乘法反方陣

預備知識：

①矩陣相乘

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

② $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$

③ 二階單位方陣 $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

④ 克拉瑪公式

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,\ \Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix},\ \Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta},\ y = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

說明：

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 & -① \\ a_2x+b_2y=c_2 & -② \end{cases}$$

①×b_2−②×b_1 消去 y 得 $(a_1b_2-a_2b_1)x=(b_2c_1-b_1c_2)$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta x}{\Delta}$$

②×a_1−①×a_2 消去 x 得 $(a_1b_2-a_2b_1)y=(a_1c_2-a_2c_1)$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

$$X=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \det(X)=\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}\neq 0$$

令 $X^{-1}=\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ 由 $\begin{cases} X^{-1}X=I_2 & —① \\ XX^{-1}=I_2 & —② \end{cases}$

① $X^{-1}X=I_2$

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ap+cq & bp+dq \\ ar+cs & br+ds \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} ap+cq=1 \\ bp+dq=0 \end{cases} \rightarrow p=\frac{\begin{vmatrix} 1 & c \\ 0 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}}=\frac{d}{\Delta}, \quad q=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}}=\frac{-b}{\Delta}$$

$$\begin{cases} ar+cs=0 \\ br+ds=1 \end{cases} \rightarrow r=\frac{\begin{vmatrix} 0 & c \\ 1 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}}=\frac{-c}{\Delta}, \quad s=\frac{\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}}=\frac{a}{\Delta}$$

故 $X^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{d}{\Delta} & \frac{-b}{\Delta} \\ \frac{-c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{bmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

② $XX^{-1}=I_2$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} ap+br=1 \\ cp+dr=0 \end{cases} \rightarrow p=\frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}=\frac{d}{\Delta}, \quad r=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}=\frac{-c}{\Delta}$$

$$\begin{cases} aq+bs=0 \\ cq+ds=1 \end{cases} \rightarrow q=\frac{\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}=\frac{-b}{\Delta}, \quad s=\frac{\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}=\frac{a}{\Delta}$$

故 $X^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{d}{\Delta} & \frac{-b}{\Delta} \\ \frac{-c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{bmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

補充：

餘因子法 求乘法反方陣

$$X=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

① $\det(X)=\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\neq 0$

② $A=\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$

先寫好 $\begin{bmatrix} + & - \\ - & + \end{bmatrix}$

③ $X^{-1}=\dfrac{1}{\Delta}A^{T}=\dfrac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

再填入 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

※ A^{T} 為 A 的轉置矩陣，即將 A 做行列互換。

例：$X=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

① $\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=9-10=-1\neq 0$

② $A=\begin{bmatrix} +3 & -2 \\ -5 & +3 \end{bmatrix}$

③ $X^{-1}=\dfrac{1}{-1}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ #

補充：

求三階方陣之乘法反方陣

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

① $\Delta = 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 2 + 2 = 1$

② $A = \begin{bmatrix} +(-3) & -(-1) & +2 \\ -1 & +0 & -(-1) \\ +6 & -1 & +(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -4 \end{bmatrix}$

③ $X^{-1} = \frac{1}{\Delta} A^T = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ ※