全套複習策略

你的專屬教練

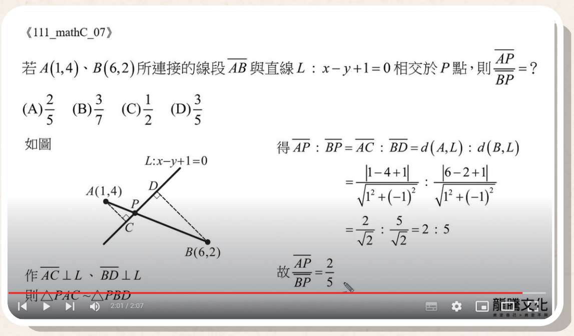
讓教練陪你一起征戰統測

82801

龍騰文化
肯定自己 ➤ 肯定不同

服務 1

完整教學影音，複習超效率

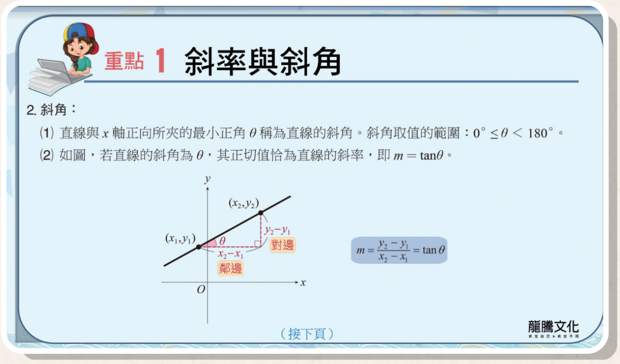


服務 2

歷屆試題解題影音，難題不求人

服務 3

數位公式卡，通勤隨手看



立馬掃描加入〈龍騰高中"聲"

全套複習策略

82801
龍騰文化
肯定自己 ➤ 肯定不同

作者說明每單元的關鍵重點，快速掌握單元核心能力

作者依題型提供完整解題策略，快速建立答題能力

作者全書錄製，可以依自身學習盲點加強突破

立馬掃描加入取得**影片清單**

編輯大意

本書所有重點與例題皆精心設計，編者融合近年來統測趨勢，反覆思索、比較、選擇適當的「題材」，「布題」方面以「由淺入深」、「循序漸進」的編寫原則來鋪陳設計，配合理論推演，不斷的檢視本書設計的「教學流程」，讓老師「輕鬆教」，學生「快樂學」，在統測的表現上也能「得高分」。鑑於每節的內容頗多，編者將每節內容又細分為數個主題，使教師便於掌控教學的進度，使學生能小範圍地一一攻掠。以下為本書特色：

希望本書的出版能夠幫助同學在學習上達到事半功倍的效果。編寫過程雖已盡心盡力，力求完美，但我們了解一本好書不管是從教學的適用性或學習的需求性來檢驗，一定是需要每一版不斷的改進、求新、求變。感謝各位教師多年來的支持與愛護，編者會不斷的改進與努力！謝謝！

柯著元 謹識

1 老師講解 認識數系 學生練習

判斷下列哪些是有理數：3.414，π，$\sqrt{4}$，$1.\overline{3}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$1-\sqrt{2}$，$\frac{6+3\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$。

想法 有理數包含了整數、有限小數與循環小數。

判斷下列哪些是有… $3.\overline{4}$，-1，$\frac{2}{7}$，…

老師講解、學生練習

老師講解、學生練習題目由淺入深，加強數學觀念與題型分析，完全掌握學習方向。

1-1 段落測驗　1-1 高手過招

1. 已知 $a=\frac{101}{103}$，$b=\frac{105}{107}$，$c=\frac{109}{111}$，則 a、b、c 之大小為______

段落測驗、高手過招

例題的相似或延伸，測驗同學吸收程度。

CH 1 素養練功坊

題目

已知在發光亮度相同的情況下，省電燈泡使用的電能為白熾燈的 $\frac{1}{5}$ 到 $\frac{1}{3}$，壽命則為其 8 到 10 倍。省電燈泡的單價雖比白熾燈貴，但由於其壽命長、耗電少，在其工作壽命中大約能省下其售價五倍的電費。假設某省電燈泡生產工廠，工廠估算當每日販賣 x 個省電燈泡時，其利潤函數為 $f(x)=x^2-58x-120$，試求欲使該工廠生產利潤大於零，其每日銷售燈泡數量至少應為多少個？

素養練功坊

帶領學生拆解素養題，養成情境素養題的解題能力。

CH 1 素養競技場

1. 小叡在天文網站上看到以下資訊：「利用北斗七星斗杓的天璇與天樞… 由天璇起始向天樞的方向延伸便可找到北極星，其中天樞與北極星的… 的 5 倍。」今小叡將所見的星空想像成一個坐標平面，其中天璇的坐… 標為 $(7,11)$。依上述資訊可以推得北極星的坐標為何？

素養競技場

新課綱重點，以貼近生活的命題素材，簡單好算又不失真實的數據設計，這裡的每一題都超「素養」。

CH 1 統測考古題

統測解題影音

(　　) 1. 公益文教基金會調查技術型高中三年級學生每天手機使用… 小時之間（含）。若 x（單位：小時）為其中一位參與調… 手機使用時間，且將上述使用時間範圍用 $|x-a|\le b$ 來表示… (A) 3.2　(B) 3.6　(C) 3.8　(D) 4.2。　【111(C)】

統測考古題

章末附有近年統測試題，以了解最新考題趨勢，讓同學在升學考中得心應手，是溫故知新的必讀單元。

目次

上冊

下冊

統測 趨勢分析

章節	名稱	108 課綱	99 課綱				合計
		111(C)	110(B)	109(C)	108(C)	107(C)	
1	坐標系與函數圖形	2	1	0	0	0	3
2	三角函數	3	2	3	2	2	12
3	平面向量	1	1	1	1	0	4
4	式的運算	2	3	2	2	2	11
5	直線與圓	2	2	2	2	3	11
6	數列與級數	1	1	1	1	1	5
7	排列組合	1	2	1	1	2	7
8	三角函數的應用	1	2	2	3	2	10
9	指數與對數	2	1	2	2	2	9
10	空間向量	2	1	1	0	1	5
11	一次聯立方程式與矩陣	2	1	1	1	1	6
12	二元一次不等式與線性規劃	1	0	1	1	1	4
13	二次曲線	1	2	1	2	0	6
14	微分	2	1	3	2	1	9
15	積分	2	3	1	2	3	11
	合計題數	25	23	22	22	21	113

1

坐標系與函數圖形

雲端教室

1-1 》實數與絕對值

課綱即時報	
新增	無理數運算、絕對值不等式、算幾不等式、二次函數利用配方法求極值
刪除	無

重點一 認識數系

1. **數系：**

(1) 正整數 $\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$，又稱自然數。

(2) 整數 $\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots,\pm n,\cdots\}$，整數包含了正整數、零與負整數。

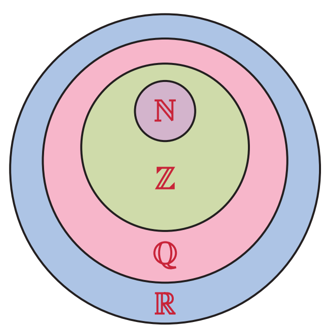
(3) 有理數 $\mathbb{Q}=\left\{\dfrac{q}{p}\middle|\, p\text{、}q\text{ 為整數，且 }p\neq0\right\}$，能化成分數者稱為有理數，有理數包含了整數、有限小數與循環小數。

(4) 無理數 $=\{x\mid x$ 是不能化成分數的數$\}$，例如：$\sqrt{2}$、π、$\log2$。

(5) 實數 $\mathbb{R}=\{x\mid x$ 為有理數或無理數$\}$。

(6) 數系形成的包含關係如圖所示。

- 實數（$\mathbb{R}$）
  - 有理數（$\mathbb{Q}$）
    - 整數（$\mathbb{Z}$）
      - 正整數（自然數）（$\mathbb{N}$）
      - 0（零）
      - 負整數
    - 分數（有限小數、循環小數）
  - 無理數（不循環的無限小數）



觀念補充 //

分母只含 2^m 或 5^n（m、n 為正整數）的最簡分數，必可化成有限小數，

例如：$\dfrac{3}{2}$、$\dfrac{7}{5}$、$\dfrac{11}{20}$ 等。

2. 循環小數化成分數：

(1) $0.\overline{a_1a_2\cdots a_n}=\dfrac{a_1a_2\cdots a_n}{99\cdots9}$（分母有 n 個 9），

例如：$0.\overline{29}=\dfrac{29}{99}$。

(2) $0.a_1a_2\cdots a_n\overline{b_1b_2\cdots b_m}=\dfrac{(a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_m)-(a_1a_2\cdots a_n)}{99\cdots900\cdots0}$（分母有 m 個 9，n 個 0），

例如：$0.2\overline{9}=\dfrac{29-2}{90}=\dfrac{27}{90}$。

3. 實數的性質：

設 a、b、$c\in\mathbb{R}$

(1) 三一律：$a>b$，$a=b$，$a<b$ 三者之中恰有一式成立。

(2) 遞移律：$a<b$ 且 $b<c \Rightarrow a<c$。

(3) 乘法律：

① 若 $c>0$ 且 $a<b \Leftrightarrow ac<bc$。

② 若 $c<0$ 且 $a<b \Leftrightarrow ac>bc$。（要變號）

(4) 若 $|a|<|b| \Leftrightarrow a^2<b^2$。

4. 絕對值概念：

a、$b\in\mathbb{R}$

(1) $\begin{cases}\text{若 } a\geq 0\text{，則 } |a|=a\text{。}\\ \text{若 } a<0\text{，則 } |a|=-a\text{。}\end{cases}$

(2) ① $|ab|=|a|\,|b|$；$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$（$b\neq 0$）。

② 設 $a\geq 0$，$x\in\mathbb{R}$，則 $\begin{cases}\text{當 } |x|\leq a \Leftrightarrow -a\leq x\leq a\\ \text{當 } |x|\geq a \Leftrightarrow x\geq a \text{ 或 } x\leq -a\end{cases}$。

觀念補充 //

❶ 對任意實數 a、b 恆有 $|a|+|b|\geq|a\pm b|\geq|a|-|b|$。

❷ 絕對值具對稱性，即 $a\leq x\leq b \Leftrightarrow \left|x-\dfrac{a+b}{2}\right|\leq\dfrac{b-a}{2}$，

例如：$1\leq x\leq 9$ 與 $|x-5|\leq 4$ 的數學意義相同。

1 老師講解　認識數系　學生練習

判斷下列哪些是有理數：3.414，π，$\sqrt{4}$，$1.\overline{3}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$1-\sqrt{2}$，$\dfrac{6+3\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$。

想法　有理數包含了整數、有限小數與循環小數。

[答：3.414，$\sqrt{4}$，$1.\overline{3}$，$\dfrac{6+3\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$]

解　能化成分數的有：

$3.414=3\dfrac{414}{1000}$；$\sqrt{4}=2$；$1.\overline{3}=1\dfrac{1}{3}$

$\dfrac{6+3\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\dfrac{3\left(2+\sqrt{3}\right)}{2+\sqrt{3}}=3$

共 4 個有理數

判斷下列哪些是有理數：0.38，$\sqrt{5}$，$3.\overline{4}$，-1，$\dfrac{2}{7}$，$\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$，$0$。

[答：0.38，$3.\overline{4}$，-1，$\dfrac{2}{7}$，0]

解　能化成分數的有：

$0.38=\dfrac{38}{100}$

$3.\overline{4}=3\dfrac{4}{9}$

-1；$\dfrac{2}{7}$；0

共 5 個有理數

2 老師講解　循環小數化成分數　學生練習

試求 $0.\overline{45}\times0.3\overline{6}$ 之值。

想法　循環小數化成分數公式：

$0.\overline{ab}=\dfrac{ab}{99}$，$0.a\overline{b}=\dfrac{ab-a}{90}$。

[答：$\dfrac{1}{6}$]

解　$0.\overline{45}=\dfrac{45}{99}$，$0.3\overline{6}=\dfrac{36-3}{90}=\dfrac{33}{90}$

$\therefore\ \dfrac{45}{99}\times\dfrac{33}{90}=\dfrac{1}{6}$

試求 $0.\overline{21}\times0.7\overline{3}$ 之值。

[答：$\dfrac{7}{45}$]

解　$0.\overline{21}=\dfrac{21}{99}$

$0.7\overline{3}=\dfrac{73-7}{90}=\dfrac{66}{90}$

$\therefore\ \dfrac{21}{99}\times\dfrac{66}{90}=\dfrac{7}{45}$

3 老師講解　絕對值方程式　學生練習

解絕對值方程式 $|3x+4|=10$。

想法　去絕對值首要注意正負符號，當 $|x|=a$，則 $x=\pm a$。

[答：$x=2$ 或 $x=-\dfrac{14}{3}$]

解　$|3x+4|=10$

$\Rightarrow$ $3x+4=10$ 或 $3x+4=-10$

$\Rightarrow$ $3x=6$ 或 $3x=-14$

$\Rightarrow$ $x=2$ 或 $x=-\dfrac{14}{3}$

解絕對值方程式 $|-2x-5|=7$。

[答：$x=1$ 或 $x=-6$]

解　原式即 $|2x+5|=7$

$\Rightarrow$ $2x+5=7$ 或 $2x+5=-7$

$\Rightarrow$ $2x=2$ 或 $2x=-12$

$\Rightarrow$ $x=1$ 或 $x=-6$

解不等式：

(1) $|x-3|<9$　(2) $|-2x-6|>9$

想法　絕對值不等式，
當 $|x|\le a \Leftrightarrow -a\le x\le a$；
當 $|x|\ge a \Leftrightarrow x\ge a$ 或 $x\le -a$。

[答：(1) $-6<x<12$　(2) $x>\frac{3}{2}$ 或 $x<-\frac{15}{2}$]

解 (1) $|x-3|<9$

$\Rightarrow -9<x-3<9$

$\Rightarrow -6<x<12$

(2) 原式即 $|2x+6|>9$

$\Rightarrow 2x+6>9$ 或 $2x+6<-9$

$\Rightarrow x>\frac{3}{2}$ 或 $x<-\frac{15}{2}$

解不等式：

(1) $|2x-1|<5$　(2) $|-x+4|>5$

[答：(1) $-2<x<3$　(2) $x>9$ 或 $x<-1$]

解 (1) $|2x-1|<5$

$\Rightarrow -5<2x-1<5$

$\Rightarrow -4<2x<6$

$\Rightarrow -2<x<3$

(2) 原式即 $|x-4|>5$

$\Rightarrow x-4>5$ 或 $x-4<-5$

$\Rightarrow x>9$ 或 $x<-1$

重點二　根式運算與算幾不等式

1. 根式的運算：

設 $a\ge 0$，$b\ge 0$

(1) $\sqrt{a^2}=|a|$

(2) $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

(3) $\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ （ $b\ne 0$ ）。

2. 算幾不等式：（算術平均數大於或等於幾何平均數）

當 $a\ge 0$，$b\ge 0$，則 $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$。等號成立條件 $\Leftrightarrow$ 當 $a=b$ 時。

觀念補充 //

算幾不等式之推廣：$\dfrac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}$。等號成立條件 $\Leftrightarrow$ 當 $a=b=c$。

5 老師講解　根式的四則運算　學生練習

化簡下列根式：

(1) $\sqrt{12}-\sqrt{48}+\sqrt{75}+\sqrt{243}$

(2) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)^2$

(3) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

想法　根式運算性質：

$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$，$\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$，

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$。

[答：(1) $12\sqrt{3}$　(2) $\sqrt{2}-1$　(3) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$]

解　(1) 原式化為最簡根式

$=2\sqrt{3}-4\sqrt{3}+5\sqrt{3}+9\sqrt{3}$

$=(2-4+5+9)\sqrt{3}=12\sqrt{3}$

(2) 原式 $=\left[(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)\right](\sqrt{2}-1)$

$=1\times(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}-1$

(3) 原式有理化 $=\dfrac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$

$=\dfrac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$

化簡下列根式：

(1) $\sqrt{20}+2\sqrt{45}-3\sqrt{80}$

(2) $(2+\sqrt{3})^2(2-\sqrt{3})$

(3) $\dfrac{7}{3-\sqrt{2}}$

[答：(1) $-4\sqrt{5}$　(2) $2+\sqrt{3}$　(3) $3+\sqrt{2}$]

解　(1) 原式化為最簡根式

$=2\sqrt{5}+6\sqrt{5}-12\sqrt{5}$

$=-4\sqrt{5}$

(2) 原式 $=\left[(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\right](2+\sqrt{3})$

$=1\times(2+\sqrt{3})$

$=2+\sqrt{3}$

(3) 原式有理化 $=\dfrac{7(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}$

$=\dfrac{7(3+\sqrt{2})}{7}$

$=3+\sqrt{2}$

6 老師講解　根式運算　學生練習

設 $2+\sqrt{3}$ 的小數部分為 x，則 $x+\dfrac{2}{x}=$？

想法　若無理數 $\sqrt{a}$ 的整數部分 $=n$，則 $\sqrt{a}$ 之小數部分表成 $\sqrt{a}-n$。

[答：$2\sqrt{3}$]

解　$\because$　$1<\sqrt{3}<2$　$\Rightarrow$　$3<2+\sqrt{3}<4$

$\therefore$　$2+\sqrt{3}$ 整數部分為 3

故小數部分 $x=(2+\sqrt{3})-3=\sqrt{3}-1$

$x+\dfrac{2}{x}=(\sqrt{3}-1)+\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$

$=(\sqrt{3}-1)+\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)=2\sqrt{3}$

若 $\sqrt{3}+1$ 的整數部分為 a，小數部分為 b，試求 $\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a+b}=$？

[答：1]

解　$\because$　$1<\sqrt{3}<2$　$\Rightarrow$　$2<\sqrt{3}+1<3$

$\therefore$　$\sqrt{3}+1$ 整數部分為 $a=2$

故小數部分 $b=(\sqrt{3}+1)-2=\sqrt{3}-1$

$\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a+b}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$

$=\dfrac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}-\dfrac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$

$=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}=1$

7 算幾不等式

老師講解

設 $x>0$，$y>0$，且 $2x+5y=20$，試求 xy 的最大值，並求此時的 x、y 之值。

想法 設 $a\ge 0$，$b\ge 0$，算幾不等式：$\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$，且當 $a=b$ 時等號成立。

[答：xy 最大值為 10，此時 $x=5$，$y=2$]

解 由算幾不等式：

$$\frac{2x+5y}{2}\ge\sqrt{(2x)(5y)}$$

$\Rightarrow\ \dfrac{20}{2}\ge\sqrt{10xy}$

$\Rightarrow\ 100\ge 10xy$

$\Rightarrow\ xy\le 10$

$\therefore\ xy$ 最大值為 10

且此時 $2x=5y=10$，即 $x=5$，$y=2$

學生練習

已知矩形的周長固定為 12，試求矩形的最大面積。

[答：9 平方單位]

解 設矩形邊長為 x、y，則周長 $=2(x+y)$

題意即 $x+y=6$，求 xy 之最大值

由算幾不等式：

$$\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}$$

$\Rightarrow\ 3\ge\sqrt{xy}$

$\Rightarrow\ 9\ge xy$

故最大面積為 9 平方單位

8 算幾不等式

老師講解

面積為 400 平方單位的任意矩形中，試求矩形的最短對角線。

想法 設 $a\ge 0$，$b\ge 0$，算幾不等式：$\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$，且當 $a=b$ 時等號成立。

[答：$20\sqrt{2}$]

解 設矩形邊長為 x、y，面積 $xy=400$

其對角線長度為 $\sqrt{x^2+y^2}$，則

$$\frac{x^2+y^2}{2}\ge\sqrt{x^2y^2}$$

$\Rightarrow\ x^2+y^2\ge 800$

$\Rightarrow\ \sqrt{x^2+y^2}\ge\sqrt{800}$

由算幾不等式可知

當 $x=y$，即 $x=y=20$ 時之對角線最短

此時對角線長度為

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{20^2+20^2}=\sqrt{800}=20\sqrt{2}$$

學生練習

設 a、b 為正數，且 $ab=3$，試求當 a、b 為何值時 $3a+4b$ 為最小，並求此最小值。

[答：當 $a=2$，$b=\dfrac{3}{2}$ 時產生最小值 12]

解 由算幾不等式：

$$\frac{3a+4b}{2}\ge\sqrt{3a\times 4b}$$

$\Rightarrow\ \dfrac{3a+4b}{2}\ge\sqrt{12ab}=\sqrt{36}=6$

$\Rightarrow\ 3a+4b\ge 12$

$\therefore\ 3a+4b$ 的最小值為 12

且當 $3a=4b=6$

即 $a=2$，$b=\dfrac{3}{2}$ 時產生最小值

進階例題

9　老師講解　算幾不等式　學生練習

設 a、b、c 為正數，若 $a+2b+3c=18$，試求 abc 的最大值。

[答：36]

解　算幾不等式推廣

$\because \dfrac{a+2b+3c}{3} \geq \sqrt[3]{a\times 2b\times 3c}$

$\Rightarrow \dfrac{18}{3} \geq \sqrt[3]{6abc}$

$\Rightarrow 6abc \leq \left(\dfrac{18}{3}\right)^3 = 216$

$\Rightarrow abc \leq 36$

$\therefore$ abc 的最大值為 36

設 x、y 均為正數，若 $x^2y=500$，試求 $x+y$ 的最小值。

[答：15]

解　算幾不等式推廣

$\because \dfrac{\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}+y}{3} \geq \sqrt[3]{\dfrac{x}{2}\times\dfrac{x}{2}\times y}$

$\Rightarrow \dfrac{x+y}{3} \geq \sqrt[3]{\dfrac{x^2y}{4}} = \sqrt[3]{\dfrac{500}{4}} = \sqrt[3]{125} = 5$

$\Rightarrow x+y \geq 15$

$\therefore$ $x+y$ 的最小值為 15

10　老師講解　算幾不等式　學生練習

若 $x>-2$，$g(x)=x+4+\dfrac{1}{x+2}$，試求 $g(x)$ 的最小值。

[答：4]

解　算幾不等式變化

$\because x>-2 \quad \therefore x+2>0$

由算幾不等式：

$\dfrac{(x+2)+\left(\dfrac{1}{x+2}\right)}{2} \geq \sqrt{(x+2)\times\left(\dfrac{1}{x+2}\right)} = 1$

$\Rightarrow x+2+\dfrac{1}{x+2} \geq 2$

因 $g(x)=x+2+\dfrac{1}{x+2}+2 \geq 2+2$

故 $g(x)\geq 4$，即最小值為 4

若 $x>1$，$g(x)=x+1+\dfrac{1}{x-1}$，試求 $g(x)$ 的最小值。

[答：4]

解　算幾不等式變化

$\because x>1 \quad \therefore x-1>0$

由算幾不等式：

$\dfrac{(x-1)+\left(\dfrac{1}{x-1}\right)}{2} \geq \sqrt{(x-1)\times\left(\dfrac{1}{x-1}\right)} = 1$

$\Rightarrow x-1+\dfrac{1}{x-1} \geq 2$

因 $g(x)=x-1+\dfrac{1}{x-1}+2 \geq 2+2$

故 $g(x)\geq 4$，即最小值為 4

1-1 段落測驗

★表難題

1. 已知 $a=\dfrac{101}{103}$，$b=\dfrac{105}{107}$，$c=\dfrac{109}{111}$，則 a、b、c 之大小為 $\underline{\quad a<b<c \quad}$。

2. $\dfrac{0.\overline{12}}{0.1\overline{3}}=\underline{\quad \dfrac{10}{11} \quad}$。

3. $\sqrt{27}+2\sqrt{75}-2\sqrt{108}=\underline{\quad \sqrt{3} \quad}$。

4. $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})=\underline{\quad 2\sqrt{2} \quad}$。

5. $\dfrac{1}{4-\sqrt{15}}+\dfrac{1}{4+\sqrt{15}}=\underline{\quad 8 \quad}$。

6. 若 $x>0$ 且 $\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{3}$，則 $x+\dfrac{1}{x}=\underline{\quad 5 \quad}$。【104(B)】

7. 有一長方形的長與寬分別為 a、b，若 $2a+b=12$，則此長方形的最大面積為 $\underline{\quad 18 \quad}$ 平方單位。

8. 已知 x、y 為正數，若 $xy=27$，則 $4x+3y$ 的最小值為 $\underline{\quad 36 \quad}$。

9. 滿足不等式 $|2x+3|>7$ 之解為 $\underline{\quad x>2 \text{ 或 } x<-5 \quad}$。

10. 不等式 $|3x-5|<9$ 的解為整數者共有 $\underline{\quad 6 \quad}$ 個。【統測】

1-1 高手過招

1. 設 $x=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$，則 x^2+y^2 之值為 $\underline{\quad 62 \quad}$。

2. 已知 x、y、z 均為正實數。若 x、y、z 滿足 $2x+3y+z=12$，試求：

   (1) xyz 的最大值為 $\underline{\quad \dfrac{32}{3} \quad}$。

   (2) x^2y^3z 的最大值為 $\underline{\quad 64 \quad}$。

   (3) xyz^2 最大值為 $\underline{\quad 54 \quad}$。

   (4) xy^2z 的最大值為 $\underline{\quad 18 \quad}$。【統測】

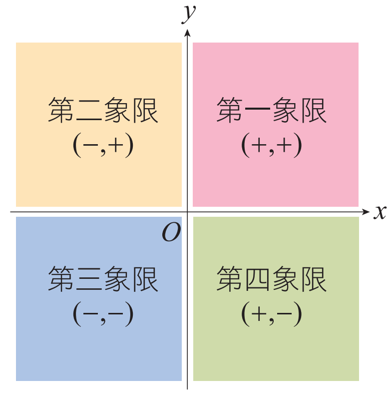
3. 若 $|2x-a|\le b$ 之解為 $-6\le x\le 5$，則 $a+b=\underline{\quad 10 \quad}$。

1-2 直角坐標系

重點一　坐標平面

1. 建立直角坐標系：

在平面上取兩條互相垂直的數線，讓兩線交於原點，其中水平數線為 x 軸，鉛直數線為 y 軸，x 軸方向（右正左負）及 y 軸方向（上正下負），如右圖，x 軸、y 軸將坐標平面切成四個象限。



2. 坐標符號：

(1) $P(x,y)$在第一象限　$\Leftrightarrow$　$x>0$，$y>0$，即$(+,+)$。

(2) $P(x,y)$在第二象限　$\Leftrightarrow$　$x<0$，$y>0$，即$(-,+)$。

(3) $P(x,y)$在第三象限　$\Leftrightarrow$　$x<0$，$y<0$，即$(-,-)$。

(4) $P(x,y)$在第四象限　$\Leftrightarrow$　$x>0$，$y<0$，即$(+,-)$。

3. 兩點的距離公式：

平面上兩點 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，其距離 $\overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$。

觀念補充 //

點 $P(a,b)$到 x 軸之距離為$|b|$，到 y 軸之距離為$|a|$，到原點之距離為$\sqrt{a^2+b^2}$。

4. 中點公式：

平面上兩點 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，其中點坐標為$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$。

5. 給三點求平行四邊形第四個頂點坐標：

已知三點 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$，若四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形，

利用 $\overline{AC}$ 中點 $=$ $\overline{BD}$ 中點，則第四個頂點坐標 $D(x_4,y_4)$滿足：

$$x_4=x_1+x_3-x_2\text{，}y_4=y_1+y_3-y_2\text{。}$$

1 老師講解 判斷坐標符號 學生練習

已知 $A\left(\dfrac{a}{b},a^3\right)$ 落在第三象限，試求 $B\left(ab^2,b-a\right)$ 落在哪個象限？

想法　(x,y) 在第三象限 $\Leftrightarrow$ $x<0$，$y<0$，即 $(-,-)$。

[答：第二象限]

解　$\because$ $A\left(\dfrac{a}{b},a^3\right)$ 在第三象限

$\therefore$ $\dfrac{a}{b}<0$ 且 $a^3<0$，可得 $a<0$，$b>0$

故 $ab^2<0$ 且 $b-a>0$

$\therefore$ $B\left(ab^2,b-a\right)$ 坐標符號為 $(-,+)$

即 B 在第二象限

已知 $A(ab,a)$ 落在第三象限，試求 $B\left(a^2b,\dfrac{b^3}{a}\right)$ 落在哪個象限？

[答：第四象限]

解　$\because$ $A(ab,a)$ 在第三象限

$\therefore$ $ab<0$ 且 $a<0$，可得 $b>0$

故 $a^2b>0$ 且 $\dfrac{b^3}{a}<0$

$\therefore$ $B\left(a^2b,\dfrac{b^3}{a}\right)$ 的坐標符號為 $(+,-)$

即 B 在第四象限

2 老師講解 平面上兩點距離公式 學生練習

已知三角形三頂點坐標分別為 $A(1,2)$、$B(5,4)$、$C(3,-2)$，試求 $\triangle ABC$ 之周長。

想法　已知 $A\left(x_1,y_1\right)$、$B\left(x_2,y_2\right)$ 兩點，其距離 $\overline{AB}=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$。

[答：$4\sqrt{5}+2\sqrt{10}$]

解　$\overline{AB}=\sqrt{(1-5)^2+(2-4)^2}=\sqrt{16+4}$
$=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$\overline{BC}=\sqrt{(5-3)^2+(4+2)^2}=\sqrt{4+36}$
$=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

$\overline{AC}=\sqrt{(1-3)^2+(2+2)^2}=\sqrt{4+16}$
$=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

則 $\triangle ABC$ 之周長

$=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$

$=2\sqrt{5}+2\sqrt{10}+2\sqrt{5}$

$=4\sqrt{5}+2\sqrt{10}$

坐標平面上三點，$P(1,3)$、$Q(4,7)$、$R(10,15)$，試求 $\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{PR}$ 之值。

[答：30]

解　$\overline{PQ}=\sqrt{(1-4)^2+(3-7)^2}=5$

$\overline{QR}=\sqrt{(4-10)^2+(7-15)^2}=10$

$\overline{PR}=\sqrt{(1-10)^2+(3-15)^2}=15$

故 $\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{PR}$

$=5+10+15$

$=30$

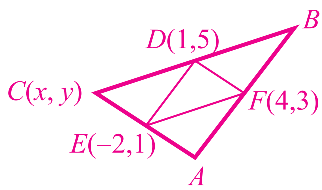
3　老師講解　中點應用　學生練習

$\triangle ABC$ 之三邊 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$ ，其中點坐標分別為 $(1,5)$、$(-2,1)$、$(4,3)$，試求位於第二象限之頂點坐標。

想法　設平行四邊形 $ABCD$ 之第四個頂點坐標 $D(x_4,y_4)$ ⇒ 滿足 $\begin{cases} x_4=x_1+x_3-x_2 \\ y_4=y_1+y_3-y_2 \end{cases}$。

[答：$(-5,3)$]

解　如圖所示



判斷位於第二象限之頂點坐標為 C

令 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 之中點坐標為

$D(1,5)$、$E(-2,1)$、$F(4,3)$

且設 $C(x,y)$

由平行四邊形 $CDFE$

利用 $\overline{DE}$ 中點 $=\overline{CF}$ 中點找頂點 C，得

$x=1-2-4=-5$

$y=5+1-3=3$

故所求頂點坐標為 $(-5,3)$

已知平行四邊形 $ABCD$ 之三頂點為 $A(5,-4)$、$B(-3,2)$、$C(4,1)$，試求 D 點坐標。

[答：$(12,-5)$]

解　令 $D(x,y)$，則

$x=5+4-(-3)=12$

$y=(-4)+1-2=-5$

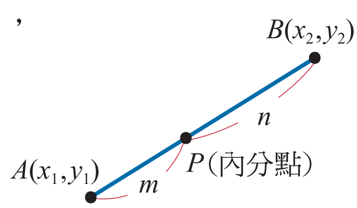
故 $D(12,-5)$

重點二　分點公式

1. 內分點公式：

已知兩點 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，若 P 在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，

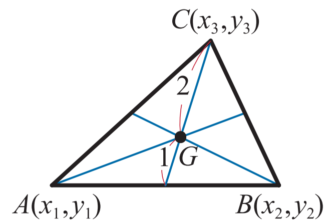
如圖所示，則 P 點坐標為 $\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n},\dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$。



2. 三角形重心：

如圖所示，$\triangle ABC$ 之三頂點為 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$，則

$\triangle ABC$ 重心 G 的坐標為 $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$。



觀念補充 //

❶ 三角形重心為三中線交點，且重心到頂點的距離為中線長的 $\dfrac{2}{3}$。

❷ 三角形重心 G 與三頂點的連線會將 $\triangle ABC$ 面積 3 等分

$\Rightarrow\ \triangle ABG=\triangle ACG=\triangle BCG=\dfrac{1}{3}\triangle ABC$。

4 內分點坐標

老師講解

已知 $A(1,-12)$、$B(-7,4)$，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=3:1$，試求下列情形之 P 點坐標：

(1) P 在 $\overline{AB}$ 上。

(2) P 不在 $\overline{AB}$ 上。（A、B、P 三點共線）

想法

內分點公式：

P 在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，

則 P 坐標 $\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n},\dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$。

[答：(1) $(-5,0)$　(2) $(-11,12)$]

解 (1) P 為內分點且 $\overline{AP}:\overline{PB}=3:1$

則依內分點公式得

$$P\left(\frac{3\times(-7)+1\times1}{3+1},\frac{3\times4+1\times(-12)}{3+1}\right)$$

$$=(-5,0)$$

(2) 設 $P(x,y)$，因 $\overline{AP}:\overline{PB}=3:1$

得 $\overline{AB}:\overline{BP}=2:1$

將 B 視為內分點

則 $B\left(\dfrac{2\times x+1\times1}{2+1},\dfrac{2\times y+1\times(-12)}{2+1}\right)$

$=(-7,4)$

$\therefore\ 2x+1=-21$，$2y-12=12$

解得 $x=-11$，$y=12$

故 P 點坐標為 $(-11,12)$

學生練習

平面上兩定點 $A(-1,7)$、$B(10,-5)$，且 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:2$，試求下列情形之 P 點坐標：

(1) P 在 $\overline{AB}$ 上。

(2) P 不在 $\overline{AB}$ 上。（A、B、P 三點共線）

[答：(1) $\left(\dfrac{28}{5},-\dfrac{1}{5}\right)$　(2) $(32,-29)$]

解 (1) P 為內分點且 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:2$

則依內分點公式得

$$P\left(\frac{3\times10+2\times(-1)}{3+2},\frac{3\times(-5)+2\times7}{3+2}\right)$$

$$=\left(\frac{28}{5},-\frac{1}{5}\right)$$

(2) 設 $P(x,y)$，因 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:2$

得 $\overline{AB}:\overline{BP}=1:2$

將 B 視為內分點

則 $B\left(\dfrac{1\times x+2\times(-1)}{1+2},\dfrac{1\times y+2\times7}{1+2}\right)$

$=(10,-5)$

$\therefore\ x-2=30$，$y+14=-15$

解得 $x=32$，$y=-29$

故 P 點坐標為 $(32,-29)$

5 三角形的重心坐標

老師講解

$\triangle ABC$ 中，$A(1,-1)$、$B(m,2)$、$C(-1,n)$，若 $\triangle ABC$ 之重心 $G(2,-1)$，則 $m-n$ 之值為何？

想法 三角形重心 G 的坐標為 $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$。

[答：10]

解 代重心公式

$\triangle ABC$ 重心坐標

$G\left(\dfrac{1+m-1}{3},\dfrac{-1+2+n}{3}\right)=(2,-1)$

$\Rightarrow \dfrac{m}{3}=2$，$\dfrac{1+n}{3}=-1$

$\Rightarrow m=6$，$n=-4$

故 $m-n=10$

學生練習

已知三角形三頂點的坐標分別為 $A(3,-5)$、$B(-1,8)$、$C(7,6)$，則此三角形重心 G 的坐標為何？

[答：$(3,3)$]

解 代重心公式

$\triangle ABC$ 重心 G 的坐標為

$\left(\dfrac{3-1+7}{3},\dfrac{-5+8+6}{3}\right)=(3,3)$

進階例題

6 內分點之應用

老師講解

已知 $\triangle ABC$ 之三頂點為 $A(1,-14)$、$B(8,10)$、$C(5,-11)$，若 $\angle A$ 之內角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D，試求 D 坐標。

[答：$\left(\dfrac{11}{2},-\dfrac{15}{2}\right)$]

解 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A$ 之內角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D

由內分比性質知 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}$

$\overline{AB}=\sqrt{7^2+24^2}=25$

$\overline{AC}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

得 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}=5:1$

代入分點公式

$D\left(\dfrac{1\times8+5\times5}{5+1},\dfrac{1\times10+5\times(-11)}{5+1}\right)$

$=\left(\dfrac{11}{2},-\dfrac{15}{2}\right)$

學生練習

已知 $\triangle ABC$ 之三頂點為 $A(3,-7)$、$B(-5,-1)$、$C(6,-3)$，若 $\angle A$ 之內角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D，試求 D 坐標。

[答：$\left(\dfrac{7}{3},-\dfrac{7}{3}\right)$]

解 $\overline{AB}=\sqrt{[3-(-5)]^2+[-7-(-1)]^2}=10$

$\overline{AC}=\sqrt{(3-6)^2+[-7-(-3)]^2}=5$

由內分比性質知

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}=2:1$

代入分點公式

$D\left(\dfrac{2\times6+1\times(-5)}{2+1},\dfrac{2\times(-3)+1\times(-1)}{2+1}\right)$

$=\left(\dfrac{7}{3},-\dfrac{7}{3}\right)$

C 1

1-2 段落測驗

★表難題

1. 點 $A(a+b,a)$ 在第二象限，則點 $P(ab,2a-3b)$ 在第__二__象限。

2. 已知坐標平面上平行四邊形 $ABCD$ 中，點 A、B、C 的坐標分別為 $(5,2)$、$(1,3)$、$(-4,3)$，則 D 點坐標為__$(0,2)$__。

3. 在坐標平面上，點 A、B 之坐標分別為 $(1,-2)$、$(6,13)$，若 C 點在 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{BC}=4\overline{AC}$，則 C 點的坐標為__$(2,1)$__。

4. 設 $A(4,1)$、$B(11,8)$，點 P 在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{BP}=5:2$，則 P 點坐標為__$(9,6)$__。

5. 已知平行四邊形 $ABCD$ 之三頂點：$A(3,5)$、$B(4,7)$、$C(-4,0)$，則 $\triangle ACD$ 之重心坐標為__$(-2,1)$__。

6. 平面上 $A(-2,1)$、$B(b_1,b_2)$、$C(c_1,c_2)$、$D(4,3)$ 在同一直線上，依序為 A–B–C–D，且 B、C 兩點將 $\overline{AD}$ 三等分，則 $C(c_1,c_2)$ 為__$\left(2,\frac{7}{3}\right)$__。【統測】

7. 在 xy 平面上，P 和 Q 為拋物線 $y=x^2$ 上的兩點，若 P 和 Q 的 x 坐標分別是 -1 和 2，則 P 和 Q 的距離為__$3\sqrt{2}$__。【統測】

8. 設 $A(5,8)$、$B(7,0)$、$C(-3,-2)$ 是三角形 ABC 的三頂點，若 D、E、F 分別是 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 的中點，則三角形 DEF 的重心坐標為__$(3,2)$__。【統測】

9. 已知 $A(a,0)$ 與 $B(3,b)$ 兩點，若線段 $\overline{AB}$ 的中點為 $M(-1,2)$，則點 A 到 y 軸的距離與點 B 到 x 軸的距離之和為__9__。【統測】

10. 已知 $A(1.38,0.4162)$ 與 $B(1.39,0.4177)$ 兩點，若點 P 落在線段 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:3$，則 P 點之 y 坐標為__0.4168__。【統測】

1-2 高手過招

1. 已知 $\triangle ABC$ 之三頂點為 $A(1,2)$、$B(-3,1)$、$C(2,6)$，D 在 $\overline{BC}$ 上，若 $\triangle ABD$ 面積是 $\triangle ABC$ 面積的 $\frac{2}{5}$ 倍，則 D 坐標為__$(-1,3)$__。

2. 已知 $\triangle ABC$ 之三頂點為 $A(2,-8)$、$B(-6,-2)$、$C(6,-5)$，若 $\angle A$ 之外角平分線交 $\overline{BC}$ 延長線於 E，則 E 坐標為__$(18,-8)$__。

1-3 函數及其圖形

重點一　函數的定義和圖形

1. 函數的定義：

f 是某種運算，關於兩個變量 x、y，當變數 x 經由 f 運算後，所得的 y 值會被唯一確定，則稱 y 是 x 的函數，記為 $y=f(x)$，其中 x 為自變數，y 為應變數。討論 x 能代入運算的範圍稱為定義域，代入運算後所得 y 值的範圍稱為值域。

觀念補充 //

❶ 函數視為一種對應關係，把定義域 A 中的變數 x 經由 f 對應到對應域 B 中的某數 y，則稱 f 是一個從 A 對應到 B 的函數，記為 $f：A \to B$；而 B 中真的被對應到的 $f(A)$ 稱為值域。

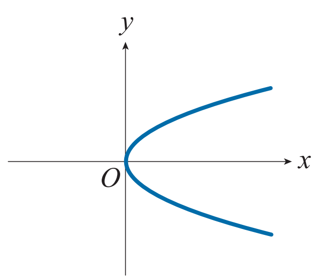
❷ 函數對應關係可以是一對一、多對一，但絕不可以是一對多或一對無。

2. 函數圖形：

函數 $f(x)$，將定義域中所有 x 值與其函數值 $f(x)$ 形成的點坐標 $(x, f(x))$ 描繪在坐標平面上，便可得到 $y=f(x)$ 的圖形。

觀念補充 //

垂直 x 軸的任意直線與函數圖形至多只能交於一點，
所以形如右圖是方程式圖形，非函數圖形。



3. 線型函數及其圖形：

形如 $f(x)=ax+b$（a、b 是實數）的圖形為一直線，稱為線型函數，說明如下：

(1) 若 $a \neq 0$，稱為一次函數（例如 $y=f(x)=2x+1$），其圖形為一直線。

(2) 若 $a=0$，稱為常數函數，其圖形為一水平線，又分以下兩種情形：

　① $b \neq 0$，稱為零次函數（例如 $y=f(x)=3$），其圖形是平行 x 軸的直線。

　② $b=0$，稱為零函數（即 $y=f(x)=0$），其圖形就是 x 軸。

4. **二次函數及其圖形：**

設 $a \neq 0$，$y=f(x)=ax^2+bx+c$ 為二次函數（例如 $y=f(x)=x^2+2x+3$），其圖形為拋物線。

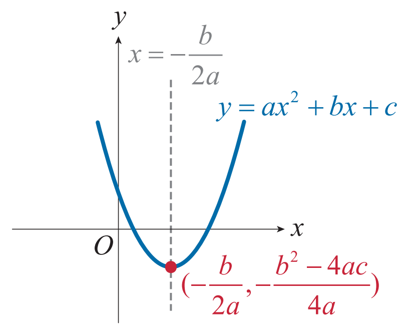
經配方後得 $y=a(x-h)^2+k$，其中頂點坐標 $(h,k)=\left(-\dfrac{b}{2a},-\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$。

觀念補充 //

配方法：

$$
\begin{aligned}
y&=ax^2+bx+c\\
&=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c \quad \text{← } x^2\text{ 係數 } a\text{ 強迫提出來後，補上 } x\text{ 項係數一半的平方}\\
&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}
\end{aligned}
$$

5. **二次函數 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ 之重要性質：**



(1) 對稱軸為 $x=-\dfrac{b}{2a}$。

(2) $|a|$ 愈大，開口愈小。

① $a>0$ 時，開口向上。

當 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 時，y 有最小值 $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$。

② $a<0$ 時，開口向下。

當 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 時，y 有最大值 $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$。

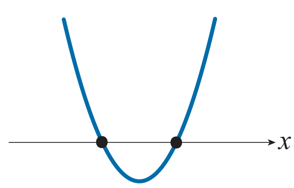
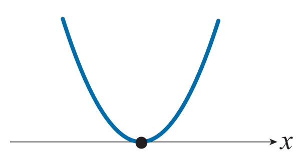
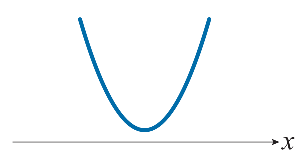
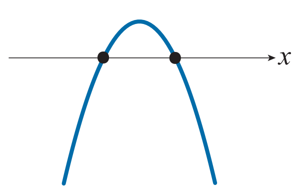
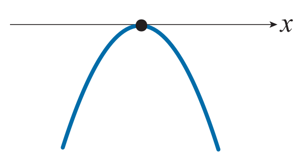
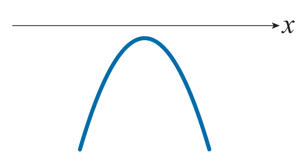
(3) 令判別式 $D=b^2-4ac$

① 當 $D>0$ 時，圖形與 x 軸有兩個交點。

② 當 $D=0$ 時，圖形與 x 軸交於一點。

③ 當 $D<0$ 時，圖形與 x 軸不相交。

將上述歸納如下表：

	$b^2-4ac>0$	$b^2-4ac=0$	$b^2-4ac<0$
$a>0$			
$a<0$			

6. 函數的平移：

(1) $y-k=f(x-h)$的圖形是將$y=f(x)$的圖形右移h單位，上移k單位。

(2) $y+k=f(x+h)$的圖形是將$y=f(x)$的圖形左移h單位，下移k單位。

1 分段函數求值

老師講解

設分段函數$f(x)=\begin{cases}3x+2，x>3\\4x^2-1，x\leq 3\end{cases}$，

試求$f(5)+f(0)=$？

想法　分段函數求值，選擇定義域中不同範圍的x值，代入所相應之函數。

[答：16]

解　$f(5)=3\times 5+2=17$

$f(0)=0-1=-1$

$\Rightarrow f(5)+f(0)=16$

學生練習

設分段函數$f(x)=\begin{cases}1+x^2，x<2\\5，x\geq 2\end{cases}$，

試求$f(4)+f(1)=$？

[答：7]

解　$f(4)=5$

$f(1)=1+1^2=2$

$\Rightarrow f(4)+f(1)=5+2$

$=7$

2 一次函數求值

老師講解

設線型函數$f(x)$，若$f(1)=5$，$f(6)=20$，$f(k)=14$，則k之值為何？

想法　依條件求出一次函數$f(x)=ax+b$。

[答：4]

解　令$f(x)=ax+b$

$\begin{cases}f(1)=a+b=5\\f(6)=6a+b=20\end{cases}$

解得$a=3$，$b=2$

$\therefore f(x)=3x+2$

又$f(k)=3k+2=14$

故$k=4$

學生練習

已知一次函數$y=f(x)$之圖形過$(0,3)$、$(3,9)$，則$f(1)=$？

[答：5]

解　令$f(x)=ax+b$

$\begin{cases}f(0)=3 \Rightarrow b=3\\f(3)=9 \Rightarrow 3a+b=9\end{cases}$

解得$a=2$

$\therefore f(x)=2x+3$

故$f(1)=2\times 1+3$

$=5$

3 老師講解　二次函數求值　學生練習

設 $f(x)=x^2+ax+b$，若 $f(1)=6$，$f(0)=3$，則 $f(2)=$？

想法 依條件求出二次函數 $f(x)=x^2+ax+b$。

[答：11]

解 $\begin{cases} f(1)=1+a+b=6 \\ f(0)=b=3 \end{cases}$

解得 $a=2$，$b=3$

$\therefore\ f(x)=x^2+2x+3$

故 $f(2)=2^2+2\times2+3$

$=11$

已知二次函數 $f(x)=x^2+mx+n$ 之圖形通過 $(0,2)$、$(-1,0)$，則 $f(-2)$ 之值為何？

[答：0]

解 $\begin{cases} f(0)=2 \ \Rightarrow\ n=2 \\ f(-1)=0 \ \Rightarrow\ 1-m+n=0 \end{cases}$

解得 $m=3$，$n=2$

$\therefore\ f(x)=x^2+3x+2$

故 $f(-2)=(-2)^2+3\times(-2)+2$

$=0$

4 老師講解　二次函數的圖形　學生練習

二次函數 $y=f(x)$ 其圖形通過 $(3,4)$，且 $y=f(2)=3$ 為最小值，試求 $f(x)=$？

想法 二次函數之最大值或最小值發生在頂點。

[答：$f(x)=x^2-4x+7$]

解 由 $f(2)=3$ 為最小值

令 $f(x)=a(x-2)^2+3$

因圖形通過 $(3,4)$，則

$f(3)=4\ \Rightarrow\ a(3-2)^2+3=4$

$\Rightarrow\ a=1$

故 $f(x)=(x-2)^2+3$

$=x^2-4x+4+3$

$=x^2-4x+7$

二次函數以 $(-1,-8)$ 為頂點，且與 y 軸交於 $(0,-6)$，試求此二次函數。

[答：$f(x)=2x^2+4x-6$]

解 由 $(-1,-8)$ 為頂點

令 $f(x)=a(x+1)^2-8$

因圖形通過 $(0,-6)$，則

$f(0)=-6\ \Rightarrow\ a-8=-6$

$\Rightarrow\ a=2$

故 $f(x)=2(x+1)^2-8$

$=2\left(x^2+2x+1\right)-8$

$=2x^2+4x-6$

5　老師講解　二次函數圖形與 x 軸交點數　學生練習

若函數 $y=x^2+kx+4$ 之圖形與 x 軸相交於一點，則 k 之值為何？

想法　函數圖形與 x 軸相交於一點，代表圖形與 x 軸相切。

[答：± 4]

解　依題意知 $x^2+kx+4=0$ 只有一解

故判別式 $b^2-4ac=0$

$\Rightarrow\ k^2-4\times 1\times 4=0$

$\Rightarrow\ k=\pm 4$

若拋物線 $y=x^2+4x-5$ 與 x 軸相交於 A 與 B 兩點，則 $\overline{AB}=$？

[答：6]

解　依題意 $y=x^2+4x-5$ 與 x 軸相交於 A、B

故 $x^2+4x-5=0$ 有二解

$\Rightarrow\ (x+5)(x-1)=0$

$\Rightarrow\ x=-5$ 或 1

令 $A(-5,0)$、$B(1,0)$

$\therefore\ \overline{AB}=|-5-1|=6$

6　老師講解　函數圖形的平移　學生練習

將 $y=2x^2+3x-5$ 的圖形向右移 h 單位，再向上移 k 單位後，與 $y=2x^2-x+4$ 的圖形重疊，試求 $h+k=$？

想法　將 $y=f(x)$ 圖形右移 h 單位，上移 k 單位的新函數是 $y-k=f(x-h)$。

[答：11]

解　原圖形右移 h 單位，上移 k 單位得

$y-k=2(x-h)^2+3(x-h)-5$

$\Rightarrow\ y=2x^2+(3-4h)x+2h^2-3h+k-5$

與 $y=2x^2-x+4$ 重疊

$$\therefore\ \begin{cases}3-4h=-1\\2h^2-3h+k-5=4\end{cases}$$

解得 $h=1$，$k=10$

$\Rightarrow\ h+k=11$

試求將函數 $f(x)=3x^2-2x+1$ 的圖形向右移 1 單位，再向下移 2 單位後的新函數為何？

[答：$f(x)=3x^2-8x+4$]

解　新函數為

$$\begin{aligned}f(x)&=\left[3(x-1)^2-2(x-1)+1\right]-2\\&=3(x^2-2x+1)-2x+2+1-2\\&=3x^2-8x+4\end{aligned}$$

1-3 段落測驗

★表難題

1. 設 $f(x)$ 為一次函數，已知 $f(-1)=2$，$f(3)=-6$，則 $f(-2)=$ __4__。

2. 設函數 $f(x)=ax+b$ 之圖形通過第一、二、四象限，則點 $P(ab,a-b)$ 在第__三__象限。

3. 小為參加馬拉松長跑比賽，已知平均每分鐘可跑兩百公尺，假若小為 x 分鐘跑了 y 公尺，且滿足 $y=f(x)$，則 $f(20)=$ __4000__。

★4. 若 $y=f(x)$ 為一次函數，已知 x 值增加 3 時，所對應的 y 值卻減少 6，且 $f(0)=6$，則 $f(x)=$ __$-2x+6$__。

5. $f(x)=ax^2+bx+c$，若 $f(x)$ 在 $x=2$ 處有最大值 5，且 $f(0)=1$，則 $a+b+c=$ __4__。

6. 函數 $f(x)=\begin{cases} x^2+3，當 |x|\le 4 \\ 2x+7，當 |x|>4 \end{cases}$，則 $f(-8)+f(-4)=$ __10__。

7. 將函數 $y=x^2+2x+1$ 的圖形向右移 2 單位，再向下移 3 單位所得新函數圖形的頂點為 (a,b)，則 $a^2+b^2=$ __10__。

★8. 函數 $f(x)=a(x+1)^2-2$ 的圖形**不會**經過第四象限，則 a 之值可能為下列哪一數？

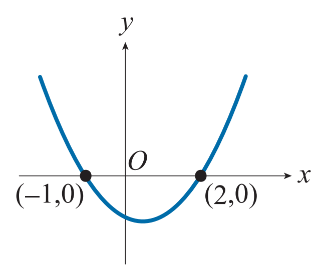
__D__

(A) -1　(B) 0.4　(C) 1.8　(D) 3.2。 【統測】

9. 設 a 為實數，若函數 $f(x)=a(x+3)^2-9a+2$ 在 $x=-3$ 時有最大值 20，則 $a=$ __-2__。

【統測】

10. 設 a、b 為實數，若二次函數 $y=x^2+ax+b$ 的圖形與 x 軸的交點為 $(-1,0)$、$(2,0)$，如圖所示，則 $a+b=$ __-3__。



【統測】

1-3 高手過招

1. 二次函數 $f(x)=x^2-(k+1)x+2k$ 的圖形不過原點且與 x 軸交於 A、B 兩點，若 $\overline{AB}=1$，則 $k=$ __6__。

2. 某地區因輻射冷卻效應導致日夜溫差大，假設該地區某一時段的溫度函數為 $f(t)=-t^2+8t+11$，其中 $1\le t\le 10$，則這段時間內該地區的最大溫差為__36__。

1-4 》一元二次不等式

重點一　一元二次不等式

1. 一元一次不等式：

設 $a \neq 0$，使 $ax - b > 0$（或 ≥ 0）成立之 x 值。

(1) 若 $a > 0$，則 $x > \dfrac{b}{a}$（或 $x \geq \dfrac{b}{a}$）。

(2) 若 $a < 0$，則 $x < \dfrac{b}{a}$（或 $x \leq \dfrac{b}{a}$）。

2. 一元二次不等式：

設 $a > 0$，使 $ax^2 + bx + c > 0$（或 ≥ 0）及 $ax^2 + bx + c < 0$（或 ≤ 0）成立之 x 值。

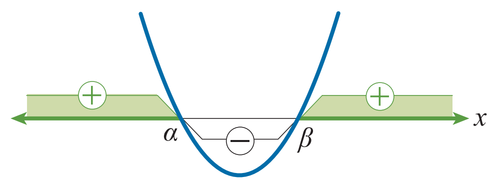
(1) 當判別式 $b^2 - 4ac > 0$：原二次不等式先因式分解化成下列形式（設 $\alpha < \beta$）。

① $(x-\alpha)(x-\beta) > 0$ 的解為 $x > \beta$ 或 $x < \alpha$。

② $(x-\alpha)(x-\beta) \geq 0$ 的解為 $x \geq \beta$ 或 $x \leq \alpha$。

③ $(x-\alpha)(x-\beta) < 0$ 的解為 $\alpha < x < \beta$。

④ $(x-\alpha)(x-\beta) \leq 0$ 的解為 $\alpha \leq x \leq \beta$。



(2) 當判別式 $b^2 - 4ac = 0$：原二次不等式可配方成完全平方式 $a(x-\alpha)^2$。

① $(x-\alpha)^2 > 0$，其解為任意實數，但 $x \neq \alpha$。

② $(x-\alpha)^2 \geq 0$，其解為任意實數。

③ $(x-\alpha)^2 < 0$，原不等式無解。

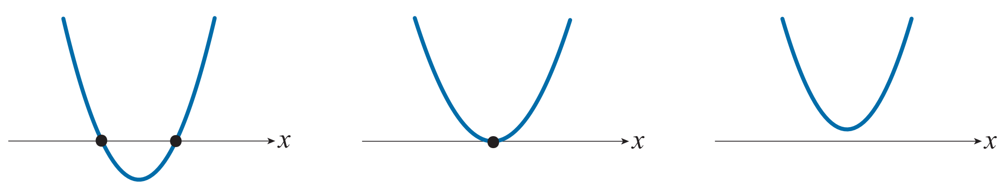
④ $(x-\alpha)^2 \leq 0$，其解為 $x = \alpha$。

(3) 當判別式 $b^2 - 4ac < 0$：原二次不等式無法因式分解，改採二次函數的恆正、恆負觀念處理。

3. 二次函數的恆正、恆負：

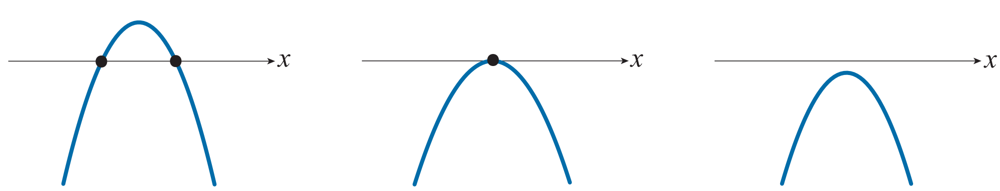
二次函數 $ax^2 + bx + c$

(1) 若 $a > 0$ 且 $b^2 - 4ac < 0$，則 $ax^2 + bx + c > 0$ 恆成立（恆正）。依圖形判斷：



$b^2-4ac>0$　　$b^2-4ac=0$　　$b^2-4ac<0$

(2) 若 $a < 0$ 且 $b^2 - 4ac < 0$，則 $ax^2 + bx + c < 0$ 恆成立（恆負）。依圖形判斷：



$b^2-4ac>0$　　$b^2-4ac=0$　　$b^2-4ac<0$

1 老師講解 解一元一次不等式 學生練習

試求不等式 $3\left(\frac{x}{2}+1\right)\leq 4(x+2)$ 之解為何？

想法 $ax-b\leq 0$ 成立之 x 值：
若 $a>0$，則 $x\leq\frac{b}{a}$；若 $a<0$，則 $x\geq\frac{b}{a}$。

[答：$x\geq -2$]

解 原式 $\Rightarrow \frac{3x}{2}+3\leq 4x+8$

$\Rightarrow 3-8\leq 4x-\frac{3x}{2}$

$\Rightarrow -5\leq\frac{5x}{2}$

$\Rightarrow x\geq -2$

試解不等式 $\frac{1}{3}(x-1)>\frac{1}{2}(x+4)+\frac{1}{6}$。

[答：$x<-15$]

解 原式

$\Rightarrow \left[\frac{1}{3}(x-1)\right]\times 6>\left[\frac{1}{2}(x+4)+\frac{1}{6}\right]\times 6$

$\Rightarrow 2x-2>3x+12+1$

$\Rightarrow x<-15$

2 老師講解 解一元二次不等式且判別式 $b^2-4ac>0$ 學生練習

試求下列不等式之解：

(1) $x^2+x-20>0$

(2) $2x^2-5x+2\leq 0$

想法 原式可因式分解，設 $\alpha<\beta$，則：
(1) 不等式 $(x-\alpha)(x-\beta)>0$ 的解為 $x>\beta$ 或 $x<\alpha$。
(2) 不等式 $(x-\alpha)(x-\beta)<0$ 的解為 $\alpha<x<\beta$。

[答：(1) $x>4$ 或 $x<-5$ (2) $\frac{1}{2}\leq x\leq 2$]

解 因判別式 $b^2-4ac>0$

(1) 因式分解 $x^2+x-20=(x+5)(x-4)$

$\Rightarrow (x+5)(x-4)>0$

$\Rightarrow x>4$ 或 $x<-5$

(2) 因式分解 $2x^2-5x+2=(2x-1)(x-2)$

$\Rightarrow (2x-1)(x-2)\leq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\leq x\leq 2$

試求下列不等式之解：

(1) $15+x-2x^2<0$

(2) $-3x^2+2x+5>0$

[答：(1) $x>3$ 或 $x<-\frac{5}{2}$ (2) $-1<x<\frac{5}{3}$]

解 因判別式 $b^2-4ac>0$

(1) 原式變號再因式分解

$\Rightarrow 2x^2-x-15>0$

$\Rightarrow (x-3)(2x+5)>0$

$\Rightarrow x>3$ 或 $x<-\frac{5}{2}$

(2) 原式變號再因式分解

$\Rightarrow 3x^2-2x-5<0$

$\Rightarrow (3x-5)(x+1)<0$

$\Rightarrow -1<x<\frac{5}{3}$

3　老師講解　解一元二次不等式且判別式 $b^2-4ac>0$　學生練習

解不等式 $x^2+x-1\le 0$。

想法　原式不能因式分解，需倚賴公式解抓零點。

[答：$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\le x\le\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$]

解　此題不能因式分解

當 $x^2+x-1=0$ 時之公式解為

$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

故原不等式可分解為

$\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\le 0$

$\therefore$ $x^2+x-1\le 0$ 其解為

$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\le x\le\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

試求不等式 $x^2-4x-1>0$ 之解。

[答：$x>2+\sqrt{5}$ 或 $x<2-\sqrt{5}$]

解　此題不能因式分解

當 $x^2-4x-1=0$ 時之公式解為

$x=2\pm\sqrt{5}$

故原不等式可分解為

$\left[x-\left(2+\sqrt{5}\right)\right]\left[x-\left(2-\sqrt{5}\right)\right]>0$

$\therefore$ $x^2-4x-1>0$ 之解為

$x>2+\sqrt{5}$ 或 $x<2-\sqrt{5}$

4　老師講解　解一元二次不等式且判別式 $b^2-4ac=0$　學生練習

試解不等式 $x^2+4x+30\le 5-6x$。

想法　若判別式 $b^2-4ac=0$，則原式可配成完全平方式。

[答：$x=-5$]

解　原式移項整理得 $x^2+10x+25\le 0$

因 $x^2+10x+25=0$ 之判別式 $b^2-4ac=0$

則原式化成 $x^2+10x+25=(x+5)^2\le 0$

$\therefore$ 只有 $x=-5$ 成立

試解不等式 $9x^2+x+5>7x+4$。

[答：x 為所有實數但 $x\ne\frac{1}{3}$]

解　原式移項整理得 $9x^2-6x+1>0$

因 $9x^2-6x+1=0$ 之判別式 $b^2-4ac=0$

則原式化成 $9x^2-6x+1=(3x-1)^2>0$

$\therefore$ x 為所有實數但 $x\ne\frac{1}{3}$

C

1

5 老師講解 已知解回推一元二次不等式（$b^2-4ac>0$） 學生練習

設 a、b 為實數，若不等式 $ax^2+bx-5<0$ 的解為 $-\frac{3}{2}<x<\frac{5}{3}$，求 $a+b=$ ？

想法　若不等式的解為 $\alpha<x<\beta$，則反推原二次不等式滿足 $(x-\alpha)(x-\beta)<0$。

[答：$\frac{5}{3}$]

解　$\because\ -\frac{3}{2}<x<\frac{5}{3}$

反推原二次不等式滿足

$\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{3}\right)<0$

$\Rightarrow\ (2x+3)(3x-5)<0$

$\Rightarrow\ 6x^2-x-15<0$

即 $2x^2-\frac{1}{3}x-5<0$

與 $ax^2+bx-5<0$ 比較係數

得 $a=2$，$b=-\frac{1}{3}$　$\therefore\ a+b=\frac{5}{3}$

已知二次不等式 $ax^2+bx+12\geq 0$ 的解為 $-\frac{4}{3}\leq x\leq\frac{3}{2}$，試求 a、b 的值。

[答：$a=-6$，$b=1$]

解　$\because\ -\frac{4}{3}\leq x\leq\frac{3}{2}$

反推原二次不等式滿足

$\left(x+\frac{4}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)\leq 0$

$\Rightarrow\ (3x+4)(2x-3)\leq 0$

$\Rightarrow\ 6x^2-x-12\leq 0$

將不等式變號得 $-6x^2+x+12\geq 0$

與 $ax^2+bx+12\geq 0$ 比較係數

得 $a=-6$，$b=1$

6 老師講解 解一元二次不等式且判別式 $b^2-4ac<0$ 學生練習

試求下列不等式之解：

(1) $x^2-x+1\geq 0$

(2) $x^2-2x+3<0$

想法　當判別式 $b^2-4ac<0$ 時，依恆正或恆負函數觀念判斷。

[答：(1) 所有實數　(2) 無實數解]

解　(1) 因 $x^2-x+1=0$ 之判別式 $b^2-4ac<0$

無法因式分解，改用配方法得

$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1-\frac{1}{4}\geq\frac{3}{4}$

（原式恆正）

故 $x^2-x+1\geq 0$ 的解為所有實數

(2) 因 $x^2-2x+3=0$ 之判別式 $b^2-4ac<0$

無法因式分解，改用配方法得

$x^2-2x+3=(x-1)^2+3-1\geq 2$

（原式恆正）

故 $x^2-2x+3<0$ 無實數解

試求下列不等式之解：

(1) $2x^2-x+3\leq 0$

(2) $x^2+3x+9>0$

[答：(1) 無實數解　(2) 所有實數]

解　(1) 因 $2x^2-x+3=0$ 之判別式 $b^2-4ac<0$

無法因式分解，改用配方法得

$2x^2-x+3$

$=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+3-2\times\frac{1}{16}\geq\frac{23}{8}$

（原式恆正）

故 $2x^2-x+3\leq 0$ 無實數解

(2) 因 $x^2+3x+9=0$ 之判別式 $b^2-4ac<0$

無法因式分解，改用配方法得

x^2+3x+9

$=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+9-\frac{9}{4}\geq\frac{27}{4}$

（原式恆正）

故 $x^2+3x+9>0$ 的解為所有實數

7 老師講解 **二次函數的恆正性質** 學生練習

若 k 為實數，對所有 x 均使 $kx^2+4x+(k+3)$ 恆正，試求 k 的範圍。

想法　二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$，
若 $a>0$ 且 $b^2-4ac<0$，則函數恆正。

[答：$k>1$]

解　$\because$　原式恆正

$\therefore$　$k>0$

且 $b^2-4ac=4^2-4k(k+3)<0$

$\Rightarrow$　$16-4k^2-12k<0$

$\Rightarrow$　$k^2+3k-4>0$

$\Rightarrow$　$(k+4)(k-1)>0$

$\Rightarrow$　$k>1$ 或 $k<-4$（不合）

故取 $k>1$

若 k 為實數，對所有 x 均使 kx^2+5x+k 之值恆正，則 k 的範圍為何？

[答：$k>\frac{5}{2}$]

解　$\because$　原式恆正

$\therefore$　$k>0$

且判別式 $b^2-4ac<0$

$\Rightarrow$　$5^2-4k\times k<0$

$\Rightarrow$　$4k^2-25>0$

$\Rightarrow$　$(2k+5)(2k-5)>0$

$\Rightarrow$　$k>\frac{5}{2}$ 或 $k<-\frac{5}{2}$（不合）

故取 $k>\frac{5}{2}$

重點二　絕對值不等式與分式不等式

1. 絕對值不等式的解法：

(1) 設 $a>0$，則 $|f(x)|<a \Leftrightarrow -a<f(x)<a$。

(2) 設 $k\geq 0$，則 $|f(x)|\geq k \Leftrightarrow f(x)\geq k$ 或 $f(x)\leq -k$。

(3) 兩邊含絕對值，則兩邊平方去絕對值：$|f(x)|\geq|g(x)| \Leftrightarrow [f(x)]^2\geq[g(x)]^2$。

2. 分式不等式：

型如 $\frac{g(x)}{f(x)}>0$（或 <0）成立之 x 值。

滿足 $\frac{g(x)}{f(x)}>0 \Leftrightarrow g(x)\cdot f(x)>0$ 或 $\frac{g(x)}{f(x)}<0 \Leftrightarrow g(x)\cdot f(x)<0$。（但答案不能使分母為0）

例如：$\frac{x-1}{x-2}<0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)<0$。

觀念補充 //

求 $\frac{g(x)}{f(x)}<1$ 時不可交叉相乘變 $g(x)<f(x)$，要移項解之 $\Rightarrow \frac{g(x)}{f(x)}-1<0$，再通分。

8 老師講解 解絕對值不等式 學生練習

解$|2x-5|\leq|x+4|$。

想法 兩邊平方去絕對值，化成一元二次不等式。

[答：$\frac{1}{3}\leq x\leq 9$]

解 兩邊平方去絕對值

$\Rightarrow (2x-5)^2\leq(x+4)^2$

$\Rightarrow 4x^2-20x+25\leq x^2+8x+16$

$\Rightarrow 3x^2-28x+9\leq 0$

$\Rightarrow (3x-1)(x-9)\leq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{3}\leq x\leq 9$

解$|4x-3|>|3x+1|$。

[答：$x>4$或$x<\frac{2}{7}$]

解 兩邊平方去絕對值

$\Rightarrow (4x-3)^2>(3x+1)^2$

$\Rightarrow 16x^2-24x+9>9x^2+6x+1$

$\Rightarrow 7x^2-30x+8>0$

$\Rightarrow (7x-2)(x-4)>0$

$\Rightarrow x>4$或$x<\frac{2}{7}$

9 老師講解 解分式不等式 學生練習

試求分式不等式$\frac{2x-3}{x+2}\leq 0$之解。

想法 $\frac{g(x)}{f(x)}<0 \Leftrightarrow g(x)f(x)<0$（但答案不可使分母為 0）。

[答：$-2<x\leq\frac{3}{2}$]

解 原式

$\Rightarrow (2x-3)(x+2)\leq 0$

$\Rightarrow -2\leq x\leq\frac{3}{2}$

但$x=-2$不合（使分母為 0）

故$-2<x\leq\frac{3}{2}$

試求分式不等式$\frac{3x+7}{x-1}\geq 0$之解。

[答：$x>1$或$x\leq-\frac{7}{3}$]

解 原式

$\Rightarrow (3x+7)(x-1)\geq 0$

$\Rightarrow x\geq 1$或$x\leq-\frac{7}{3}$

但$x=1$不合（使分母為 0）

故$x>1$或$x\leq-\frac{7}{3}$

1-4 段落測驗

★表難題

1. 滿足一次不等式 $2x-\frac{x+1}{2}\geq\frac{7}{3}+\frac{3x-1}{6}$ 的最小整數 $x=$ ＿3＿。

2. 一次不等式 $x>3x-4\geq-2x+1$ 之解為＿$1\leq x<2$＿。

3. 不等式 $-6x^2-x+2\geq0$ 之解為＿$-\frac{2}{3}\leq x\leq\frac{1}{2}$＿。

4. 不等式 $x^2-x-3\leq0$ 的解為＿$\frac{1-\sqrt{13}}{2}\leq x\leq\frac{1+\sqrt{13}}{2}$＿。

5. 設 x、a 均為實數，若 x 的二次不等式 $ax^2-2ax+2a-3<0$ 之解為 $-1<x<3$，則 $a=$ ＿$\frac{3}{5}$＿。

6. $|x-1|>|3x+2|$ 之解為＿$-\frac{3}{2}<x<-\frac{1}{4}$＿。

7. 分式不等式 $\frac{2x+5}{x+4}\leq1$ 之解為＿$-4<x\leq-1$＿。

8. 不等式 $3x^2-3x\leq6$ 之解為＿$-1\leq x\leq2$＿。【統測】

9. 不等式 $|x+5|\geq|2-x|$ 的解為＿$x\geq-\frac{3}{2}$＿。【統測】

10. 設 a、b 為實數，若不等式 $ax^2-4x+b<0$ 之解為 $-\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}$，則 $a+b=$ ＿$-\frac{1}{2}$＿。【統測】

1-4 高手過招

1. 已知函數 $f(x)=\left(x^2+4x+5\right)\left(x^2-2x-3\right)$，若 $f(x)<0$，則 x 之範圍為＿$-1<x<3$＿。

2. 滿足不等式 $\frac{(x-1)^2(x+3)}{x-2}<0$ 的整數解共有＿3＿個。【統測】

CH 1 素養練功坊

題目

已知在發光亮度相同的情況下，省電燈泡使用的電能為白熾燈的 $\frac{1}{5}$ 到 $\frac{1}{3}$ ，壽命則為其 8 到 10 倍。省電燈泡的單價雖比白熾燈貴，但由於其壽命長、耗電少，在其工作壽命中大約能省下其售價五倍的電費。假設某省電燈泡生產工廠，工廠估算當每日販賣 x 個省電燈泡時，其利潤函數為 $f(x)=x^2-58x-120$ ，試求欲使該工廠生產利潤大於零，其每日銷售燈泡數量至少應為多少個？

關　鍵　字　利潤函數 $f(x)=x^2-58x-120$
使生產利潤大於零之銷售數量

單 元 公 式　設 $a>0$，若 $ax^2+bx+c=0$ 之兩根為 α、β（$\alpha<\beta$）
則不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解為 $x<\alpha$ 或 $x>\beta$

翻譯成數學式　試求 $f(x)=x^2-58x-120>0$ 之正整數解

解 題　依題意逐步分析後
其實本題就是求 $x^2-58x-120>0$ 之正整數解
首先將二次式 $x^2-58x-120$ 因式分解
利用十字交乘法分解之後可得 $(x+2)(x-60)$
若欲使 $x^2-58x-120>0$，亦即 $(x+2)(x-60)>0$
可解出滿足不等式的範圍為 $x>60$ 或 $x<-2$（非正整數解，不合）
故當每日銷售燈泡數量大於 60 時
即至少為 61 個，其生產利潤大於零

- **回顧：**新課綱期盼能培養學生的「素養」（包含知識、態度與應用）能力，新課綱上路後，考試內容也開始傾向「素養導向」，日後「試題素養化」勢必將逐漸成為主流。回歸本題，此題考點在解一元二次不等式，不等式在數學上的地位並不亞於方程式，命題上可以混搭其他章節的觀念，牽涉面很廣，不可偏廢。

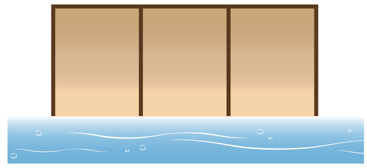
CH 1 素養競技場

★表難題

1. 小叡在天文網站上看到以下資訊：「利用北斗七星斗杓的天璇與天樞這兩顆星來尋找北極星。由天璇起始向天樞的方向延伸便可找到北極星，其中天樞與北極星的距離為天樞與天璇距離的 5 倍。」今小叡將所見的星空想像成一個坐標平面，其中天璇的坐標為$(9,8)$，天樞的坐標為$(7,11)$。依上述資訊可以推得北極星的坐標為何？

答：$(-3,26)$

★ 2. 根據有經驗的鴨農表示，養殖肉鴨的週期較短，通常養殖 42 ～ 45 天即可出售，且一年可多次養殖。在一般農民家庭養殖約可養殖 2000 ～ 3000 隻。假設阿國想要在河岸邊利用圍籬圍出 3 間面積相等的矩形鴨舍（河岸邊不圍），如圖，若圍籬的長度為 48 公尺，則 1 間鴨舍的最大面積為何？



答：48 平方公尺

3. 世界衛生組織計算男性標準體重之方法為：

$$\text{標準體重（kg）}=（\text{身高（cm）}-80）\times 0.7$$

並定義：標準體重 ± 10% 為正常體重範圍；

標準體重 ± 20% 以上則為肥胖或體重不足。

已知一男性身高為 180 cm，若其實際體重落在正常體重範圍內，即滿足不等式：$\left|\text{實際體重}-\text{標準體重}\right| \le$ 誤差值，試求該男性實際體重的範圍為何？

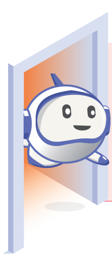
答：$63\text{ kg} \le \text{實際體重} \le 77\text{ kg}$

4. 假設 A、B 兩人同時從坐標平面上之 P 點出發，並以等速率直線前進。已知 A 的速率為 B 的 1.5 倍，且 10 分鐘後 A 所在的位置坐標為$(1,4)$；B 所在的位置坐標為$(-4,-1)$，試依下列情況計算出發點 P 之坐標為何？

(1) A、B 前進方向相反。

(2) A、B 前進方向相同。

答：(1) $(-2,1)$　(2) $(-14,-11)$



高三人的態度

態度決定高度，專注決定勝負。活在當下，只要知道當下這麼做是對的，就全力以赴。

CH 1 統測考古題

統測解題影音

★表難題

(B) 1. 公益文教基金會調查技術型高中三年級學生每天手機使用時間介於 3.1 小時至 4.9 小時之間（含）。若 x（單位：小時）為其中一位參與調查的技術型高中學生每天手機使用時間，且將上述使用時間範圍用 $|x-a|\le b$ 來表示，則 $ab=$ ？

(A) 3.2 (B) 3.6 (C) 3.8 (D) 4.2。 【111(C)】

(A) 2. 不等式 $5x-4<x^2<x+2$ 的解為何？

(A) $-1<x<1$ (B) $-1<x<2$ (C) $-2<x<1$ (D) $0<x<4$。 【111(C)】

(A) 3. 若 x 為實數，則 $x^2-2+\dfrac{9}{x^2+2}$ 的最小值為何？

(A) 2 (B) $\dfrac{5}{2}$ (C) $\dfrac{13}{2}$ (D) 6。 【110(C)】

(C) 4. 若點 A 與點 B 在數線上的坐標分別是 -1 與 5，則線段 $\overline{AB}$（包含兩端點，如圖所示）是下列哪一個不等式之解的圖形？

(A) $|x-1|\le 4$ (B) $|x+1|\le 5$ (C) $x^2-4x-5\le 0$ (D) $x^2+6x+5\le 0$。【109(B)】

(A) 5. 若拋物線 $y=ax^2+b$ 之開口向上且與 x 軸沒有交點，則下列敘述何者正確？

(A) $a>0$，$b>0$ (B) $a>0$，$b<0$ (C) $a<0$，$b>0$ (D) $a<0$，$b<0$。

【108(B)】

★(A) 6. 設直線 $2x+y=11$ 與拋物線 $y=x^2-4$ 在第二象限的交點為 A，在第一象限的交點為 B，若線段 $\overline{AB}$ 上一點 P 滿足 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$，則 P 點坐標為何？

(A) $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{31}{3}\right)$ (B) $(-2,26)$ (C) $(-1,13)$ (D) $\left(\dfrac{-7}{3},\dfrac{47}{3}\right)$。 【106(C)】

★(D) 7. 設 a、b 為實數，且不等式 $-x^2+6x+b>0$ 與不等式 $|x+a|<5$ 的解完全相同，則 $a+b=$

(A) -13 (B) -7 (C) 7 (D) 13。 【106(C)】

(C) 8. 若一元二次不等式 $x^2-2x-3<0$ 的解為 $a<x<b$，則 $a+b=$

(A) -3 (B) -1 (C) 2 (D) 3。 【106(B)】

(C) 9. 已知 $ax^2+2x+c>0$ 的解為 $-1<x<3$，則 $a+c$ 之值為何？

(A) -4 (B) -2 (C) 2 (D) 4。 【105(B)】

(A) 10. 已知拋物線 $y=ax^2+4bx+4a$ 與 x 軸有兩相異交點，且頂點在第一象限，則下列敘述何者正確？

(A) $a<0$，$a^2<b^2$ (B) $a<0$，$a^2>b^2$ (C) $a>0$，$a^2<b^2$ (D) $a>0$，$a^2>b^2$。

【105(B)】

(D) 11. 已知 a、b 為實數，若不等式 $x^2+ax\le b$ 之解為 $-5\le x\le 3$，則 $a+b=$ ？

(A) -17 (B) -13 (C) 13 (D) 17。 【104(C)】

(A) 12. 下列方程式所對應的圖形中，何者恆在 x 軸的上方？

(A) $y=5x^2-3x+1$ (B) $y=3x^2+5x-1$ (C) $y=x^2-5x+3$ (D) $y=3x^2+x-5$。

【104(C)】

(C) 13. 若想要利用一條繩子圍出一個面積至少為 25 平方公尺的矩形花園，則所需要的繩子總長度至少須為多少公尺？

(A) 12 (B) 16 (C) 20 (D) 24。 【104(B)】

(C) 14. 下列何者與不等式 $x^2-6x-16<0$ 有完全相同的解？

(A) $(x-2)(x+8)<0$ (B) $-3<x-5<3$ (C) $(x-3)^2<25$

(D) $-x^2+6x+16<0$。 【104(B)】

(C) 15. 設 $A(0,0)$、$B(2,2)$ 為平面上二點，若點 $P(m,n)$ 在線段 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=3:1$，則 $m+n$ 之值為何？

(A) 2 (B) 2.5 (C) 3 (D) 3.5。 【統測】

(B) 16. 已知循環小數 $0.\overline{9}=0.9999\cdots$，令 $a=0.\overline{9}\times 0.9$，則下列何者正確？

(A) $a<0.8\overline{9}$ (B) $a=0.8\overline{9}$ (C) $a<0.9$ (D) $a>0.9$。 【統測】

★(C) 17. 設 x、y、z 皆為正實數，且 $xy+yz+zx=27$，則 xyz 之最大值為何？

(A) $12\sqrt[3]{2}$ (B) 18 (C) 27 (D) $27\sqrt[3]{2}$。 【統測】

C

1