



技高數學 C

重點清單 1



坐標系與函數圖形

- 循環小數化分數
- 絕對值方程式
- 絕對值不等式
- 根式與乘法公式
- 算幾不等式

$$a > 0, b > 0 \rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (a=b \text{ 時等號成立})$$

- 平面上兩點間距離公式 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
- 分點公式

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n}$$

$\begin{array}{c} \xrightarrow{m} \quad \xrightarrow{n} \\ x_1 \quad \quad x_2 \\ \quad \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad x \end{array}$

(比例相加當分母，交叉相乘再相加當分子)

- 中點公式 $x = \frac{x_1+x_2}{2}$
- 三角形重心公式 $G(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$
- 平行四邊形公式 $\begin{cases} x_1+x_3 = x_2+x_4 \\ y_1+y_3 = y_2+y_4 \end{cases}$
- 配方法與二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形
- 二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形與 x 軸相交情形
- $ax^2 + bx + c = 0$ 之根的公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- $ax^2 + bx + c = 0$ 之根與係數的關係

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} \end{cases}$$
- 函數圖形的平移與方程式的變化

- 一元二次不等式
- 判別式在一元二次不等式的應用
- 已知求解絕對值不等式或一元二次不等式

$$a < x < b \Leftrightarrow \left| x - \frac{a+b}{2} \right| < \frac{b-a}{2}$$

$$\Leftrightarrow (x-a)(x-b) < 0$$

$$x \leq a \text{ 或 } x \geq b \Leftrightarrow \left| x - \frac{a+b}{2} \right| \geq \frac{b-a}{2}$$

$$\Leftrightarrow (x-a)(x-b) \geq 0$$

- 分式不等式(注意分母不得為 0)

三角函數

- 度與弧度之換算 ($\pi = 180^\circ$)
- 最小正同界角 $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$
- 扇形的弧長與面積公式

$$\begin{cases} S = r\theta \\ A = \frac{1}{2}r^2\theta \end{cases}, \text{ 其中 } \theta \text{ 要使用弧度單位}$$
- 銳角三角函數的定義
- 特別角之三角函數值
- 三角函數的恆等式
- 三角恆等式搭配乘法公式之題型
- 三角恆等式搭配根與係數關係之題型
- 任意角三角函數的定義
- 六個三角函數在四個象限之正負號判斷
- 象限角 $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ 與 270° 之三角函數值
- 負角公式
- $180^\circ \pm \theta, 360^\circ \pm \theta$ 之變換 \rightarrow 函數不變
- $90^\circ \pm \theta, 270^\circ \pm \theta$ 之變換 \rightarrow 函數正餘互換
- 三角函數的圖形與週期

- 有關 $-1 \leq \sin \theta \leq 1, -1 \leq \cos \theta \leq 1$ 之方程式問題與函數極值問題

- 已知兩邊夾一角之三角形面積公式

$$\Delta = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$

- 正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

- 餘弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Leftrightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

- 海龍公式 $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

- 三角形外接圓半徑公式 $R = \frac{abc}{4\Delta}$

- 三角形內切圓半徑公式 $r = \frac{\Delta}{s}$

- 解三角形之相關題型

平面向量

- 兩向量相等 $\Leftrightarrow x$ 分量相等且 y 分量相等
- 向量的長度與方向角
- 向量相加要頭接尾(配合使用四邊形法)
- 向量相減要共始點(配合使用四邊形法)
- 向量的實數積
- 兩向量互相平行 \Leftrightarrow 分量成比例
- 零向量 $\vec{0} = (0,0)$ 與單位向量 $\vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
- 向量分點公式
- 向量內積的代數形式與幾何形式
- $|\vec{p}\vec{a} + \vec{q}\vec{b}|^2 = p^2|\vec{a}|^2 + 2pq(\vec{a} \cdot \vec{b}) + q^2|\vec{b}|^2$



技高數學 C

重點清單 2



- 兩向量所張之三角形面積公式

$$\Delta = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

- 柯西不等式

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2$$

當 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ 時等號成立

- 正射影(投影向量)

$$\vec{a} \text{ 在 } \vec{b} \text{ 上的正射影為 } \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

式的運算

- 多項式的判斷
- 兩多項式相等 \Leftrightarrow 對應項的係數相等
- 多項式的係數和
- 多項式的加減
- 多項式相乘
- 除法原理
- 長除法
- 綜合除法
- 使用連續綜合除法處理多項式的變換
- 餘式定理
- 因式定理
- 整係數一次因式檢驗法(牛頓定理)
- 最高公因式與最低公倍式
- 餘式的假設技巧
- 一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$
- $i = \sqrt{-1}$ 的循環性
- 兩複數相等 \Leftrightarrow 實部等於實部且虛部等於虛部
- 共軛複數
- 複數的四則運算

- 部分分式(常見類型分析)

- 解分式方程式

- 多重根號公式

$$\sqrt{(x+y) \pm 2\sqrt{xy}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y} \quad (x > y)$$

- 應用乘法公式處理根式化簡

直線與圓

- 斜率與斜角

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan \theta$$

- 三點共線 \Leftrightarrow 任兩點所得之直線斜率相等

- 兩直線互相平行 \Leftrightarrow 斜率相等

- 兩直線互相垂直 \Leftrightarrow 斜率相乘等於 -1

- 直線的點斜式 $y - y_0 = m(x - x_0)$

- 直線的一般式 $ax + by + c = 0$

- 直線的截距式 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

- 直線的斜截式 $y = mx + b$

- 直線的點法式 $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$

- 直線的參數式 $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}, t \in R$

- 點到直線距離公式 $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

- 兩平行線間距離公式 $d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

- 圓的標準式(心徑式) $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

- 圓的直徑式 $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$

- 圓的一般式 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$

- 圓判別式 $\Delta = d^2 + e^2 - 4f$

- 圓的參數式 $\begin{cases} x = h + r \cos \theta \\ y = k + r \sin \theta \end{cases}, 0 \leq \theta < 2\pi$

- 圓與點的關係

- 圓與直線的關係

- 圓的切線方程式求法

- 圓的切線段長公式

$$\textcircled{1} \sqrt{(x_0 - h)^2 + (y_0 - k)^2 - r^2}$$

$$\textcircled{2} \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + dx_0 + ey_0 + f}$$

等差數列與等差級數

- $a_1 = S_1, a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$

- Σ 的性質與公式

- 等差數列一般項 $a_n = a_1 + (n - 1)d$

- 等差數列已知 a_m, a_n 求公差 d

$$a_m = a_n + (m - n)d \rightarrow d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

- a, b, c 成等差 \rightarrow 等差中項 $b = \frac{a + c}{2}$

- 等差級數前 n 項和公式

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$$

- 等比數列一般項 $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

- 等比級數前 n 項和公式

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

- 等比級數延伸公式

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} \rightarrow S_n = \frac{a_n \times r - a_1}{r - 1}$$

- a, b, c 成等比 $\rightarrow b^2 = ac \rightarrow$ 等差中項 $b = \pm \sqrt{ac}$



技高數學 C

重點清單 3



排列組合

- 樹狀圖
- 加法原理與乘法原理
『或就是加』；『且就是乘』
- 排容原理
- $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$
※ $0! = 1$ (不選也是 1 種選擇)
- $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$ (從 n 開始，連續 r 個相乘)
- $C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$
- $C_a^n = C_b^n \rightarrow$ ① $a = b$ 或 ② $a + b = n$
- 重複排列 $\rightarrow n^r$ (要注意是誰選誰！)
- 不盡相異物直線排列
以 $aaaabbbcc$ 為例 \rightarrow 排列數為 $\frac{9!}{4!3!2!}$
- 分堆(需分組時，再去乘以幾階乘，視題意而定)
以 6 個相異物為例：
分 2,2,2 $\rightarrow C_2^6 \times C_2^4 \times C_2^2 \times \frac{1}{3!}$
分 3,3 $\rightarrow C_3^6 \times C_3^3 \times \frac{1}{2!}$
分 3,2,1 $\rightarrow C_3^6 \times C_2^3 \times C_1^1$
分 2,2,1,1 $\rightarrow C_2^6 \times C_2^4 \times C_1^2 \times C_1^1 \times \frac{1}{2!2!}$

- 不連號
以 1~10 為例：
取 3 個不連號的方法數為 C_3^{10-3+1}
- 成雙不成雙問題
以 Aa 、 Bb 、 Cc 、 Dd 、 Ee 五對夫婦為例：
選 4 人為 2 對夫婦 $\rightarrow C_2^5$
選 3 人均不為夫婦 $\rightarrow C_3^5 \times 2^3$
選 4 人恰有 1 對夫婦 $\rightarrow C_1^5 \times C_2^4 \times 2^2$
選 5 人恰有 2 對夫婦 $\rightarrow C_2^5 \times C_1^3 \times 2$

三角函數的應用

- 和差角公式
 $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
 $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
 $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$
- 二倍角公式
 $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$
 $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$
 $= 2 \cos^2 \theta - 1$
 $= 1 - 2 \sin^2 \theta$
 $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$
- 以 $\tan \theta$ 表示 $\sin 2\theta$ 與 $\cos 2\theta$
 $\sin 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$; $\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$

半角公式

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta ; \sin^2 \theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta$$

正餘弦疊合公式

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \varphi)$$

$$\text{其中 } \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} ; \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

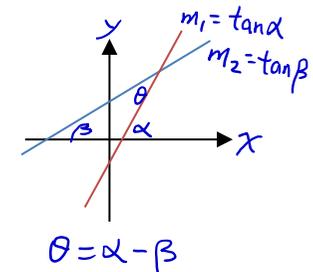
$$-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \sin \theta + b \cos \theta \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

兩直線交角公式

$$\tan \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

另一交角為 $180^\circ - \theta$

三角測量問題



指數與對數

- 指數律(底數大於 0 且不等於 1)
 - ① $a^0 = 1$
 - ② $a^1 = a$
 - ③ $a^m \times a^n = a^{m+n}$
 - ④ $a^m \div a^n = a^{m-n}$
 - ⑤ $(a^m)^n = a^{m \times n}$
 - ⑥ $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} = a^{m \cdot \frac{1}{n}}$
 - ⑦ $a^{-1} = \frac{1}{a}$; $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
 - ⑧ $(a \times b)^m = a^m \times b^m$; $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

技高數學 C

重點清單 4



對數 $\log_a b$ 有意義：

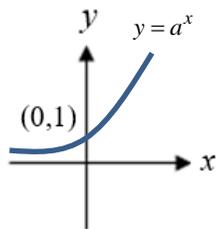
- ① 底數 a 大於 0
- ② 底數 a 不等於 1
- ③ 真數 b 大於 0

對數公式：

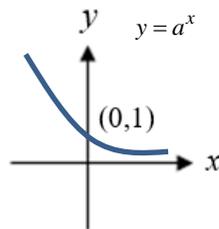
- ① $\log_a 1 = 0$
- ② $\log_a a = 1$
- ③ $\log_a M + \log_a N = \log_a (M \times N)$
- ④ $\log_a M - \log_a N = \log_a \left(\frac{M}{N}\right)$
- ⑤ $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$
- ⑥ $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ (換底公式)
- ⑦ $(\log_a b)(\log_b a) = 1$
- ⑧ $(\log_a b)(\log_b c)(\log_c d) = \log_a d$ (連鎖律)
- ⑨ $X^{\log_a Y} = Y^{\log_a X}$

指數函數圖形

(1) $a > 1$

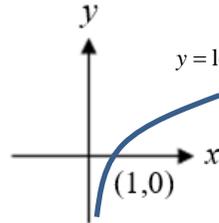


(2) $0 < a < 1$

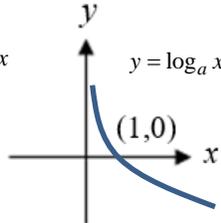


對數函數圖形

(1) $a > 1$



(2) $0 < a < 1$



首數與尾數

$$x = a \times 10^n \quad (1 \leq a < 10, n \in \mathbb{Z})$$

$$\log x = n + \log a \quad (0 \leq \log a < 1, n \in \mathbb{Z})$$

(1) n 為首數

- ① $n \geq 0 \rightarrow x$ 整數部分的位數 = 首數 $n + 1$
- ② $n < 0 \rightarrow x$ 小數部分在小數點後第 $|n|$ 位始不為 0

(2) $\log a$ 為尾數

① x 使用的數與 $\log a$ 使用的數相同

$$\text{例：} \log 54321 = 4 + \log 5.4321$$

② 用 $\log a$ 的值配合下表來決定 x 最左邊的數

$$\log 2 \approx 0.3010$$

$$\log 3 \approx 0.4771$$

$$\log 4 \approx 0.6020$$

$$\log 5 \approx 0.6990$$

$$\log 6 \approx 0.7781$$

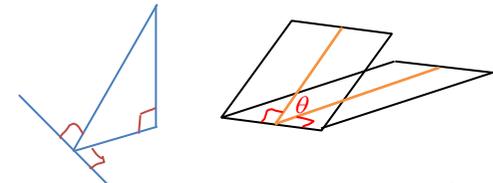
$$\log 7 \approx 0.8451$$

$$\log 8 \approx 0.9030$$

$$\log 9 \approx 0.9542$$

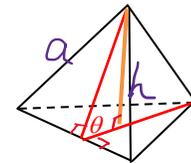
空間向量

三垂線定理與兩面角



正四面體

$$\cos \theta = \frac{1}{3}; \text{ 高 } h = \frac{\sqrt{6}}{3} a$$



□ $O(0,0,0)$ 為原點，求 $P(a,b,c)$ 在 xy 平面、 yz 平面、 xz 平面、 x 軸、 y 軸、 z 軸之投影點與 \overline{OP} 的投影長：

(1) xy 平面 ($z=0$): 投影點 $(a,b,0)$ ，投影長 $\sqrt{a^2 + b^2}$

(2) yz 平面 ($x=0$): 投影點 $(0,b,c)$ ，投影長 $\sqrt{b^2 + c^2}$

(3) xz 平面 ($y=0$): 投影點 $(a,0,c)$ ，投影長 $\sqrt{a^2 + c^2}$

(4) x 軸 ($\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$): 投影點 $(a,0,0)$ ，投影長 $|a|$

(5) y 軸 ($\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$): 投影點 $(0,b,0)$ ，投影長 $|b|$

(6) z 軸 ($\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$): 投影點 $(0,0,c)$ ，投影長 $|c|$

□ $A(x_1, y_1, z_1)$ 、 $B(x_2, y_2, z_2)$

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



技高數學 C

重點清單 5



□ 空間向量的內積

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

\vec{a} 、 \vec{b} 的夾角為 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$)

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$$(2) \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

□ 兩向量互相平行 \rightarrow 分量成比例

□ 兩向量互相垂直 \rightarrow 內積為 0

□ 柯西不等式

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2$$

當 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ 時等號成立

□ 正射影(投影向量)

\vec{a} 在 \vec{b} 上的正射影為 $\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right) \vec{b}$

$$\begin{cases} a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0 \\ b_1 x + b_2 y + b_3 z = 0 \end{cases}$$

$$x : y : z = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

□ $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 、 $\vec{n} = (x, y, z)$

$$\begin{cases} \vec{a} \perp \vec{n} \\ \vec{b} \perp \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{n} = 0 \\ \vec{b} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0 \\ b_1 x + b_2 y + b_3 z = 0 \end{cases}$$

□ 空間向量的外積

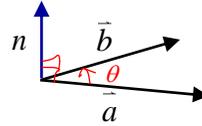
$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

\vec{a} 、 \vec{b} 的夾角為 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$)

$$(1) \vec{a} \times \vec{b} = (|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta) \vec{n}, \text{ 其中}$$

\vec{n} 為單位向量且 $\begin{cases} \vec{a} \perp \vec{n} \\ \vec{b} \perp \vec{n} \end{cases}$ 並遵守右手定則



$$(2) \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

□ 空間中兩向量所張出的平行四邊形面積大小，是等於這兩向量的外積之長度大小。

即 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 與 $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 所張出之平行四邊形面積為

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}$$

□ 降階法則

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

$$= +a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

□ 三階行列式的性質

(1) 行列互換，其值不變。

(2) 任兩行(列)對調，其值變號。

(3) 任一行(列)可提出公因數。

(4) 任兩行(列)成比例時，其值為 0。

(5) 將任一行(列)乘以 k 倍後加到另一行(列)，其值不變。

(6) 任一行(列)的每個元素可以分成兩行(列)的元素和，進而將此行列式拆成兩個行列式之和。

$$\begin{vmatrix} a_1 + d & a_2 & a_3 \\ b_1 + e & b_2 & b_3 \\ c_1 + f & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & a_2 & a_3 \\ e & b_2 & b_3 \\ f & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

□ 空間中三向量

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

所張出之平行六面體體積為 $V = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

※若三向量共平面，則此時 $V = 0$ ，即

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

□ 點法式

(1) 平面坐標系中，直線的點法式為

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

※直線過點 (x_0, y_0) 且 $\vec{n} = (a, b)$ 為法向量

(2) 空間坐標系中，平面的點法式為

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

※平面過點 (x_0, y_0, z_0) 且 $\vec{n} = (a, b, c)$ 為法向量



技高數學 C

重點清單 6



截距式

(1) 平面坐標系中，過 $(a, 0)$ 、 $(0, b)$ 兩點的直線

$$\text{方程式為 } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

(2) 空間坐標系中，過 $(a, 0, 0)$ 、 $(0, b, 0)$ 、

$$(0, 0, c) \text{ 三點的平面方程式為 } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

點到平面距離公式

空間中，點 (x_0, y_0, z_0) 到平面 $ax + by + cz + d = 0$

$$\text{的距離為 } \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

兩平面間距離公式

兩平行平面 $E_1: ax + by + cz + d_1 = 0$ 、

$E_2: ax + by + cz + d_2 = 0$ 之間的距離為

$$\frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

在平面坐標系中要求兩直線的交角，或在空間坐標系中要求兩平面的交角，可使用法向量來計算

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \rightarrow \text{求得 } \theta, \text{ 而另一夾角為 } 180^\circ - \theta$$

一次聯立方程式與矩陣

兩直線 $\begin{cases} L_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ L_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$

(1) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \Leftrightarrow$ 兩直線相交於一點 \Leftrightarrow 恰一組解

(2) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \Leftrightarrow$ 兩直線重合 \Leftrightarrow 無限多組解

(3) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \Leftrightarrow$ 兩直線平行 \Leftrightarrow 無解

克拉瑪公式(二元一次方程組)

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

(1) $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ 恰一組解 $(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta})$

(2) $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0 \Rightarrow$ 無限多組解

(3) $\Delta = 0$ ，但 Δ_x 、 Δ_y 至少有一不為 0 \Rightarrow 無解

克拉瑪公式(三元一次方程組)

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

(1) $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ 恰一組解 $(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta})$

(2) $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0 \Rightarrow$ 無限多組解

(3) $\Delta = 0$ ，但 Δ_x 、 Δ_y 、 Δ_z 至少有一不為 0 \Rightarrow 無解

齊次方程組 $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$ 必有 $(0, 0, 0)$ 之解，故只有唯一解或無限多組解兩種可能。

矩陣

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ 為 } m \times n \text{ 階矩陣，簡記}$$

為 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ，其中 a_{ij} 為 A 的第 (i, j) 元。

※ A 為有 m 列、 n 行的矩陣。

※ a_{ij} 為 A 的第 i 列、第 j 行的元。

係數矩陣與增廣矩陣

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \text{ 之}$$

$$\text{係數矩陣為 } \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{增廣矩陣為 } \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

矩陣的列運算

(1) 矩陣中的某兩列可互換位置。

(2) 可將矩陣中的某一行乘以一個不為 0 的數後，再加入到另一列。

高斯消去法

利用矩陣的列運算將增廣矩陣的左下方簡化成 0，稱為「三角化矩陣」，即為高斯消去法的解題技巧。

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{高斯消去法}} \begin{bmatrix} 1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ 0 & 1 & C_2 & D_2 \\ 0 & 0 & C_3 & D_3 \end{bmatrix}$$

□ 兩矩陣相等 \Leftrightarrow 對應元相等

□ 兩矩陣相加減 \Leftrightarrow 對應元相加減

□ 零矩陣 \Leftrightarrow 矩陣中之各元均為 0



技高數學 C

重點清單 7



- 任意矩陣 A 與同階的零矩陣 O 的和仍為 A ，即 $A+O=O+A=A$

※零矩陣為矩陣加法單位元素。

- 矩陣的係數積

實數 r 乘以一矩陣時，要將 r 乘到各元裡去。

$$\text{如：} r \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \times a & r \times b \\ r \times c & r \times d \end{bmatrix}$$

- 矩陣係數積的性質

r 、 s 均為實數，且 A 、 B 為同階矩陣，則

- $r(sA) = (rs)A$
- $(r+s)A = rA + sA$
- $r(A+B) = rA + rB$

- 對矩陣等式兩邊可行使等量公理加減，亦即可使用移項法則。

- 矩陣乘積

若矩陣 A 的行數 p 等於矩陣 B 的列數 q ，則矩陣 AB 可得一個 $p \times q$ 階的矩陣。

例如：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2 \times 3}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}_{3 \times 2},$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$c_{11} = a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} + a_{13} \times b_{31}$$

$$c_{21} = a_{21} \times b_{11} + a_{22} \times b_{21} + a_{23} \times b_{31}$$

$$c_{12} = a_{11} \times b_{12} + a_{12} \times b_{22} + a_{13} \times b_{32}$$

$$c_{22} = a_{21} \times b_{12} + a_{22} \times b_{22} + a_{23} \times b_{32}$$

- 矩陣的乘法單位元素

一個 n 階方陣，從左上到右下的對角線上各元都是 1，而其餘各元都是 0，稱為 n 階單位方陣，以 I_n 表示。

$$\text{例如：} I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 矩陣乘法的基本性質

r 為實數，矩陣 A 、 B 、 C 在下列運算均有意義，則：

- $(AB)C = A(BC)$
- $A(B+C) = AB+AC$ ； $(A+B)C = AC+BC$
- $r(AB) = (rA)B = A(rB)$
- 矩陣的乘法不滿足交換律，即 $AB \neq BA$ 。
- 補充 1

矩陣 A 、 B 均為非零矩陣時，其乘積有可能是零矩陣。

$$\text{如：} A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{則 } AB = O$$

- 補充 2

$AB = AC$ 且 $A \neq O$ ， $B = C$ 未必成立。

$$\text{如：} A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

此時 $AB = AC = O$ ，但 $B \neq C$

- 二階反方陣

$$\text{二階方陣 } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ 且 } \det(A) = \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$\text{則 } A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ 為 } A \text{ 的乘法反方陣，且滿足}$$

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

- 當一方陣的行列式為 0 時，其乘法反方陣不存在。

二元一次不等式與線性規劃

- a 、 b 、 c 為實數，則形如 $ax+by+c > 0$ (或 ≥ 0)、

$ax+by+c < 0$ (或 ≤ 0) 即為二元一次不等式。

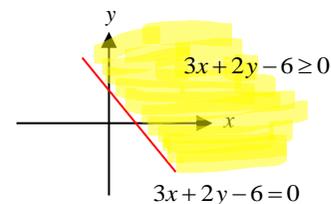
- 左右側半平面的判定

設直線 $L: ax+by+c=0$ 且「 $a > 0$ 」，則：

- $ax+by+c > 0$ 表在 L 右方且不含 L ，圖解直線 L 要畫虛線。

※若有等號則含 L ，圖解直線 L 要畫實線。

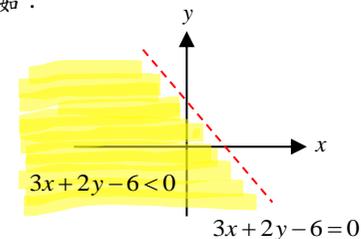
例如：



- $ax+by+c < 0$ 表在 L 左方且不含 L ，圖解直線 L 要畫虛線。

※若有等號則含 L ，圖解直線 L 要畫實線。

例如：



- ★ 若 $a < 0$ ，記得透過移項讓 x 的係數大於 0 後再去判斷左右側半平面。



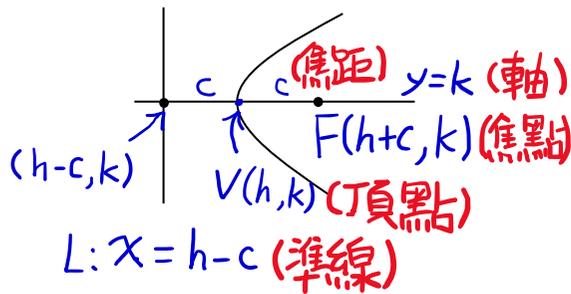
技高數學 C

重點清單 8

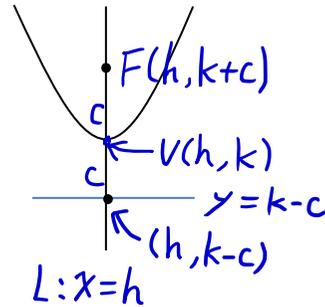


- 同側異側之判斷
 設兩點 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 與直線 $L: ax+by+c=0$
- (1) A 、 B 在 L 的同側(或稱 \overline{AB} 與 L 不相交), 則 $(ax_1+by_1+c)(ax_2+by_2+c) > 0$
 - (2) A 、 B 在 L 的異側, 則 $(ax_1+by_1+c)(ax_2+by_2+c) < 0$
 - (3) \overline{AB} 與 L 相交, 則 $(ax_1+by_1+c)(ax_2+by_2+c) \leq 0$

- 拋物線
- (1) 平面上, 動點 P 到一定點 F 與到定直線 L 等距離, 則 P 點的軌跡為一拋物線。
 - (2) 定義式: $\overline{PF} = d(P, L)$
 - (3) 左右型拋物線之標準式為 $(y-k)^2 = \pm 4c(x-h)$, 其中 $c > 0$ 。
 - ① 取正為開口向右, 取負為開口向左。
 - ② 頂點 $V(h, k)$ 。
 - ③ c 為焦距, $4c$ 為正焦弦長。
 - ④ 以 $(y-k)^2 = 4c(x-h)$ 為例之簡圖如下:

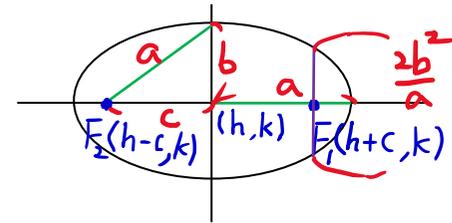


- (4) 上下型拋物線之標準式為 $(x-h)^2 = \pm 4c(y-k)$, 其中 $c > 0$ 。
 - ① 取正為開口向上, 取負為開口向下。
 - ② 頂點 $V(h, k)$ 。
 - ③ c 為焦距, $4c$ 為正焦弦長。
 - ④ 以 $(x-h)^2 = 4c(y-k)$ 為例之簡圖如下:

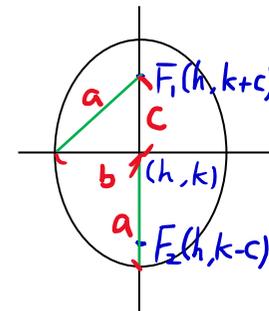


- 橢圓
- (1) 平面上, 動點 P 到滿足下列兩條件:
 - ① P 到兩定點 F_1 、 F_2 之距離和等於定值 $2a$
 ※ 定義式: $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$
 - ② $\overline{F_1F_2} = 2c < 2a$
 則 P 點的軌跡為一橢圓。
 - (2) 左右型橢圓之標準式為 $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, 其中 $c^2 = a^2 - b^2$
 - ① 中心坐標 (h, k) 。
 - ② 兩焦點坐標 $(h \pm c, k)$ 。
 - ③ 長軸長 $= 2a$; 短軸長 $= 2b$; 正焦弦長 $= \frac{2b^2}{a}$

- ④ 以 $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ 為例之簡圖如下:



- (3) 上下型橢圓之標準式為 $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$, 其中 $c^2 = a^2 - b^2$
 - ① 中心坐標 (h, k) 。
 - ② 兩焦點坐標 $(h, k \pm c)$ 。
 - ③ 長軸長 $= 2a$; 短軸長 $= 2b$; 正焦弦長 $= \frac{2b^2}{a}$
 - ④ 以 $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ 為例之簡圖如下:



- (4) 橢圓參數式:
 $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \rightarrow \begin{cases} x = h + a \cos \theta \\ y = k + b \sin \theta \end{cases} (0 \leq \theta < 2\pi)$



技高數學 C

重點清單 9



□ 雙曲線

(1) 平面上，動點 P 到滿足下列兩條件：

- ① P 到兩定點 F_1 、 F_2 之距離差之絕對值等於定值 $2a$

※ 定義式： $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$

② $\overline{F_1F_2} = 2c > 2a$

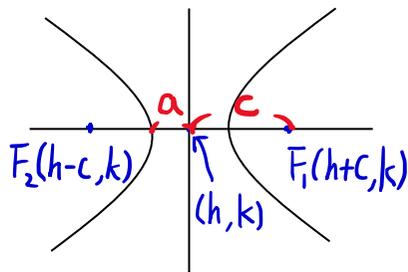
(2) 左右型雙曲線之標準式為

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \text{ 其中 } c^2 = a^2 + b^2$$

- ① 中心坐標 (h, k) 。
 ② 兩焦點坐標 $(h \pm c, k)$ 。
 ③ 貫軸長 $= 2a$ ；共軛軸長 $= 2b$ ；

正焦弦長 $= \frac{2b^2}{a}$

- ④ 以 $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ 為例之簡圖：



⑤ 兩漸近線方程式為 $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 0$

$$\rightarrow b^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2 = 0$$

$$\rightarrow (bx+ay+c_1)(bx-ay+c_2) = 0$$

$$\rightarrow L_1: bx+ay+c_1, L_2: bx-ay+c_2 = 0$$

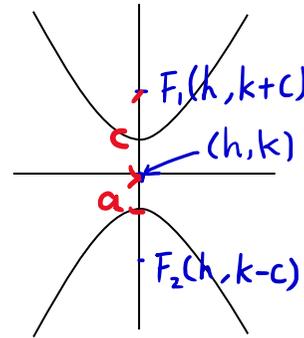
(3) 上下型雙曲線之標準式為

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1, \text{ 其中 } c^2 = a^2 + b^2$$

- ① 中心坐標 (h, k) 。
 ② 兩焦點坐標 $(h, k \pm c)$ 。
 ③ 貫軸長 $= 2a$ ；共軛軸長 $= 2b$ ；

正焦弦長 $= \frac{2b^2}{a}$

- ④ 以 $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ 為例之簡圖：



⑤ 兩漸近線方程式為 $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 0$

$$\rightarrow a^2(x-h)^2 - b^2(y-k)^2 = 0$$

$$\rightarrow (ax+by+c_1)(ax-by+c_2) = 0$$

$$\rightarrow L_1: ax+by+c_1 = 0, L_2: ax-by+c_2 = 0$$

(4) 若雙曲線 Γ 之兩漸近線方程式為

$$L_1: a_1x+b_1y+c_1=0, L_2: a_2x+b_2y+c_2=0$$

$$\text{則 } \Gamma: (a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2) = k \text{ (定值)}$$

□ 極限

(1) 設函數 $f(x)$ ，當 $x \rightarrow a$ 時， $f(x)$ 值會趨近定值 L ，則 L 為 $f(x)$ 在 $x=a$ 時之極限值，以 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 表示。

(2) 求 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 時，若以 $x=a$ 代入 $f(x)$ 中不合之情形，則可直接以 $x=a$ 代入 $f(x)$ 中求得極限值。

※ 洛必達法則：(學完微分之後可使用)

求 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)}$ 時，若 $f(a) = g(a) = 0$ 但 $f'(a) \neq 0$ ，則

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{f'(x)} = \frac{g'(a)}{f'(a)}$$

(3) 左極限、右極限：

① 若 $x < a$ ，則 x 由 $x=a$ 之左側趨近於 a 來求 $f(x)$ 的極限值，稱為左極限，以 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ 表示。

② 若 $x > a$ ，則 x 由 $x=a$ 之右側趨近於 a 來求 $f(x)$ 的極限值，稱為右極限，以 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 表示。

(4) 函數 $f(x)$ 的極限值存在且 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (即極限值等於函數值時)，稱 $f(x)$ 在 $x=a$ 處連續。

※ 左極限 = 右極限 \rightarrow 極限值存在

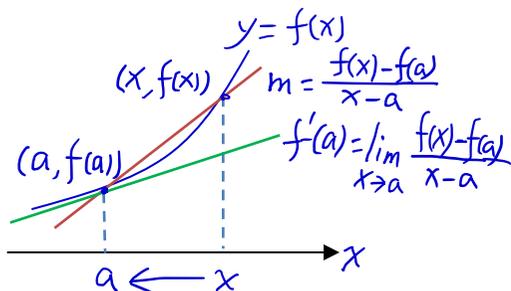


技高數學 C

重點清單 10



導數與導函數



(1) 導數第一型 $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

(2) 導數第二型 $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

(3) 導函數 $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

※ $f'(x)$ 為 $y = f(x)$ 的切線斜率函數，
以切點的 x 坐標代入 $f'(x)$ 中，即可得其切線斜率。

微分公式

(1) $y = f(x) \rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$

(2) $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

(3) $(uv)' = u'v + uv'$

(4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

(5) 若 y 是 u 的函數且 u 是 x 的函數，則

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ (隱函數的微分)

遞增、遞減與凹口方向

(1) $\begin{cases} f'(x) \geq 0 \rightarrow \text{遞增} \\ f''(x) > 0 \rightarrow \text{凹口向上} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} f'(x) \geq 0 \rightarrow \text{遞增} \\ f''(x) < 0 \rightarrow \text{凹口向下} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} f'(x) \leq 0 \rightarrow \text{遞減} \\ f''(x) > 0 \rightarrow \text{凹口向上} \end{cases}$

(4) $\begin{cases} f'(x) \leq 0 \rightarrow \text{遞減} \\ f''(x) < 0 \rightarrow \text{凹口向下} \end{cases}$



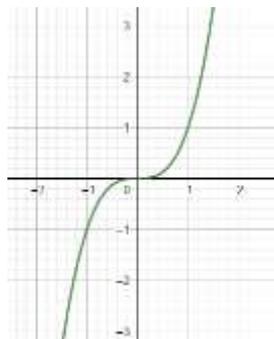
找極值用 $f'(x) = 0$ ，找反曲點用 $f''(x) = 0$

三次函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的圖形

(1) 以 $f(x) = x^3$ 為例：

$f'(x) = 3x^2 \geq 0 \rightarrow$ 恆為遞增

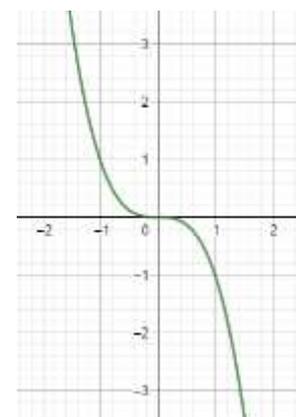
$f''(x) = 6x \rightarrow x = 0$ 處為反曲點



(2) 以 $f(x) = -x^3$ 為例：

$f'(x) = -3x^2 \leq 0 \rightarrow$ 恆為遞減

$f''(x) = -6x \rightarrow x = 0$ 處為反曲點



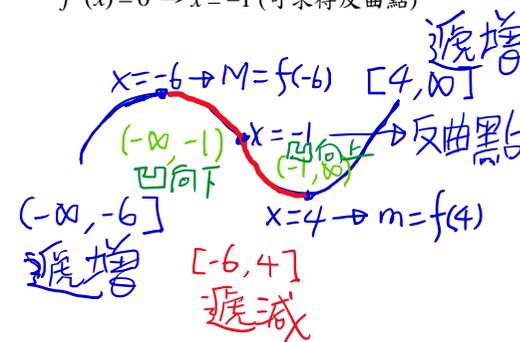
(3) 以 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 72x - 74$ 為例：

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 72 = 3(x-4)(x+6)$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = -6, 4$ (可求得極值)

$f''(x) = 6x + 6$

$f''(x) = 0 \rightarrow x = -1$ (可求得反曲點)





技高數學 C

重點清單 11

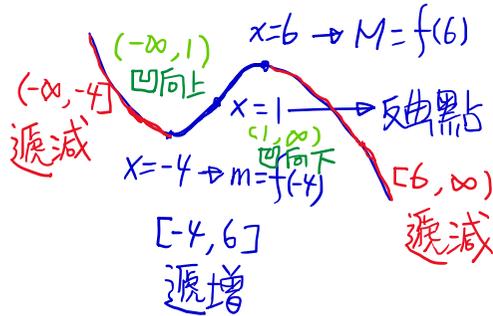


(4) 以 $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 72x + 20$ 為例：

$$f'(x) = -3x^2 + 6x + 72 = -3(x+4)(x-6)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = -4, 6 \text{ (可求得極值)}$$

$$f''(x) = -6x + 6 \rightarrow x = 1 \text{ (可求得反曲點)}$$



□ 無窮等比數列與無窮等比級數

(1) 無窮等比數列收斂的條件為 $-1 < r \leq 1$

(2) 無窮等比級數收斂的條件為 $-1 < r < 1$

$$\text{此時和 } S = \frac{a_1}{1-r}$$

□ 夾擠定理

已知數列 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ 、 $\langle c_n \rangle$ ，對所有 n 滿足

$a_n \leq b_n \leq c_n$ ，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$ ，則

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha。$$

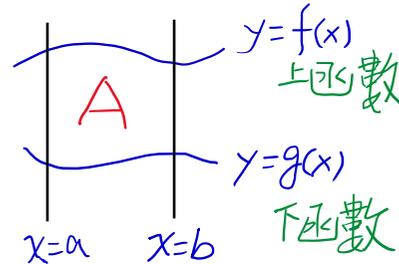
□ 不定積分

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (n \neq -1, C \text{ 為常數})$$

□ 定積分

$$\int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \Big|_a^b = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1})$$

□ 定積分求面積



$$A = \int_a^b (\text{上函數} - \text{下函數}) dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

□ 微積分基本定理

設 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 上可積分，若

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (a \leq x \leq b), \text{ 則 } F'(x) = f(x),$$

$$\text{且 } \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)。$$

□ 微積分在物理上的應用實例

(1) 變速度之位移量 $s = \int_a^b v(t) dt$

(2) 變力做功 $W = \int_a^b F(x) dx$

□ 變數變換實例

(1) $u = px + q \rightarrow du = p dx$

(2) $u = px^2 + qx + r \rightarrow du = (2px + q) dx$

(3) $u = px^3 + qx^2 + rx + s \rightarrow du = (3px^2 + 2qx + r) dx$
依此類推

※ 積分時，記得 x 的上下限要換成 u 的上下限

□ 積分範圍之切割

$f(x)$ 在區間 $[a, c]$ 上可積分，設 $a < b < c$ ，則

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

