\Rightarrow$ $x^2-3x-10=0$

$\Rightarrow$ $(x-5)(x+2)=0$

$\Rightarrow$ $x=5$ 或 -2（不合）

故 $\overline{AD}=5$

13 老師講解　已知三邊長求外接圓與內切圓半徑　學生練習

已知甲、乙、丙三家機車行兩兩相距 35、40 與 45 公尺，今欲設置一電動機車電池充電站，且充電站到三家距離相等，試問此距離為何？（輔助公式：$\Delta=\dfrac{abc}{4R}=rs$，其中 R 與 r 分別為三角形的外接圓與內切圓半徑）

[答：$\dfrac{21\sqrt{5}}{2}$ 公尺]

解　設充電站位置是以甲、乙、丙為頂點的三角形之外接圓圓心

此距離正是外接圓半徑，設為 R

由 $s=\dfrac{35+40+45}{2}=60$，代海龍公式

$$\begin{aligned}\Delta&=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\\&=\sqrt{60\times(60-35)\times(60-40)\times(60-45)}\\&=\sqrt{60\times25\times20\times15}\\&=300\sqrt{5}\end{aligned}$$

故 $300\sqrt{5}=\dfrac{abc}{4R}=\dfrac{35\times40\times45}{4R}$

$\Rightarrow\ R=\dfrac{21\sqrt{5}}{2}$（公尺）

$\triangle ABC$ 之三邊長分別為 7、8、13，試求外接圓半徑與內切圓半徑之乘積。

[答：13]

解　由 $s=\dfrac{7+8+13}{2}=14$

因 $\Delta=\dfrac{abc}{4R}=rs$

則 $R\times r=\dfrac{abc}{4s}=\dfrac{7\times8\times13}{4\times14}=13$

C

2

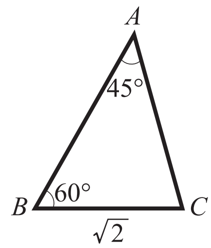
2-5 段落測驗

★表難題

1. $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle B = 75^\circ$，$\angle C = 60^\circ$ 且 $a = 8$，則 $\triangle ABC$ 之外接圓半徑為 $\underline{\;4\sqrt{2}\;}$。

2. $\triangle ABC$ 中，$a - 2b + c = 0$ 且 $3a + b - 2c = 0$，則 $\sin A : \sin B : \sin C =$ $\underline{\;3:5:7\;}$。

3. 如圖，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A = 45^\circ$，$\angle B = 60^\circ$，$\overline{BC} = \sqrt{2}$，則 $\overline{AB} =$ $\underline{\;\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\;}$。（$\sin 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$）



4. $\triangle ABC$ 中，$b = 4$，$c = \sqrt{2}$，$\angle A = 45^\circ$，則 $a =$ $\underline{\;\sqrt{10}\;}$。

5. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 30^\circ$，$a = 5\sqrt{3}$，$b = 10$，則 $\angle B =$ $\underline{\;90^\circ\;}$。

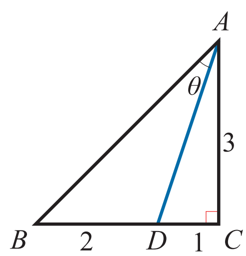
6. 設 $\triangle ABC$ 中，$c = 2$，$b = 1 + \sqrt{3}$，$\angle A = 30^\circ$，則 $\overline{BC} =$ $\underline{\;\sqrt{2}\;}$。

7. 已知 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AC} = 6$，$\overline{BC} = 2\sqrt{3}$，$\angle A = 30^\circ$，$\angle B > 90^\circ$，則 $\triangle ABC$ 之面積為 $\underline{\;3\sqrt{3}\;}$ 平方單位。【統測】

8. $\triangle ABC$ 中，若 $\overline{BC} = \sqrt{13}$，$\overline{AC} = 3$，$\angle A = 60^\circ$，則 $\cos C$ 之值為 $\underline{\;\dfrac{1}{\sqrt{13}}\;}$。【統測】

9. 三角形 $\triangle_1$ 的三邊長為 8、7、5，面積為 x；三角形 $\triangle_2$ 的三邊長為 8、6、6，面積為 y；三角形 $\triangle_3$ 的三邊長為 9、7、4，面積為 z，下列何者正確？$\underline{\;C\;}$
(A) $y < z$　(B) $x < z$　(C) $x < y$　(D) $x + y + z = \sqrt{800}$。【統測】

★10. 已知 $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90^\circ$，D 在 $\overline{BC}$ 線段上，且線段長 $\overline{BD} = 2$，$\overline{DC} = 1$，$\overline{AC} = 3$，如圖所示。令 $\angle BAD = \theta$，求 $\cos\theta =$ $\underline{\;\dfrac{2}{\sqrt{5}}\;}$。【統測】



11. 設 $\triangle ABC$ 三邊之對應高分別為 $h_a = 6$，$h_b = 4$，$h_c = 3$，則最小角之餘弦值為 $\underline{\;\dfrac{7}{8}\;}$。

2-5 高手過招

1. 梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD} \mathbin{/\!/} \overline{BC}$，已知 $\overline{AD} = 4$，$\overline{BC} = 10$，$\overline{AB} = 5$，$\overline{CD} = 7$，則梯形 $ABCD$ 面積為 $\underline{\;14\sqrt{6}\;}$ 平方單位。

CH 2 素養練功坊

題目

百慕達三角洲所在附近的海域，傳言經常有失蹤的船隻和飛機。為了解真相，一般海底偵查船搜尋了一段時間，從一沉船上撈起一只手錶，僅有鏽蝕的時針痕跡及 12 點的刻度存在。研究員利用直尺測量得，手錶中心點與 12 點的距離為 5 ；鏽蝕的時針長度為 3，而 12 點與時針尖端的距離為 7。試問利用上述線索，還原分析該手錶停止的時間為何？

關　鍵　字　手錶中心點與 12 點的距離為 5

時針長度為 3，而 12 點與時針尖端的距離為 7

單 元 公 式　$\triangle ABC$ 中， $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

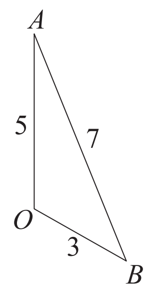
翻譯成數學式　$\triangle AOB$ 中，已知 $\overline{OA} = 5$，$\overline{OB} = 3$，$\overline{AB} = 7$，試求 $\angle AOB =$ ？

解 題

依題意，條件給三邊長欲求夾角

解題思路自然是從餘弦定理著手

繪圖如右，我們利用餘弦定理



在公式中代入三邊長得 $\cos\angle AOB = \dfrac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 3} = -\dfrac{1}{2}$

可求出 $\angle AOB = 120^\circ$

即鏽蝕時針的痕跡與 12 點方向之間的夾角為 120°

因為手錶一大格為 $\dfrac{360^\circ}{12} = 30^\circ$

所以鏽蝕時針所指方向為 4 點鐘方向

推測手錶停於 4 點整

● **回顧：**給邊找角，給角找邊，是解三角形考題的標準模式，在三角學中有很豐富的幾何性質，其中畢氏定理與正、餘弦定理更是佔有核心的地位。概括來看這題，是為檢測同學對餘弦定理的理解力與掌握度，透由解題的思索過程，幫助我們尋找數與形中不變的規律。

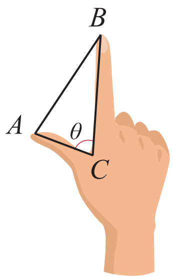
CH 2 素養競技場

★表難題

1. 手動機械錶是經由上緊錶內發條，藉由發條系統釋放的彈力位能來啟動手錶的計時功能。這些過程都需藉由機械原理來完成，一般上緊的發條約可使手錶行走 30 多小時。小志喜歡研究機械錶內部齒輪的轉動鏈結指針的擺動，某日他被問及一個關於指針轉動角度的問題：假設分針原始指在時鐘 12 的位置，現將分針依順時針的方向轉了 2019°。試求分針應指在哪兩個數字之間？

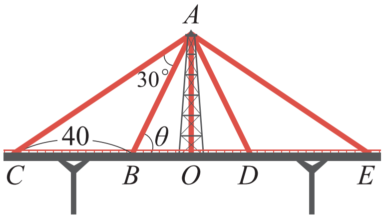
答：7 與 8 之間

2. 如果手邊沒有現成的量尺，小米會利用右手食指與拇指伸直來充當丈量鞋號尺寸的工具，右圖是她右手食指與拇指伸直，虎口張開 θ 時的手指形狀。已知小米的手指相關部分長度，$\overline{BC}=15$ 公分，$\overline{AC}=8$ 公分。若已知虎口張開的角度 $\theta=60^\circ$，試求 $\overline{AB}$ 的長度。



答：13 公分

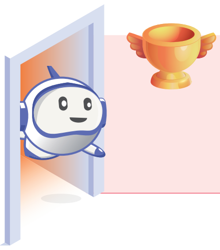
3. 設有一座鐵橋，如圖，是由 4 條粗鋼索及中央橋柱 $\overline{AO}$ 所構成。已知 $\overline{BC}=40$ 公尺，$\angle BAC=30^\circ$，而另一條鋼索 $\overline{AB}$ 與橋面成 θ 角，且 $\sin\theta=0.9$，試求鋼索 $\overline{AC}$ 之長度為何？



答：72 公尺

4. 迴力鏢是一種利用空氣動力學原理，擲出後仍可以飛回來的器具，如圖所示。今小武想使用厚紙板製作一個勾形迴力鏢，已知一邊長為 15 cm，另一邊長為 25 cm，且兩邊夾角為 120°，試求此迴力鏢之勾形頂端到手持之最尾端的直線距離為何？

答：35 cm



高三人的承擔

面對危機，才知英雄無幾。人生沒有永遠的勝利，只有不斷努力，觀念改變、行動改變，命運就會改變。

統測解題影音

★表難題

(C) 1. 下列何者**錯誤**？

(A) $y=|\sin 2x|$之週期為$\dfrac{\pi}{2}$ (B) $y=3\sin x$ 之週期為 2π

(C) $y=\cos 2x$ 之週期為$\dfrac{\pi}{2}$ (D) $y=4\cos x$ 之週期為 2π。 【111(C)】

(C) 2. 若$\triangle ABC$三邊長為 4、5、6，則其外接圓直徑為何？

(A) $\dfrac{8}{\sqrt{7}}$ (B) $\dfrac{12}{\sqrt{7}}$ (C) $\dfrac{16}{\sqrt{7}}$ (D) $\dfrac{20}{\sqrt{7}}$。 【111(C)】

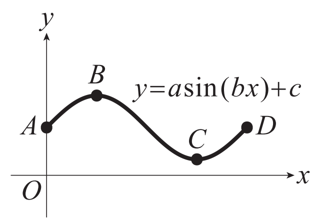
(D) 3. 已知$\triangle ABC$的面積為$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，其中$\overline{AB}=3$、$\overline{AC}=2$，且$\angle BAC$為鈍角。若$\overline{BC}$的長度為a，則$a^2=$？

(A) $13-6\sqrt{2}$ (B) $13-2\sqrt{6}$ (C) $13+2\sqrt{6}$ (D) $13+6\sqrt{2}$。 【111(C)】

(D) 4. 若$P(-99,87)$是標準位置角θ終邊上的點，則點$Q(5\sin\theta-6\cos\theta,7\cos\theta+8\tan\theta)$落在第幾象限？

(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限。 【111(B)】

(C) 5. 甲生在某次實驗中描繪出右圖，是 $y=a\sin(bx)+c$，$0\le x\le 4\pi$ 的曲線圖形，圖中所示 A、B、C、D 四點分別是左端點、最高點、最低點、右端點。若它們的坐標分別為 $A(0,3)$、$B(\pi,5)$、$C(3\pi,1)$、$D(4\pi,3)$，則 $a+2b+c=$？



(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7。 【111(B)】

(B) 6. 若$\tan\theta+\sec\theta=5$，則$\tan\theta-\sec\theta=$？

(A) $-\dfrac{3}{5}$ (B) $-\dfrac{1}{5}$ (C) $\dfrac{1}{5}$ (D) $\dfrac{3}{5}$。 【110(C)】

(D) 7. 已知$\triangle ABC$中，a、b、c分別為$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$之對邊長。若$ab:bc:ca=3:4:6$，則$\sin A:\sin B:\sin C=$？

(A) 4：3：2 (B) 4：2：3 (C) 2：3：4 (D) 3：2：4。 【110(C)】

(C) 8. 下列敘述何者正確？

(A) $y=\tan\dfrac{\theta}{3}$的週期為$\dfrac{\pi}{3}$

(B) $\tan^2\theta-\sec^2\theta=1$

(C) $-\sqrt{2}\le\sin\theta+\cos\theta\le\sqrt{2}$

(D) 若$\cos\theta=\sin\theta$，則$\theta=\dfrac{\pi}{4}+2n\pi$，其中$n$為整數。 【110(C)】

(B) 9. 已知 $\tan\theta=\dfrac{7}{25}$。若 $\sin\theta\cos\theta=a$，則下列何者正確？

(A) $\dfrac{1}{2}<a<1$ (B) $0<a<\dfrac{1}{2}$ (C) $-\dfrac{1}{2}<a<0$ (D) $-1<a<-\dfrac{1}{2}$。 【110(B)】

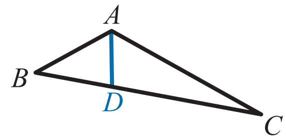
(A) 10. 若 $a=\tan480^\circ$，$b=\sec135^\circ$，$c=\cos(-60^\circ)$，則下列有序數對何者在第二象限？

(A) (b,c) (B) (a,b) (C) (c,a) (D) (c,b)。 【109(C)】

★(A) 11. 設函數 $f(x)=2\cos3x-1$，$x\in[0,2\pi]$，若其圖形和 x 軸的交點個數與函數的最大值分別為 a、b，則 $ab=$

(A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 18。 【109(C)】

(C) 12. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A$ 之內角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D， 其中 $\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=6$，且 $\angle A=120^\circ$，如圖，則 $\overline{CD}=$ ？



(A) $\sqrt{26}$ (B) $3\sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{7}$ (D) $\sqrt{7}$。 【109(C)】

(D) 13. 已知扇形的面積為 1 且其周長為 5，試問此扇形的半徑為何？

(A) $\dfrac{2}{5}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2。 【108(C)】

(D) 14. 若點 $P(x,y)$ 為有向角 θ 終邊上一點且 $xy\neq0$，則下列何者正確？

(A) $x\sin\theta>0$ (B) $y\cos\theta>0$ (C) $x\cot\theta>0$ (D) $y\csc\theta>0$。 【108(C)】

★(B) 15. $\cos0^\circ+\cos10^\circ+\cos20^\circ+\cos30^\circ+\cdots+\cos350^\circ+\cos360^\circ=$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3。 【107(C)】

(C) 16. 求 $\sin^2 18^\circ+\sin^2 36^\circ+\sin^2 54^\circ+\sin^2 72^\circ+\sin^2 90^\circ=$

(A) 2 (B) 2.5 (C) 3 (D) 3.5。 【106(C)】

★(A) 17. 若 $\tan\theta\csc\theta=-1+6\cos\theta$，其中 θ 為第三象限角，則 $\tan\theta=$

(A) $2\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $-\sqrt{3}$ (D) $-2\sqrt{2}$。 【106(C)】

(A) 18. 已知 A 點坐標為 $\left(\cos\dfrac{\pi}{6},\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$，$B$ 點坐標為 $\left(\cos\dfrac{11\pi}{6},\tan\dfrac{11\pi}{6}\right)$，則線段 $\overline{AB}$ 的長度為何？

(A) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$。 【106(B)】