公式證明集

【算幾不等式】

設 $a, b \geq 0$，則 $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 。

[證明 1]

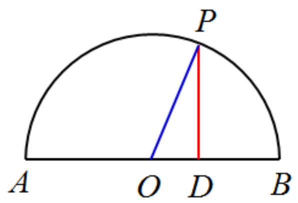
$a, b \geq 0 \rightarrow a=(\sqrt{a})^2$ ，$b=(\sqrt{b})^2$

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}&=\frac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab})\\&=\frac{1}{2}[(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}]\\&=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0\end{aligned}$$

故得 $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (當 $a=b$ 時等號成立)

[證明 2]

作圖如右：



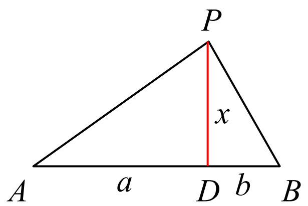
取 $\overline{AB}$ 上一點 D，設 $\overline{AD}=a$ ，$\overline{DB}=b$

以 O 為圓心，$\dfrac{1}{2}\overline{AB}$ 為半徑作半圓

過 D 點作 $\overline{PD} \perp \overline{AB}$ 交圓於 P 點

其中 $\overline{OP}=\dfrac{a+b}{2}$ ，$\overline{DP}=\sqrt{ab} \rightarrow \overline{OP} \geq \overline{DP} \rightarrow \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (當 $a=b$ 時等號成立)

※ 說明：



直角 ΔPAB 中，$\angle APB=90^\circ$ ，$\overline{PD} \perp \overline{AB}$

若 $\overline{AD}=a$ ，$\overline{DB}=b$ ，$\overline{PD}=x$

因 $\Delta PAD \sim \Delta BPD$ ，故 $\dfrac{\overline{PD}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{PD}} \rightarrow \dfrac{x}{a}=\dfrac{b}{x} \rightarrow x^2=ab \rightarrow x=\sqrt{ab}$

【算幾不等式】

若 $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n \geq 0$，則 $\dfrac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n}$，且等號成立 $\Leftrightarrow$ $a_1=a_2=a_3=\cdots\cdots=a_n$。

[證明]

1. n=2 時：

$$\frac{a_1+a_2}{2}-\sqrt{a_1a_2}=\frac{1}{2}(a_1+a_2-2\sqrt{a_1a_2})$$
$$=\frac{1}{2}[(\sqrt{a_1})^2+(\sqrt{a_2})^2-2\sqrt{a_1a_2}]$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2\geq 0$$

得 $\dfrac{a_1+a_2}{2}\geq\sqrt{a_1a_2}$

當 $a_1=a_2$ 時等號成立

2. n=4 時：

因為 $\dfrac{a_1+a_2}{2}\geq\sqrt{a_1a_2}$ 且 $\dfrac{a_3+a_4}{2}\geq\sqrt{a_3a_4}$

所以 $\dfrac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2}\geq\sqrt{(\frac{a_1+a_2}{2})(\frac{a_3+a_4}{2})}\geq\sqrt{(\sqrt{a_1a_2})(\sqrt{a_3a_4})}$

得 $\dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\geq\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$

當 $a_1=a_2=a_3=a_4$ 時等號成立

3. n=8 時：

因為 $\dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\geq\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$ 且 $\dfrac{a_5+a_6+a_7+a_8}{4}\geq\sqrt[4]{a_5a_6a_7a_8}$

所以 $\dfrac{\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}+\frac{a_5+a_6+a_7+a_8}{4}}{2}\geq\sqrt{(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4})(\frac{a_5+a_6+a_7+a_8}{4})}$

$\geq\sqrt{(\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4})(\sqrt[4]{a_5a_6a_7a_8})}$

得 $\dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8}{8}\geq\sqrt[8]{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$

當 $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=a_6=a_7=a_8$ 時等號成立

由 1～3 可推知當 $n=2^k$ (k 為正整數)時均成立。

4. n=3 時：

設 $x=\sqrt[3]{a_1}$ ， $y=\sqrt[3]{a_2}$ ， $z=\sqrt[3]{a_3}$ $\rightarrow$ x、y、$z\geq 0$

因 $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$$=\frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]\geq 0$$

故 $x^3+y^3+z^3-3xyz\geq 0$ $\rightarrow$ $\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\geq 3xyz$ $\rightarrow$ $\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\geq\sqrt[3]{a_1a_2a_3}$

當 $x=y=z$ 時等號成立，即 $a_1=a_2=a_3$ 時等號成立

5. n=5 時：

設 $d=\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5}\geq 0$ $\rightarrow$ $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=5d$

則利用 $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+d+d+d}{8}\geq\sqrt[8]{a_1a_2a_3a_4a_5ddd}$ 得

$\frac{(5d)+d+d+d}{8}\geq\sqrt[8]{(a_1a_2a_3a_4a_5)d^3}$ $\rightarrow$ $d\geq\sqrt[8]{(a_1a_2a_3a_4a_5)d^3}$ $\rightarrow$ $d^8\geq(a_1a_2a_3a_4a_5)d^3$

即 $d^5\geq a_1a_2a_3a_4a_5$ $\rightarrow$ $d\geq\sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4a_5}$ $\rightarrow$ $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5}\geq\sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4a_5}$

當 $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5$ 時等號成立

仿 5 之方法可證任意非 $n=2^k$ (k 為正整數)形式之 $n=2^k$ (k 為正整數)

例如：欲證明 n=12 時 $n=2^k$ (k 為正整數)

可設 $d=\frac{\sum_{i=1}^{12}a_i}{12}\geq 0$ $\rightarrow$ $\sum_{i=1}^{12}a_i=12d$

利用 $\frac{\sum_{i=1}^{12}a_i+d+d+d+d}{16}\geq\sqrt[16]{(\prod_{i=1}^{12}a_i)dddd}$ $\rightarrow$ $d\geq\sqrt[16]{(\prod_{i=1}^{12}a_i)d^4}$

得 $d^{16}\geq(\prod_{i=1}^{12}a_i)d^4$ $\rightarrow$ $d^{12}\geq\prod_{i=1}^{12}a_i$ $\rightarrow$ $d\geq\sqrt[12]{\prod_{i=1}^{12}a_i}$ $\rightarrow$ $\frac{\sum_{i=1}^{12}a_i}{12}\geq\sqrt[12]{\prod_{i=1}^{12}a_i}$

當 $a_1=a_2=\cdots\cdots=a_{12}$ 時等號成立

※ 其中 $\sum_{i=1}^{12}a_i=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{12}$ ，$\prod_{i=1}^{12}a_i=a_1\times a_2\times\cdots\cdots\times a_{12}$ 。

【雙重根號】

設 $a , b\geq 0$ 且 $a\geq b$ ，則 $\sqrt{(a+b)\pm 2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ 。

[證明]

$\because\ a\ ,\ b\geq 0$

$\therefore\ a+b\pm 2\sqrt{ab}=(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2\pm 2\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2$

而 $a\geq b\ \rightarrow\ \sqrt{a}\geq\sqrt{b}$

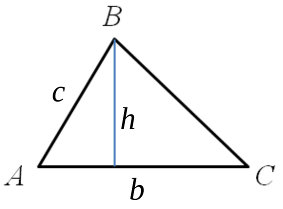
故得 $\sqrt{(a+b)\pm 2\sqrt{ab}}=\sqrt{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$

【已知三角形兩邊及其夾角 → 求面積】

ΔABC 中，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$，則

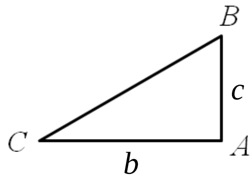
ΔABC 面積 $=\Delta=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{1}{2}ab\sin C$

[證明]



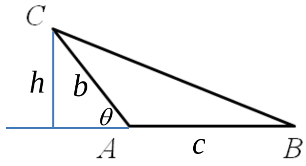
$h=c\cdot\sin A$

$\Delta=\dfrac{1}{2}bh=\dfrac{1}{2}bc\sin A$



$\sin A=\sin 90^\circ=1$

$\Delta=\dfrac{1}{2}bc=\dfrac{1}{2}bc\sin 90^\circ$



$\sin\theta=\sin(180^\circ-A)=\sin A$

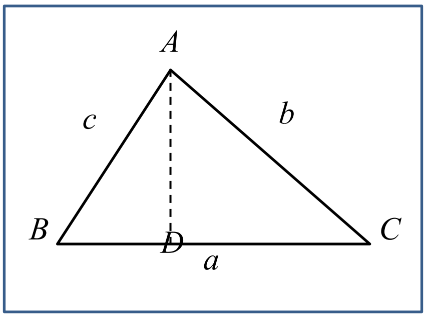
$h=b\cdot\sin\theta=b\cdot\sin A$

$\Delta=\dfrac{1}{2}ch=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

【正弦定理(sine law)】

ΔABC 中，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$，則 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，其中 R 為 ΔABC 之外接圓半徑。

[證明]



1. 如右圖，$\overline{AD}=c\cdot\sin B=b\cdot\sin C$

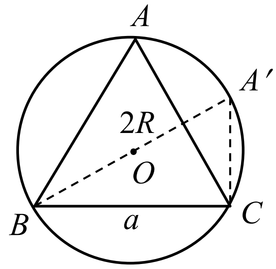
   ΔABC 面積 $=\Delta=\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin B=\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin C$

   同理可證 $\Delta=\dfrac{1}{2}\cdot c\cdot b\cdot\sin A$

2. $\Delta=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{1}{2}ab\sin C$

   同乘以 $\dfrac{2}{abc}$ 可得 $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$ $\rightarrow$ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

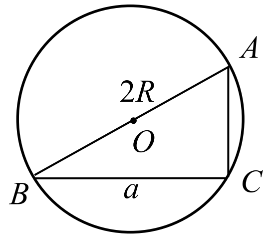
3. (1) 若 ΔABC 為銳角 Δ，則作圖如右：



   因為 $\angle A'=\angle A$，所以 $\sin A'=\dfrac{a}{2R}$ $\rightarrow$ $\sin A=\dfrac{a}{2R}$

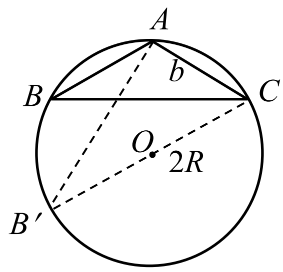
   故得 $\dfrac{a}{\sin A}=2R$ $\rightarrow$ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$。

   (2) 若 ΔABC 為直角 Δ，則作圖如右：



   $\sin A=\dfrac{a}{2R}$ $\rightarrow$ $\dfrac{a}{\sin A}=2R$ $\rightarrow$ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

   (3) 若 ΔABC 為鈍角 Δ，則作圖如右：

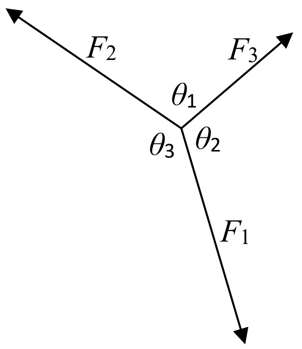


   因為 $\angle B'=\angle B$，所以 $\sin B'=\dfrac{b}{2R}$ $\rightarrow$ $\sin B=\dfrac{b}{2R}$

   故得 $\dfrac{b}{\sin B}=2R$ $\rightarrow$ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$。

【拉密定理(Lami's theorem)】

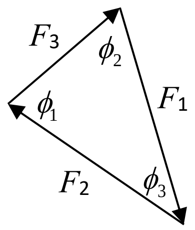
如下圖，如果三個共點力 F_1、F_2、F_3 的合力為零，那麼任一力與其相對角 θ_1、θ_2、θ_3 的正弦之比值均相等。



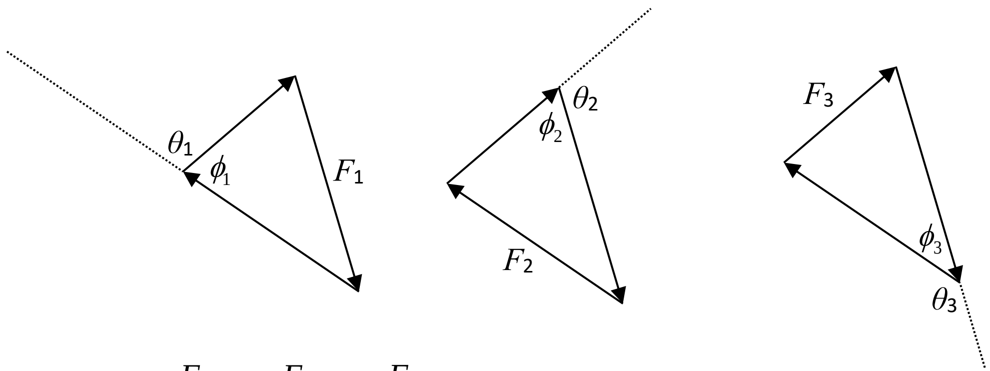
$$\Leftrightarrow \quad \frac{F_1}{\sin\theta_1}=\frac{F_2}{\sin\theta_2}=\frac{F_3}{\sin\theta_3}$$

[證明]

因為三個共點力 F_1、F_2、F_3 的合力為零，所以可將三力重組形成一個三角形(如下圖)，



其中 $\phi_1=180°-\theta_1$，$\phi_2=180°-\theta_2$，$\phi_3=180°-\theta_3$(如下列各圖)。



由正弦定理得 $\dfrac{F_1}{\sin\phi_1}=\dfrac{F_2}{\sin\phi_2}=\dfrac{F_3}{\sin\phi_3}$

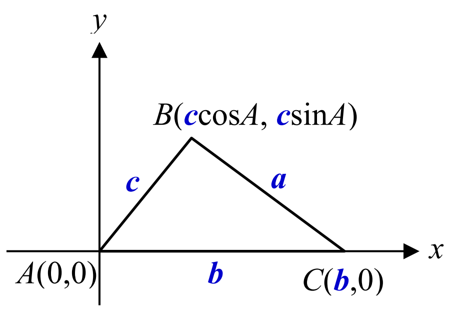
即 $\dfrac{F_1}{\sin(180°-\theta_1)}=\dfrac{F_2}{\sin(180°-\theta_2)}=\dfrac{F_3}{\sin(180°-\theta_3)} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{F_1}{\sin\theta_1}=\dfrac{F_2}{\sin\theta_2}=\dfrac{F_3}{\sin\theta_3}$

【餘弦定理(cosine law)】

ΔABC 中，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$，則 $\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{cases}$。

[證明]

作圖如右：



$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= a^2 \\ &= (c\cos A-b)^2+(c\sin A-0)^2 \\ &= c^2\cos^2 A-2bc\cos A+b^2+c^2\sin^2 A \\ &= b^2+c^2(\sin^2 A+\cos^2 A)-2bc\cos A \\ &= b^2+c^2-2bc\cos A \end{aligned}$$

同理可證 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ 與 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

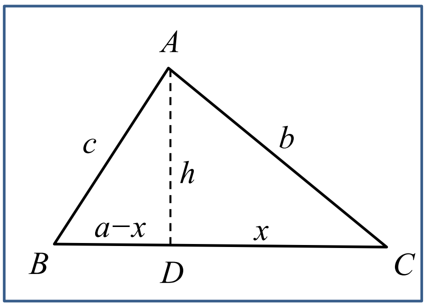
由 $\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \end{cases}$ 移項整理可得 $\begin{cases} \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{cases}$

【餘弦定理(cosine law)】

ΔABC 中，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$，則$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{cases}$。

[證明]

作圖如右：



$h^2=b^2-x^2=c^2-(a-x)^2$

由 $b^2-x^2=c^2-(a-x)^2=c^2-a^2+2ax-x^2$

得 $x=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a} \rightarrow \cos C=\dfrac{x}{b}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

移項整理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

而 $a-x=a-\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}=\dfrac{a^2-b^2+c^2}{2a}=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2a} \rightarrow \cos B=\dfrac{a-x}{c}=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

移項整理得 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

同理可證 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \rightarrow a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

【三角形之外接圓半徑與內切圓半徑】

ΔABC 中，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$，若 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，Δ 為 ΔABC 的面積，R 為 ΔABC 的外接圓半徑，r 為 ΔABC 的內切圓半徑，則 $R=\frac{abc}{4\Delta}$ 且 $r=\frac{\Delta}{s}$。

[證明]

(1) 由正弦定理得 $\sin C=\frac{c}{2R}$

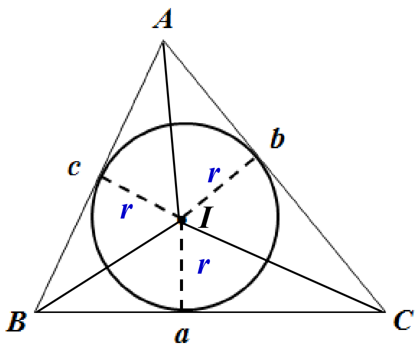
故 $\Delta=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\times\frac{c}{2R}=\frac{abc}{4R}$ $\rightarrow$ $R=\frac{abc}{4\Delta}$

(2) 作圖如右：

設 ΔABC 之內切圓圓心為 $\boldsymbol{I}$，則

$$\begin{aligned}\Delta &= \Delta IBC+\Delta ICA+\Delta IAB\\ &=\frac{1}{2}\times a\times r+\frac{1}{2}\times b\times r+\frac{1}{2}\times c\times r\\ &=\frac{1}{2}(a+b+c)\times r\\ &=s\times r\end{aligned}$$

故 $r=\frac{\Delta}{s}$



【和差角公式】

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

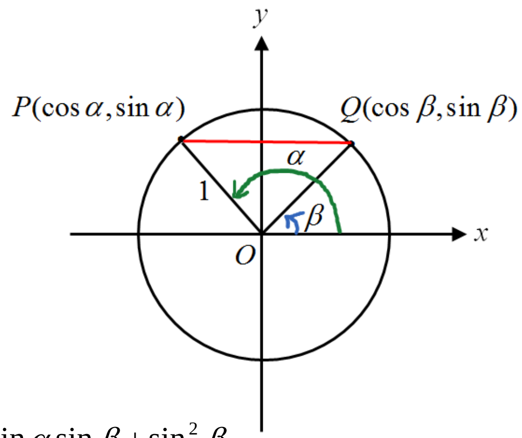
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

[證明]

作圖如右：



設圓 O 為單位圓，$\angle POQ=\alpha-\beta$，則

(1) 由兩點間距離公式得

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2&=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2\\&=\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta\\&=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\\&=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\end{aligned}$$

由餘弦定理得

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2&=1^2+1^2-2\times1\times1\times\cos(\alpha-\beta)\\&=2-2\cos(\alpha-\beta)\end{aligned}$$

比較兩式得知 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

(2) 由 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ 可得

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos[\alpha-(-\beta)]\\&=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)\\&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

(3) 由 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ 可得

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\cos[90^\circ-(\alpha+\beta)]\\&=\cos[(90^\circ-\alpha)-\beta]\\&=\cos(90^\circ-\alpha)\cos\beta+\sin(90^\circ-\alpha)\sin\beta\\&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

(4) 由 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ 可得

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=\sin[\alpha+(-\beta)]\\&=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)\\&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

(5) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$

分子分母同除以 $\cos\alpha\cos\beta$ 得

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha})(\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta})}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

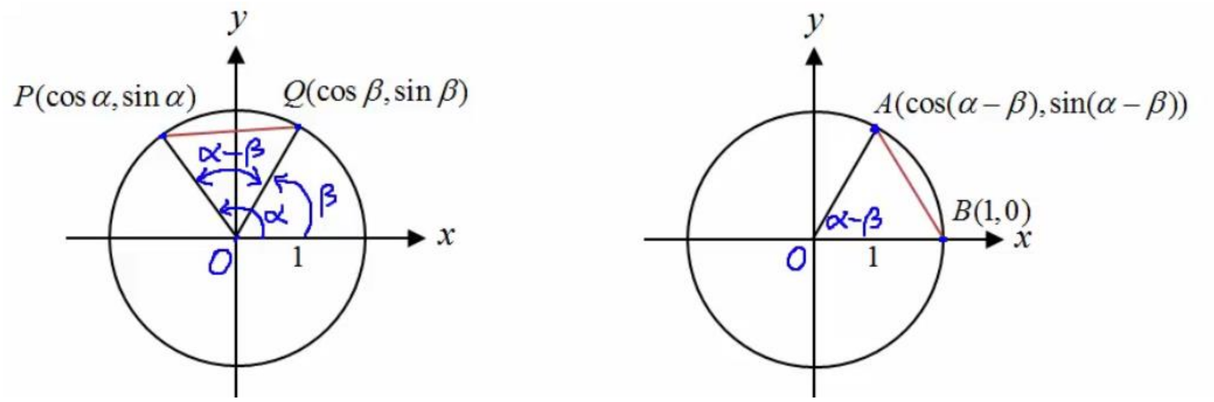
(6) 由 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ 得

$$\tan(\alpha-\beta)=\tan[\alpha+(-\beta)]=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

【和差角公式】

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

【證明】



$\overline{AB}^2=\overline{PQ}^2 \;\rightarrow\; [\cos(\alpha-\beta)-1]^2+[\sin(\alpha-\beta)-0]^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$

乘開整理得

$1-2\cos(\alpha-\beta)+1=1-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)+1$

故 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

【和差角公式】

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

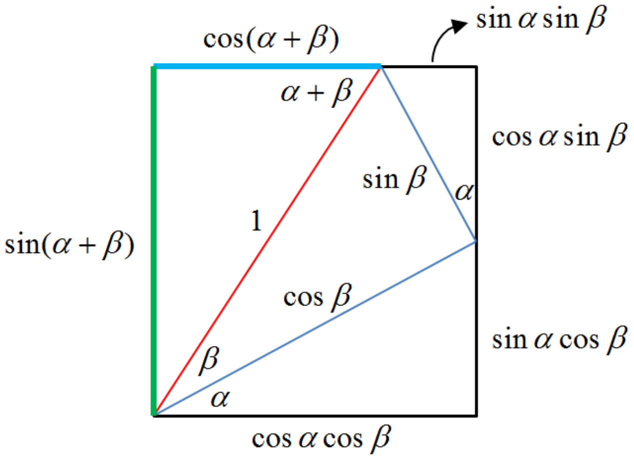
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

[證明]

(1) 作圖如下：



由圖可知：

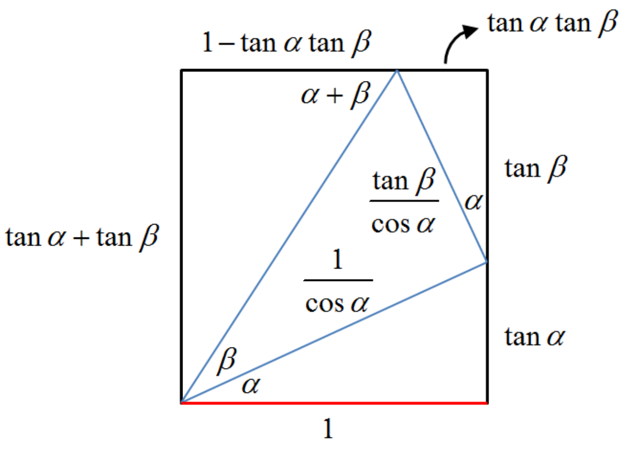
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

而 $\sin(\alpha-\beta)=\sin[\alpha+(-\beta)]$
$=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$
$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos[\alpha+(-\beta)]$
$=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$
$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

(2) 作圖如下：



由圖可知：

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

而 $\tan(\alpha-\beta)=\tan[\alpha+(-\beta)]=\dfrac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

【倍角公式】

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$

$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

[證明]

(1) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

取 $\alpha=\beta=\theta$ 得 $\sin(\theta+\theta) = \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta \rightarrow \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

(2) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

取 $\alpha=\beta=\theta$ 得 $\cos(\theta+\theta) = \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta \rightarrow \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

以 $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$ 代入得 $\cos 2\theta = \cos^2\theta - (1-\cos^2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$

※ $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \rightarrow \cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

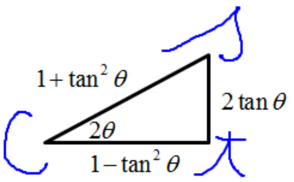
以 $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$ 代入得 $\cos 2\theta = (1-\sin^2\theta) - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

※ $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta \rightarrow \sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

(3) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

取 $\alpha=\beta=\theta$ 得 $\tan(\theta+\theta) = \dfrac{\tan\theta+\tan\theta}{1-\tan\theta\tan\theta} \rightarrow \tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

※ $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \rightarrow$



$\rightarrow \begin{cases} \sin 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} \\ \cos 2\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} \end{cases}$

(4) $\sin 3\theta = \sin(\theta + 2\theta) = \sin\theta\cos 2\theta + \cos\theta\sin 2\theta$

$= \sin\theta(1-2\sin^2\theta) + \cos\theta(2\sin\theta\cos\theta)$

$= \sin\theta - 2\sin^3\theta + 2\sin\theta\cos^2\theta$

$= \sin\theta - 2\sin^3\theta + 2\sin\theta(1-\sin^2\theta)$

$= \sin\theta - 2\sin^3\theta + 2\sin\theta - 2\sin^3\theta$

$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

(5) $\cos 3\theta = \cos(\theta + 2\theta) = \cos\theta \cos 2\theta - \sin\theta \sin 2\theta$

$$
\begin{aligned}
&= \cos\theta(2\cos^2\theta - 1) - \sin\theta(2\sin\theta\cos\theta) \\
&= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta\sin^2\theta \\
&= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta(1 - \cos^2\theta) \\
&= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta + 2\cos^3\theta \\
&= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta
\end{aligned}
$$

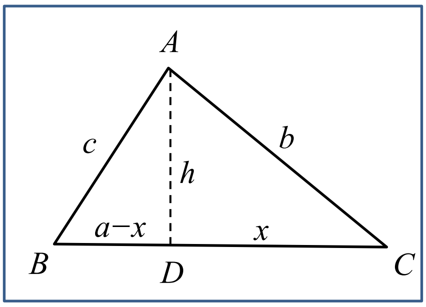
【海龍公式(Heron's formula)】

ΔABC 中，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$，若 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，則 ΔABC 面積=

$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$。

[證明]

如右圖，ΔABC 面積=$\Delta=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AD}=\frac{1}{2}ah$



而 $h^2=b^2-x^2=c^2-(a-x)^2$

由 $b^2-x^2=c^2-(a-x)^2=c^2-a^2+2ax-x^2$

可得 $x=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}$

故 $h^2=b^2-x^2$

$$=b^2-(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a})^2$$

$$=\frac{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2}$$

$$=\frac{(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2}$$

$$=\frac{(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)}{4a^2}$$

$$=\frac{[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]}{4a^2}$$

$$=\frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{4a^2}$$

所以 $\Delta^2=\frac{1}{4}a^2h^2$

$$=\frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{16}$$

$$=[\frac{1}{2}(a+b+c)][\frac{1}{2}(b+c-a)][\frac{1}{2}(c+a-b)][\frac{1}{2}(a+b-c)]$$

$$=s(s-a)(s-b)(s-c)$$

故得 $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

【海龍公式(Heron's formula)】

ΔABC 中，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$，若 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，則 ΔABC 面積=

$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$。

[證明]

ΔABC 面積$=\Delta=\frac{1}{2}ab\sin C$

$$
\begin{aligned}
\Delta^2 &= \frac{1}{4}a^2b^2\sin^2 C \\
&= \frac{1}{4}a^2b^2(1-\cos^2 C) \\
&= \frac{1}{4}a^2b^2[1-(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab})^2] \\
&= \frac{1}{4}a^2b^2[1-\frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2b^2}] \\
&= \frac{1}{4}a^2b^2[\frac{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2b^2}] \\
&= \frac{[(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2]}{16} \\
&= \frac{[(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)]}{16} \\
&= \frac{[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]}{16} \\
&= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{16} \\
&= [\frac{1}{2}(a+b+c)][\frac{1}{2}(b+c-a)][\frac{1}{2}(c+a-b)][\frac{1}{2}(a+b-c)] \\
&= s(s-a)(s-b)(s-c)
\end{aligned}
$$

故得 $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

【 $\sin 18^\circ$ 】

$\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

[證明 1]

設 $\theta = 18^\circ$ ，則 $5\theta = 90^\circ \rightarrow 2\theta = 90^\circ - 3\theta$

$\sin 2\theta = \sin(90^\circ - 3\theta) = \cos 3\theta$

以 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ 及 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ 代入得

$2\sin\theta\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \rightarrow 2\sin\theta = 4\cos^2\theta - 3$

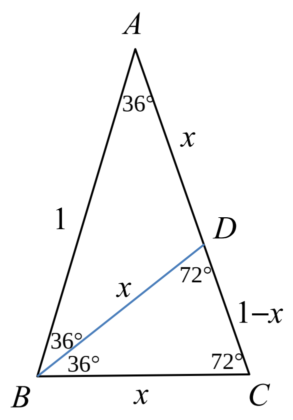
再以 $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$ 代入得 $2\sin\theta = 4(1-\sin^2\theta)-3$

移項整理得 $4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0 \rightarrow \sin\theta = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

因 $\sin 18^\circ > 0$ ，故得 $\sin 18^\circ = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ ，即 $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

[證明 2]

作圖如右：



等腰 ΔABC 中，頂角 $\angle A = 36^\circ$ ，

兩底角 $\angle ABC = \angle C = 72^\circ$ ，

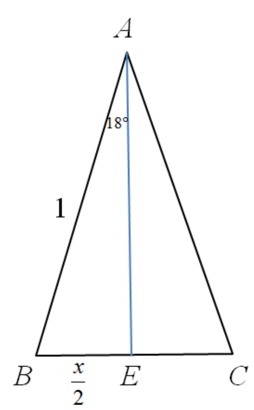
作 $\overline{BD}$ 平分 $\angle ABC$ ，交 $\overline{AC}$ 於 D 點，

取 $\overline{AB} = \overline{AC} = 1$ ，$\overline{BC} = x$ ，則 $\overline{BD} = \overline{DA} = x \rightarrow \overline{CD} = 1-x$ 。

由圖得知 $\Delta ABC \sim \Delta BCD \rightarrow \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{CD}}$

即 $\dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{1-x} \rightarrow x^2 = 1-x \rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

因為 $x > 0$ ，所以 $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \rightarrow x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$



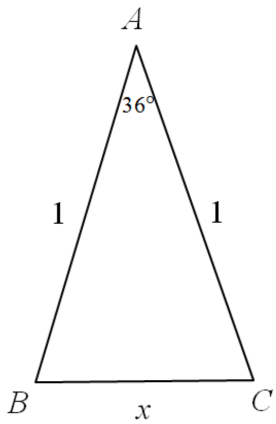
再作頂角的角平分線 $\overline{AE} \rightarrow \angle BAE = 18^\circ$ 且 $\overline{BE} = \dfrac{x}{2}$

故得 $\sin 18^\circ = \dfrac{x}{2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

【$\cos 36°$】

$\cos 36° = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

[證明]



作如右圖：

其中 $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

由餘弦定理得 $x^2 = 1^2 + 1^2 - 2\times 1\times 1\times \cos 36°$

$x^2 = 2 - 2\cos 36°$ $\rightarrow$ $(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2})^2 = 2 - 2\cos 36°$

$\rightarrow$ $\dfrac{6-2\sqrt{5}}{4} = 2 - 2\cos 36°$ $\rightarrow$ $\dfrac{3-\sqrt{5}}{4} = 1 - \cos 36°$

故得 $\cos 36° = 1 - \dfrac{3-\sqrt{5}}{4} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

【正餘弦疊合公式】

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\varphi)\text{ ，其中}\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}\text{。}$$

[證明]

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right)$$

$$\text{取}\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}\text{，則}$$

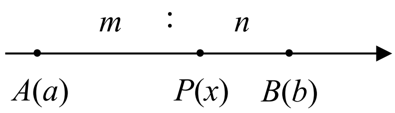
$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}(\sin\theta\cos\varphi+\cos\theta\sin\varphi)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\varphi)$$

【分點公式】

設 $A(a)$、$B(b)$為數線上兩相異點，若點 $P(x)$介於兩點之間且 $\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$，則 $x=\dfrac{na+mb}{m+n}$ 。

[證明]

作圖如右：



$\overline{AP}:\overline{BP}=(x-a):(b-x)=m:n$

$n(x-a)=m(b-x)$

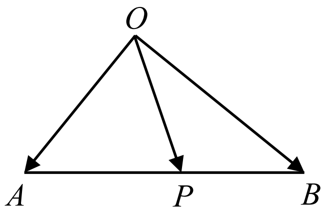
$nx-na=mb-mx$

移項整理得 $(m+n)x=na+mb \;\rightarrow\; x=\dfrac{na+mb}{m+n}$

※ 比例相加當分母，交叉相乘再相加當分子

【向量分點公式】

如右圖，$\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$，則 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$ 。



[證明]

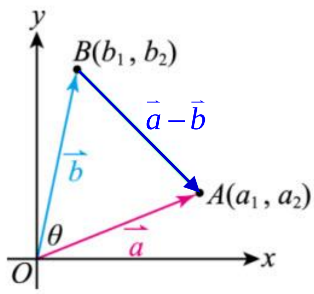
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}\\&=\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}\\&=\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\\&=(1-\frac{m}{m+n})\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}\\&=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

【向量的內積】

若 $\vec{a}=(a_1,a_2)$，$\vec{b}=(b_1,b_2)$，則 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \rightarrow \cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$。

[證明]

(1) 作圖如右：



$\overline{BA}=\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2)$

由 $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2$ 得

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2)$$
$$=\frac{1}{2}\{(a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-[(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2]\}$$
$$=\frac{1}{2}[a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2-(a_1^2-2a_1b_1+b_1^2+a_2^2+b_2^2-2a_2b_2)]$$
$$=\frac{1}{2}[2(a_1b_1+a_2b_2)]$$
$$=a_1b_1+a_2b_2$$

(2) ΔOAB 中，由餘弦定理得 $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

又 $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b})$

故得知 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \rightarrow \cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

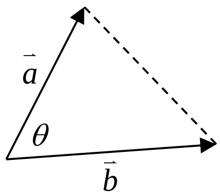
【求兩向量所張之三角形面積】

設 $\vec{a}=(a_1,a_2)$ ，$\vec{b}=(b_1,b_2)$ ，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 所張之三角形面積為 $\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right|$ 。

※ 若兩向量為空間向量，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 所張之三角形面積為 $\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$ 。

[證明]

設 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 所張之夾角為 θ



$\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 所張之三角形面積為

$$\Delta=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$ **(兩向量為空間向量時可使用此公式)**

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1{}^2+a_2{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a_1{}^2b_1{}^2+a_1{}^2b_2{}^2+a_2{}^2b_1{}^2+a_2{}^2b_2{}^2-(a_1{}^2b_1{}^2+2a_1b_1a_2b_2+a_2{}^2b_2{}^2)}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a_1{}^2b_2{}^2+a_2{}^2b_1{}^2-2a_1b_1a_2b_2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2)^2+(a_2b_1)^2-2(a_1b_2)(a_2b_1)}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2}$$

$$=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$$

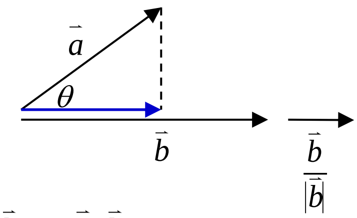
$$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right|$$

【正射影】

$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影為 $(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2})\vec{b}$ → 正射影長為 $\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}$

[證明]

如右圖：



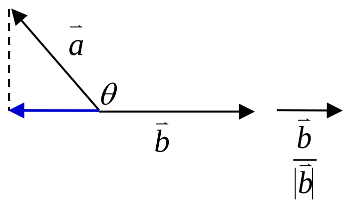
$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影為 $(|\vec{a}|\cos\theta)(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|})$

而 $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ → $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影為 $(|\vec{a}|\times\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|})(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|})=(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2})\vec{b}$

→ $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影長為 $\left|(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2})\vec{b}\right|=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|^2}\times|\vec{b}|=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}$

※ 說明：$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影為 $\underbrace{(|\vec{a}|\cos\theta)}_{\text{大小}}\underbrace{(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|})}_{\text{方向}}$

正射影之大小為 $|\vec{a}|\cos\theta$，**並不需要對 cosθ 加絕對值**，因為如果 θ 為鈍角，則 $|\vec{a}|\cos\theta$ 為負值，所產生的負號恰可提供使 $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ 反向，形成如下圖。



【柯西不等式】

設 a_1 、 a_2 、 b_1 、 b_2 均為**非零實數**，則 $(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2)^2$ 。

[證明 1] 設 $\vec{a}=(a_1,a_2)$ 、 $\vec{b}=(b_1,b_2)$ ，則 $|\vec{a}|^2=a_1^2+a_2^2$ ， $|\vec{b}|^2=b_1^2+b_2^2$ ， $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

由 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 得 $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta$

因 $-1\le\cos\theta\le1 \;\rightarrow\; 0\le\cos^2\theta\le1$

故 $|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\ge(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \;\rightarrow\; (a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2)^2$

當 $\cos^2\theta=1$ 時等號成立，此時 $\vec{a}\,//\,\vec{b} \;\rightarrow\; \frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}$ (兩向量互相平行，分量成比例)

[證明 2] 設 $y=(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2=(a_1^2+a_2^2)x^2-2(a_1b_1+a_2b_2)x+(b_1^2+b_2^2)$

則平方和 y 恆大於或等於 0 → 判別式 ≤0

即 $[-2(a_1b_1+a_2b_2)]^2-4(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\le0 \;\rightarrow\; (a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2)^2$

等號成立條件為 $(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2=0 \;\rightarrow\; a_1x-b_1=0$ 且 $a_2x-b_2=0 \;\rightarrow\; \frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}$

※ 一開始假設 a_1 、 a_2 、 b_1 、 b_2 均為**非零實數**是方便寫等號成立條件時均可當分母！

※ 證明 2 的方法可推知

$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 \;\rightarrow\; \frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\cdots\frac{b_n}{a_n}$ 時等號成立

【等差】

若 $<a_n>$ 為等差數列，a_1 為首項，d 為公差，n 為項數，a_n 為第 n 項，S_n 為首 n 項和，則：

(1) $a_n = a_1 + (n-1)d$

(2) ① $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ ② $S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$

(3) a、b、c 三數成等差數列 $\rightarrow$ $b = \frac{a+c}{2}$ 稱為 a、c 的等差中項

[證明]

(1) $<a_n>$ 為等差數列，a_1 為首項，d 為公差，則

$a_2 = a_1 + d$ ，$a_3 = a_1 + 2d$ ，$a_4 = a_1 + 3d$ ，……，$\underline{a_n = a_1 + (n-1)d}$

(2) $S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots\cdots + [a_1 + (n-3)d] + [a_1 + (n-2)d] + [a_1 + (n-1)d]$

$S_n = [a_1 + (n-1)d] + [a_1 + (n-2)d] + [a_1 + (n-3)d] + \cdots\cdots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1$

兩式相加得

$2S_n = [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + \cdots\cdots + [2a_1 + (n-1)d]$

$\rightarrow$ $2S_n = n \times [2a_1 + (n-1)d]$

$\rightarrow$ $\underline{S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]}$

$\rightarrow$ $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[a_1 + a_1 + (n-1)d] = \underline{\frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$

(3) a、b、c 三數成等差數列 $\rightarrow$ $b = a + d$ ，$c = a + 2d$

$a + c = a + a + 2d = 2a + 2d = 2(a + d) = 2b$ $\rightarrow$ $\underline{b = \frac{a+c}{2}}$

【等比】

若$< a_n >$為等比數列，a_1為首項，r為公比，n為項數，a_n為第n項，S_n為首n項和，則：

(1) $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

(2) $S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1}$ $(r \neq 1)$

(3) a、b、c三數成等比數列 $\rightarrow$ $b = \pm\sqrt{ac}$稱為a、c的等比中項

[證明]

(1) $< a_n >$為等比數列，a_1為首項，r為公比，則

$a_2 = a_1 \cdot r$，$a_3 = a_1 \cdot r^2$，$a_4 = a_1 \cdot r^3$，……，$\underline{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$

(2) $S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots\cdots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1}$

$r \cdot S_n = a_1 r + a_1 r^2 + \cdots\cdots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n$

兩式相減得

$S_n - r \cdot S_n = (a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots\cdots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1}) - (a_1 r + a_1 r^2 + \cdots\cdots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n)$

$\rightarrow$ $(1-r) \cdot S_n = a_1 - a_1 r^n = a_1 \cdot (1-r^n)$ $\rightarrow$ $\underline{S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1}}$ (其中$r \neq 1$)

(3) a、b、c三數成等差數列 $\rightarrow$ $b = a \cdot r$，$c = a \cdot r^2$

$a \cdot c = a \cdot (a \cdot r^2) = a^2 \cdot r^2 = (a \cdot r)^2 = b^2$ $\rightarrow$ $\underline{b = \pm\sqrt{ac}}$

【對數】

1. 對數定義：

當 $a>0$，$a\neq 1$，$b>0$ 時，方程式 $a^x=b$ 有唯一實數解 $x=\log_a b$。

$\log_a b$ 稱為「以 a 為底數時 b 的對數」，其中 a 稱為底數，b 稱為真數。

※ $\log_a b$ 有意義的條件為：① $a>0$　② $a\neq 1$　③ $b>0$ 均要成立

2. 對數的運算性質：

設以下對數均有意義，則

(1) $\log_a 1=0$

(2) $\log_a a=1$

(3) $\log_a(M\times N)=\log_a M+\log_a N$

[證明]

設 $\log_a M=m$，$\log_a N=n$

則 $a^m=M$，$a^n=N$ $\rightarrow$ $M\times N=a^m\times a^n=a^{m+n}$

故 $\log_a(M\times N)=m+n=\log_a M+\log_a N$

(4) $\log_a(\frac{M}{N})=\log_a M-\log_a N$

[證明]

設 $\log_a M=m$，$\log_a N=n$

則 $a^m=M$，$a^n=N$ $\rightarrow$ $\frac{M}{N}=\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

故 $\log_a(\frac{M}{N})=m-n=\log_a M-\log_a N$

(5) $\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b$

[證明]

設 $\log_a b=x$，則 $a^x=b$ $\rightarrow$ $(a^x)^{mn}=b^{mn}$ $\rightarrow$ $(a^m)^{nx}=(b^n)^m$ $\rightarrow$ $(a^m)^{\frac{n}{m}x}=(b^n)$

故得知 $\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}x=\frac{n}{m}\log_a b$

(6) $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ (換底公式) $\rightarrow$ $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$

[證明]

設 $\log_a b=x$ ，則 $a^x=b$ $\rightarrow$ $\log_c a^x=\log_c b$ $\rightarrow$ $x\log_c a=\log_c b$

故得知 $x=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ (若取 $c=b$，則得 $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$)

(7) $\log_a b\times\log_b c\times\log_c d=\log_a d$ (鏈鎖律)

[證明]

由換底公式得 $\log_a b\times\log_b c\times\log_c d=\dfrac{\log b}{\log a}\times\dfrac{\log c}{\log b}\times\dfrac{\log d}{\log c}=\dfrac{\log d}{\log a}=\log_a d$

(8) $x^{\log_a y}=y^{\log_a x}$ $\rightarrow$ $a^{\log_a b}=b$

[證明]

設 $x^{\log_a y}=t$ ，則

$\log_a x^{\log_a y}=\log_a t$ $\rightarrow$ $(\log_a y)(\log_a x)=\log_a t$ $\rightarrow$ $(\log_a x)(\log_a y)=\log_a t$

得 $\log_a y^{\log_a x}=\log_a t$ $\rightarrow$ $y^{\log_a x}=t=x^{\log_a y}$

【餘式定理】

設多項式 $f(x)$ 除以 $ax-b$ ，所得商式為 $Q(x)$ ，餘式為 r，則

$$f(x)=(ax-b)\cdot Q(x)+r \ \rightarrow \ r=f(\frac{b}{a})$$

[證明]

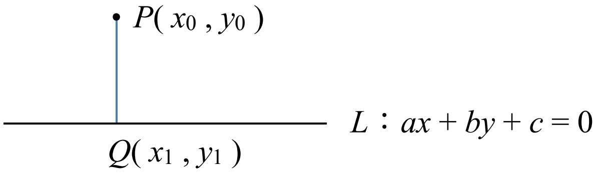
由多項式的除法原理得知，恰有兩個多項式 $Q(x)$ 與 r (常數多項式)滿足

$f(x)=(ax-b)\cdot Q(x)+r$ ，故得 $f(\frac{b}{a})=r$

【點到直線距離公式】

已知平面上一點 $P(x_0, y_0)$與直線 $L：ax + by + c = 0$，則

P 到 L 的距離為 $d(P,L)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$



【證明】(使用向量之證法)

如上圖，取 $L: ax+by+c=0$ 之法向量 $\vec{n}=(a,b)$ 作為 $\overleftrightarrow{PQ}$ 之方向向量

則 $\overleftrightarrow{PQ}:\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$，$t \in R$ $\quad\Rightarrow\quad$ $Q:\begin{cases} x_1 = x_0 + at \\ y_1 = y_0 + bt \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{PQ}=(x_1-x_0, y_1-t_0)=(at,bt)$$

因為 Q 在 L 上，所以以 Q 點坐標代入 L 方程式中得

$a(x_0+at)+b(y_0+bt)+c=0 \quad\Rightarrow\quad (ax_0+by_0+c)+(a^2+b^2)t=0$

$$\Rightarrow \quad t=-\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$$

故 $\overline{PQ}=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{(at)^2+(bt)^2}=\sqrt{(a^2+b^2)t^2}=\sqrt{(a^2+b^2)}\,|t|$

$$=\sqrt{(a^2+b^2)}\times\left|-\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}\right|=\sqrt{(a^2+b^2)}\times\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{a^2+b^2}}$$

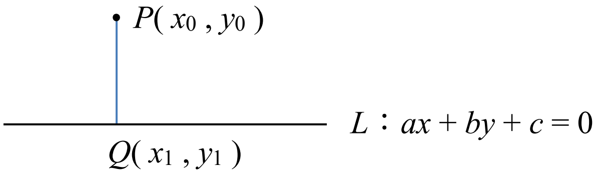
$$=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

故 $P(x_0, y_0)$到 $L：ax + by + c = 0$ 的距離為 $d(P,L)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

【點到直線距離公式】

已知平面上一點 $P(x_0, y_0)$與直線 L：$ax+by+c=0$，則

P 到 L 的距離為 $d(P,L)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$



【證明】(不使用向量之證法)

過 P 作 $\overline{PQ}\perp L$ 於 Q 點，則$\overleftrightarrow{PQ}$： $bx-ay=bx_0-ay_0$

解$\begin{cases} ax_1+by_1=-c \ \cdots ① \\ bx_1-ay_1=bx_0-ay_0 \ \cdots ② \end{cases}$求 Q 點坐標，過程如下：

①×a+②×b 得 $(a^2+b^2)x_1=-ca+b^2x_0-aby_0 \ \rightarrow \ x_1=\dfrac{-ca+b^2x_0-aby_0}{a^2+b^2}$

①×b−②×a 得 $(a^2+b^2)y_1=-cb-abx_0+a^2y_0 \ \rightarrow \ y_1=\dfrac{-cb-abx_0+a^2y_0}{a^2+b^2}$

整理得 $x_1=x_0-a\times\dfrac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$ 與 $y_1=y_0-b\times\dfrac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$

即 $Q(x_0-a\times\dfrac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}, y_0-b\times\dfrac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2})$ ⋯⋯ 投影點公式

$$\overline{PQ}=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}=\sqrt{(-a\times\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2})^2+(-b\times\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2})^2}$$

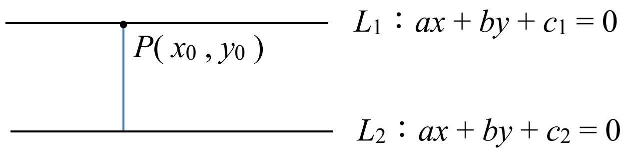
$$=\sqrt{(a^2+b^2)\times(\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2})^2}=\sqrt{\frac{(ax_0+by_0+c)^2}{a^2+b^2}}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

故 $P(x_0, y_0)$到 L：$ax+by+c=0$ 的距離為 $d(P,L)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

【兩平行線距離公式】

已知平面上直線 L_1：$ax+by+c_1=0$ 與直線 L_2：$ax+by+c_2=0$ 平行，則

L_1 與 L_2 的距離為 $d(L_1,L_2)=\dfrac{|c_2-c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$



【證明】

取 L_1 上一點 $P(x_0, y_0)$，則 $d(L_1,L_2)=d(P,L_2)=\dfrac{|ax_0+by_0+c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

而 P 在 L_1 上 $\rightarrow$ $ax_0+by_0+c_1=0$ $\rightarrow$ $ax_0+by_0=-c_1$

故 $d(L_1,L_2)=\dfrac{|-c_1+c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|c_2-c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

【級數公式】

(1) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

[證明]

(1) 利用 $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

$$(1+1)^2 = 1^2 + 2\times 1 + 1$$

$$(2+1)^2 = 2^2 + 2\times 2 + 1$$

$$(3+1)^2 = 3^2 + 2\times 3 + 1$$

$$\vdots$$

$$[(n-1)+1]^2 = (n-1)^2 + 2\times(n-1) + 1$$

$$+)\quad (n+1)^2 = n^2 + 2\times n + 1$$

$$(n+1)^2 = 1 + 2\times(1+2+3+\cdots+n) + n$$

$$n^2 + 2n + 1 = 1 + 2\times\sum_{k=1}^{n} k + n \;\rightarrow\; 2\times\sum_{k=1}^{n} k = n^2 + 2n + 1 - 1 - n = n^2 + n = n(n+1)$$

故得 $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$

[另證]

設 $S_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n$ …… ①

則 $S_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1$ …… ②

①+②得 $2S_n = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1) + (n+1) = n\cdot(n+1)$

故 $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ，即 $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$

(2) 利用 $(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1$

$$(1+1)^3 = 1^3+3\times1^2+3\times1+1$$

$$(2+1)^3 = 2^3+3\times2^2+3\times2+1$$

$$(3+1)^3 = 3^3+3\times3^2+3\times3+1$$

$$\vdots$$

$$[(n-1)+1]^3 = (n-1)^3+3\times(n-1)^2+3\times(n-1)+1$$

$$+)\ (n+1)^3 = n^3+3\times n^2+3\times n+1$$

$$(n+1)^3 = 1+3\times(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+3\times(1+2+3+\cdots+n)+n$$

$$n^3+3n^2+3n+1 = 1+3\times\sum_{k=1}^{n}k^2+3\times\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$\rightarrow\ 3\times\sum_{k=1}^{n}k^2 = \underline{n^3+3n^2+2n}-3\times\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\rightarrow\ 6\times\sum_{k=1}^{n}k^2 = 2\underline{n(n+1)(n+2)}-3n(n+1)$$

$$\rightarrow\ 6\times\sum_{k=1}^{n}k^2 = n(n+1)[2(n+2)-3] = n(n+1)(2n+1)$$

$$\rightarrow\ \boxed{\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

(3) 利用 $(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

$$(1+1)^4 = 1^4 + 4\times 1^3 + 6\times 1^2 + 6\times 1 + 1$$

$$(2+1)^4 = 2^4 + 4\times 2^3 + 6\times 2^2 + 4\times 2 + 1$$

$$(3+1)^4 = 3^4 + 4\times 3^3 + 6\times 3^2 + 4\times 3 + 1$$

$$\vdots$$

$$[(n-1)+1]^4 = (n-1)^4 + 4\times(n-1)^3 + 6\times(n-1)^2 + 4\times(n-1) + 1$$

$$+)\quad (n+1)^4 = n^4 + 4\times n^3 + 6\times n^2 + 4\times n + 1$$

$$(n+1)^4 = 1 + 4\times(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) + 6\times(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + 4\times(1+2+3+\cdots+n) + n$$

$$n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 = 1 + 4\times\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\times\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\times\sum_{k=1}^{n} k + n$$

$$\rightarrow\quad n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 3n - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) = 4\times\sum_{k=1}^{n} k^3$$

$$\rightarrow\quad 4\times\sum_{k=1}^{n} k^3 = n(n+1)(n^2+3n+3) - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1)$$

$$\rightarrow\quad 4\times\sum_{k=1}^{n} k^3 = n(n+1)[(n^2+3n+3) - (2n+1) - 2]$$

$$\rightarrow\quad 4\times\sum_{k=1}^{n} k^3 = n(n+1)(n^2+n) = [n(n+1)]^2$$

$$\rightarrow\quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{[n(n+1)]^2}{4}$$

$$\rightarrow\quad \boxed{\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}$$

【克拉瑪公式】

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}，\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1\neq 0，\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}，\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta} \\ y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta} \end{cases}$$

[證明]

設 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1\cdots① \\ a_2x+b_2y=c_2\cdots② \end{cases}$

$①\times b_2-②\times b_1$ 消去 y 得 $(a_1b_2-a_2b_1)x=(c_1b_2-c_2b_1) \rightarrow x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$

$②\times a_1-①\times a_2$ 消去 x 得 $(a_1b_2-a_2b_1)y=(a_1c_2-a_2c_1) \rightarrow y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$

【乘法反方陣】

$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 且 $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\neq 0 \;\rightarrow\; A^{-1}=\dfrac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ 滿足 $AA^{-1}=A^{-1}A=I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

[證明]

設 $A^{-1}=\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$

$$AA^{-1}=I_2 \;\rightarrow\; \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;\rightarrow\; \begin{bmatrix} ap+cq & bp+dq \\ ar+cs & br+ds \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} ap+cq=1 \\ bp+dq=0 \end{cases} \;\rightarrow\; p=\frac{\begin{vmatrix} 1 & c \\ 0 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}}=\frac{d}{\Delta}\;;\; q=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}}=\frac{-b}{\Delta}$$

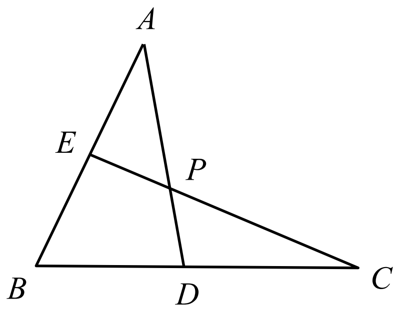
$$\begin{cases} ar+cs=0 \\ br+ds=1 \end{cases} \;\rightarrow\; r=\frac{\begin{vmatrix} 0 & c \\ 1 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}}=\frac{-c}{\Delta}\;;\; s=\frac{\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}}=\frac{a}{\Delta}$$

故 $A^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{d}{\Delta} & \dfrac{-b}{\Delta} \\ \dfrac{-c}{\Delta} & \dfrac{a}{\Delta} \end{bmatrix}=\dfrac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

而 $A^{-1}A=\dfrac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\dfrac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}=\dfrac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I_2$

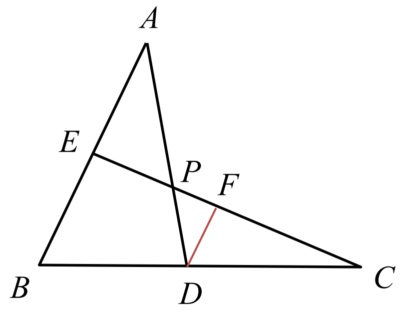
【孟氏定理(**Menelaus' theorem**)】

如右圖，$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}\times\frac{\overline{DP}}{\overline{PA}}=1$。



[證明]

1. 過 D 點作 $\overline{DF}\,//\,\overline{AB}$ 交 $\overline{CE}$ 於 F 點，如右圖。



2. $\because \Delta PAE \sim \Delta PDF$

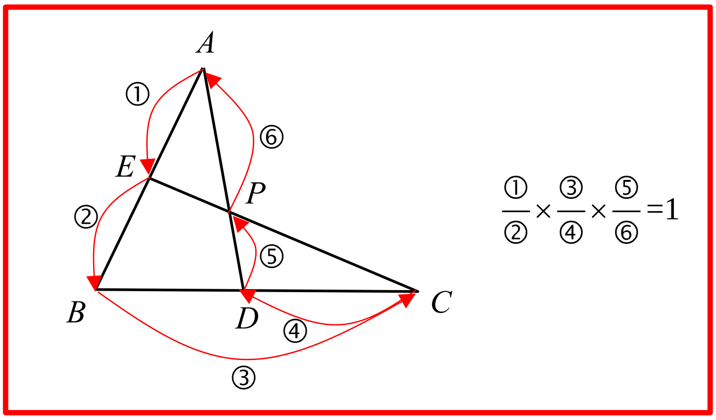
$\therefore \frac{\overline{PA}}{\overline{PD}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{DF}} \rightarrow \frac{\overline{AE}\times\overline{DP}}{\overline{PA}}=\overline{DF}$ ……①

3. $\because \Delta CFD \sim \Delta CEB$

$\therefore \frac{\overline{CD}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{FD}}{\overline{EB}} \rightarrow \frac{\overline{BC}}{\overline{EB}\times\overline{CD}}=\frac{1}{\overline{DF}}$ ……②

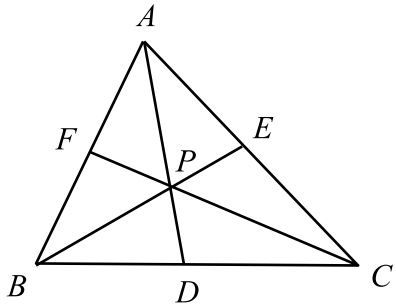
4 ①×②=1 $\rightarrow \frac{\overline{AE}\times\overline{DP}}{\overline{PA}}\times\frac{\overline{BC}}{\overline{EB}\times\overline{CD}}=1$

經整理得 $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}\times\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}\times\frac{\overline{DP}}{\overline{PA}}=1$



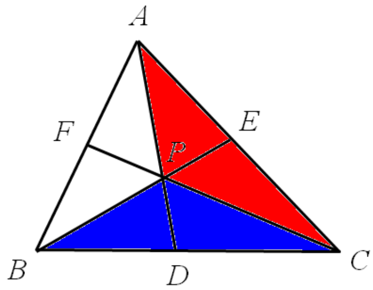
【西瓦定理(Ceva theorem)】

如右圖，$\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$。

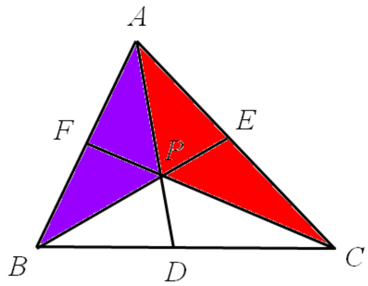


[證明]

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{S_{\Delta CFA}}{S_{\Delta CFB}}=\frac{S_{\Delta PFA}}{S_{\Delta PFB}}=\frac{S_{\Delta CFA}-S_{\Delta PFA}}{S_{\Delta CFB}-S_{\Delta PFB}}=\frac{S_{\Delta CPA}}{S_{\Delta CPB}}$$

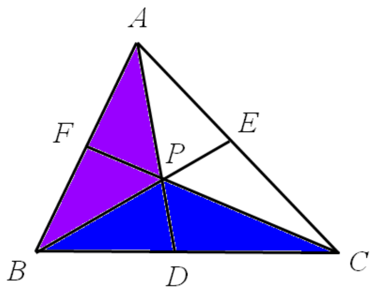


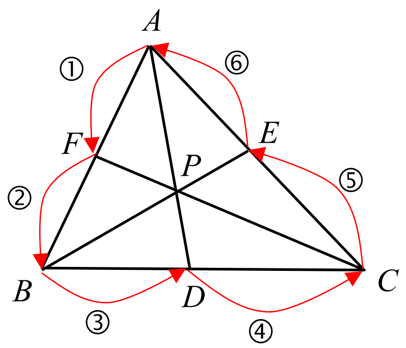
$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{S_{\Delta ADB}}{S_{\Delta ADC}}=\frac{S_{\Delta PDB}}{S_{\Delta PDC}}=\frac{S_{\Delta ADB}-S_{\Delta PDB}}{S_{\Delta ADC}-S_{\Delta PDC}}=\frac{S_{\Delta APB}}{S_{\Delta APC}}$$



$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\frac{S_{\Delta BEC}}{S_{\Delta BEA}}=\frac{S_{\Delta PEC}}{S_{\Delta PEA}}=\frac{S_{\Delta BEC}-S_{\Delta PEC}}{S_{\Delta BEA}-S_{\Delta PEA}}=\frac{S_{\Delta BPC}}{S_{\Delta BPA}}$$

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\frac{S_{\Delta CPA}}{S_{\Delta CPB}}\times\frac{S_{\Delta APB}}{S_{\Delta APC}}\times\frac{S_{\Delta BPC}}{S_{\Delta BPA}}=1$$



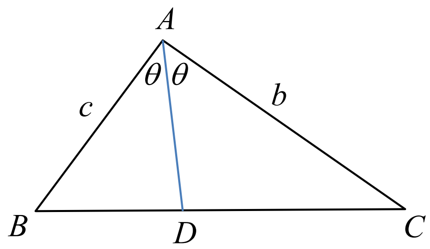


$$\frac{①}{②}\times\frac{③}{④}\times\frac{⑤}{⑥}=1$$

【三角形之分角線長公式】

ΔABC 中，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$，若 $\overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$ (如下圖)，則

$\overline{AD}=(\dfrac{2bc}{b+c})\cos\theta$ 。



[證明]

ΔABD 面積+ΔACD 面積=ΔABC 面積

$\rightarrow\ \dfrac{1}{2}\times\overline{AD}\times c\times\sin\theta+\dfrac{1}{2}\times\overline{AD}\times b\times\sin\theta=\dfrac{1}{2}\times b\times c\times\sin 2\theta$

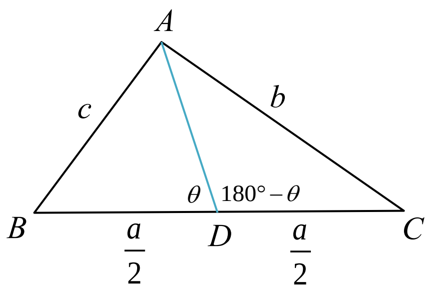
$\rightarrow\ \dfrac{1}{2}\times(b+c)\times\overline{AD}\times\sin\theta=\dfrac{1}{2}\times b\times c\times 2\sin\theta\cos\theta$

$\rightarrow\ \overline{AD}=(\dfrac{2bc}{b+c})\cos\theta$

【三角形之中線長公式】

ΔABC 中，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$，若 $\overline{AD}$ 平分 $\overline{BC}$ (如下圖)，則

$\overline{AD}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$



[證明]

設 $\angle ADB=\theta$，則 $\angle ADC=180^\circ-\theta$

ΔABD 中，$c^2=\overline{AD}^2+(\dfrac{a}{2})^2-2\times\overline{AD}\times\dfrac{a}{2}\times\cos\theta\ \rightarrow\ c^2=\overline{AD}^2+(\dfrac{a}{2})^2-\overline{AD}\times a\times\cos\theta\cdots$①

ΔACD 中，$b^2=\overline{AD}^2+(\dfrac{a}{2})^2-2\times\overline{AD}\times\dfrac{a}{2}\times\cos(180^\circ-\theta)\ \rightarrow$

$b^2=\overline{AD}^2+(\dfrac{a}{2})^2+\overline{AD}\times a\times\cos\theta\cdots$②

①+②得 $b^2+c^2=2[\overline{AD}^2+(\dfrac{a}{2})^2]\ \rightarrow$ 可得 $\overline{AD}=\sqrt{\dfrac{1}{2}(b^2+c^2)-(\dfrac{a}{2})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$

【三點共線】

P、A、B 三點共線 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ 且 $x+y=1$

【證明】

$(\Rightarrow)$ 因為 P、A、B 三點共線，所以可以找到一實數 t 使得 $\overrightarrow{PA}=t\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=-t\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

故得 $\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

取 $x=1-t$ 且 $y=t$ ，則「$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ 且 $x+y=1$」

$(\Leftarrow)$ 因為 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ 且 $x+y=1$

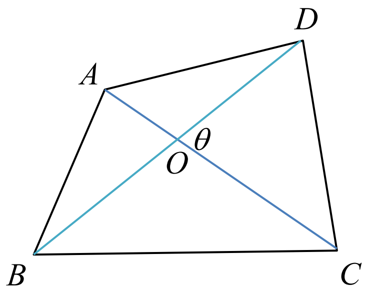
所以 $x=1-y$ $\rightarrow$ $\overrightarrow{OP}=(1-y)\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+y(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$\rightarrow$ $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=y(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$\rightarrow$ $\overrightarrow{AP}=y\overrightarrow{AB}$

故得知 P、A、B 三點共線

【已知兩對角線長及其夾角求四邊形面積】



如右圖，已知 $\overline{AC}=\ell$ 、 $\overline{BD}=m$ ，且 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 之一夾角為 θ ，則四邊形 $ABCD$ 之面積為 $\frac{1}{2}\ell m\sin\theta$ 。

[證明]

設 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 相交於 O 點， $\overline{OA}=a$ 、 $\overline{OB}=b$ 、 $\overline{OC}=c$ 、 $\overline{OD}=d$ ，

$\angle DOC=\theta \ \rightarrow \ \angle DOA=180°-\theta$

則四邊形 $ABCD$ 之面積=ΔOAB 面積+ΔOBC 面積+ΔOCD 面積+ΔODA 面積

$$=\frac{1}{2}ab\sin\theta+\frac{1}{2}bc\sin(180°-\theta)+\frac{1}{2}cd\sin\theta+\frac{1}{2}da\sin(180°-\theta)$$

$$=\frac{1}{2}ab\sin\theta+\frac{1}{2}bc\sin\theta+\frac{1}{2}cd\sin\theta+\frac{1}{2}da\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}(ab+bc+cd+da)\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}(a+c)(b+d)\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\ell m\sin\theta$$

【 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 】

ΔABC 中，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$，則 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$。

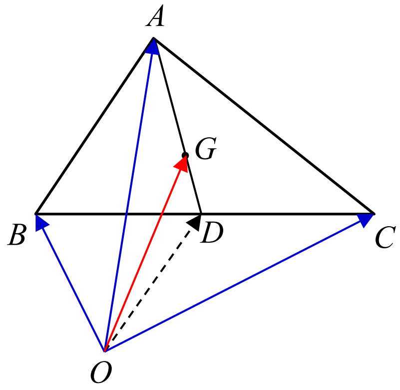
[證明]

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos A=c\times b\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$$

【重心】

ΔABC 中，D 為 $\overline{BC}$ 中點，G 為 ΔABC 之重心(ΔABC 之三中線交點)，則

$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，其中 O 為平面上任意點。



[證明]

D 為 $\overline{BC}$ 中點 $\rightarrow$ $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$

G 為 ΔABC 之重心 $\rightarrow$ $\overline{AG}:\overline{GD}=2:1$

由分點公式得

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$$

即 $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

【內心】

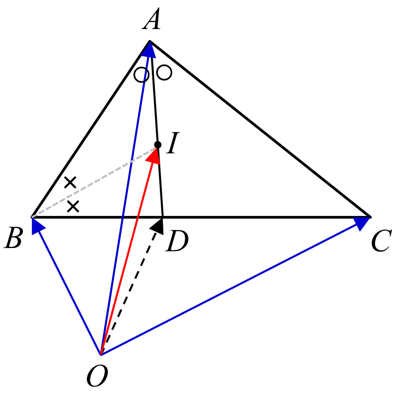
ΔABC 中，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$，I 為 ΔABC 之內心(ΔABC 三內角之角平分線交點)，則

$\overrightarrow{OI}=\dfrac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA}+\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}$，其中 O 為平面上任意點。

[證明]

如圖，$\overline{AD}$ 為 $\angle BAC$ 的角平分線 $\rightarrow$ $\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}=c:b$

由分點公式得



$$\overrightarrow{OD}=\frac{b}{b+c}\overrightarrow{OB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{OC}$$

$\overline{BI}$ 為 $\angle ABD$ 的角平分線 $\rightarrow$ $\overline{AI}:\overline{ID}=\overline{AB}:\overline{BD}$

而 $\overline{BD}=\dfrac{c}{b+c}\times\overline{BC}=\dfrac{ca}{b+c}$

故 $\overline{AI}:\overline{ID}=\overline{AB}:\overline{BD}=c:\dfrac{ca}{b+c}=(b+c):a$

由分點公式得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OI}&=\frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA}+\frac{b+c}{a+b+c}\overrightarrow{OD}\\&=\frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA}+\frac{b+c}{a+b+c}\left(\frac{b}{b+c}\overrightarrow{OB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{OC}\right)\\&=\frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA}+\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

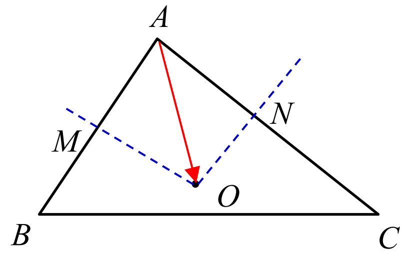
【外心】

ΔABC 中，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$，O 為 ΔABC 之外心(ΔABC 三邊之中垂線交點)。

若令 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則可得 $\begin{cases} \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 x+(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})y=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 \\ (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})x+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 y=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 \end{cases}$，解聯立方程式可得 x、y 之值。

[證明]

如右圖，O 為 ΔABC 之外心，M 為 $\overline{AB}$ 中點，N 為 $\overline{AC}$ 中點，則



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AO}\right|\cos\angle OAM=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AM}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{AO}\right|\cos\angle OAN=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AN}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$$

令 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}\cdot(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC})=\underline{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 x+(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})y=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2}$$

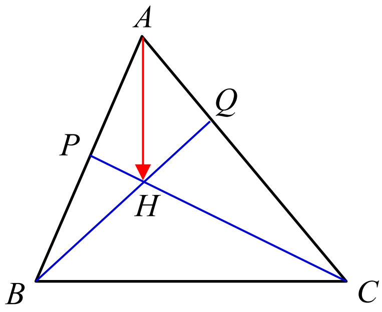
$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AC}\cdot(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC})=\underline{(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})x+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 y=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2}$$

【垂心】

ΔABC 中，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$，H 為 ΔABC 之垂心(ΔABC 三高之交點)。

若令 $\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則可得 $\begin{cases}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 x+(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})y=(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})\\(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})x+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 y=(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})\end{cases}$，解聯立方程式可得 x、y 之值。

[證明]



如右圖：

$\overline{CP}\perp\overline{AB}$，$\overline{BQ}\perp\overline{AC}$，$H$ 為 ΔABC 之垂心。

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CH})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$(\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CH}\ \rightarrow\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}=0)$

故 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}\cdot(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC})=\underline{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 x+(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})y=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$(\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BH}\ \rightarrow\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BH}=0)$

故 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AC}\cdot(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC})=\underline{(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})x+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 y=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}$

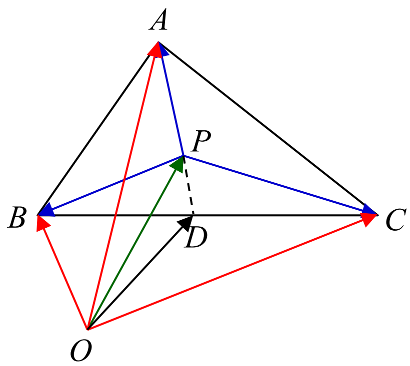
【面積比問題】

P 為 ΔABC 內部一點，且 $a\Delta PBC : a\Delta PCA : a\Delta PAB = x : y : z$，則

$$\overrightarrow{OP} = \frac{x}{x+y+z}\overrightarrow{OA} + \frac{y}{x+y+z}\overrightarrow{OB} + \frac{z}{x+y+z}\overrightarrow{OC}$$

※ 若將 O 點移至 P 點，則 $x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB} + z\overrightarrow{PC} = \vec{0}$

【證明】



如右圖，延長 $\overline{AP}$ 交 $\overline{BC}$ 於 D 點

則 $\overline{BD} : \overline{DC} = a\Delta PAB : a\Delta PCA = z : y$

由分點公式得

$$\overrightarrow{OD} = \frac{y}{y+z}\overrightarrow{OB} + \frac{z}{y+z}\overrightarrow{OC}$$

而 $a\Delta PBD = \dfrac{z}{y+z} \times a\Delta PBC$

故 $\overline{AP} : \overline{PD} = a\Delta PAB : a\Delta PBD = z : \dfrac{z}{y+z} \times x = (y+z) : x$

由分點公式得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{x}{x+y+z}\overrightarrow{OA} + \frac{y+z}{x+y+z}\overrightarrow{OD} \\ &= \frac{x}{x+y+z}\overrightarrow{OA} + \frac{y+z}{x+y+z}\left(\frac{y}{y+z}\overrightarrow{OB} + \frac{z}{y+z}\overrightarrow{OC}\right) \\ &= \frac{x}{x+y+z}\overrightarrow{OA} + \frac{y}{x+y+z}\overrightarrow{OB} + \frac{z}{x+y+z}\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

※ 若將 O 點移至 P 點，則

$$\overrightarrow{PP} = \frac{x}{x+y+z}\overrightarrow{PA} + \frac{y}{x+y+z}\overrightarrow{PB} + \frac{z}{x+y+z}\overrightarrow{PC} \;\to\; x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB} + z\overrightarrow{PC} = \vec{0}$$

【二階方陣之 Cayley–Hamilton Theorem】

$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，$I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$O_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

設 $f(x)=\begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix}=(a-x)(d-x)-bc=x^2-(a+d)x+(ad-bc)$

則 $f(x)=0 \rightarrow x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0$ 稱為矩陣 A 之特徵方程式

此時 $\underline{A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2=O_2}$

[證明]

$$A^2=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix} \cdots\cdots ①$$

$$(a+d)A=(a+d)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{bmatrix} \cdots\cdots ②$$

$$(ad-bc)I_2=(ad-bc)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} \cdots\cdots ③$$

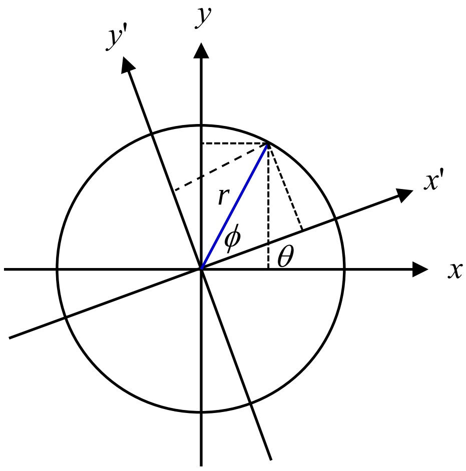
①−②+③得

$$\begin{aligned} A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2 &= \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^2+bc-a^2-ad+ad-bc & ab+bd-ab-bd+0 \\ ac+cd-ac-cd+0 & bc+d^2-ad-d^2+ad-bc \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= O_2 \end{aligned}$$

【坐標軸旋轉→ 點不動】

$$\underline{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}} \Leftrightarrow \underline{\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}$$

[證明]



如右圖：

$$\begin{cases} x' = r\cos\phi \\ y' = r\sin\phi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\phi+\theta) \\ &= r\cos\phi\cos\theta - r\sin\phi\sin\theta \\ &= x'\cos\theta - y'\sin\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= r\sin(\phi+\theta) \\ &= r\sin\phi\cos\theta + r\cos\phi\sin\theta \\ &= y'\cos\theta + x'\sin\theta \end{aligned}$$

整理得 $\begin{cases} x = \cos\theta\cdot x' - \sin\theta\cdot y' \\ y = \sin\theta\cdot x' + \cos\theta\cdot y' \end{cases} \rightarrow \underline{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}}$

令 $\begin{cases} \cos\theta\cdot x' - \sin\theta\cdot y' = x \cdots\cdots ① \\ \sin\theta\cdot x' + \cos\theta\cdot y' = y \cdots\cdots ② \end{cases}$

①$\times\cos\theta+$②$\times\sin\theta$ 得 $x' = \cos\theta\cdot x + \sin\theta\cdot y$

①$\times\sin\theta-$②$\times\cos\theta$ 得 $-y' = \sin\theta\cdot x - \cos\theta\cdot y \rightarrow y' = -\sin\theta\cdot x + \cos\theta\cdot y$

得 $\begin{cases} x' = \cos\theta\cdot x + \sin\theta\cdot y \\ y' = -\sin\theta\cdot x + \cos\theta\cdot y \end{cases} \rightarrow \underline{\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}$

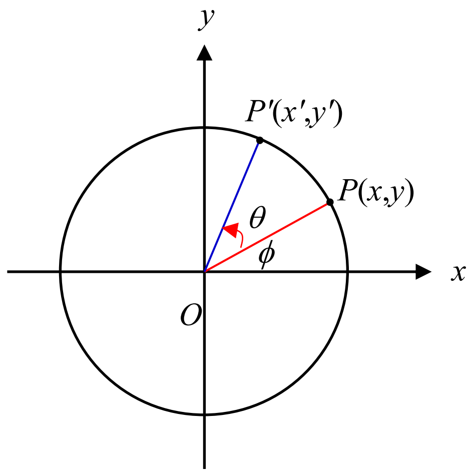
※ **坐標軸旋轉**可應用在將非標準式之圓錐曲線方程式化為標準式！

【點旋轉→ 坐標軸不動】

將平面上的點 $P(x,y)$，以坐標原點 O 為旋轉中心，**逆時針**旋轉 θ 角後，得新的點 $P'(x',y')$，則

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$ 。

[證明]



作圖如右，設 $\overline{OP} = \overline{OP'} = r$

則 $\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$

$$\begin{aligned} x' &= r\cos(\phi+\theta) \\ &= r\cos\phi\cos\theta - r\sin\phi\sin\theta \\ &= \cos\theta\cdot x - \sin\theta\cdot y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= r\sin(\phi+\theta) \\ &= r\sin\phi\cos\theta + r\cos\phi\sin\theta \\ &= \sin\theta\cdot x + \cos\theta\cdot y \end{aligned}$$

故 $\begin{cases} x' = \cos\theta\cdot x - \sin\theta\cdot y \\ y' = \sin\theta\cdot x + \cos\theta\cdot y \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

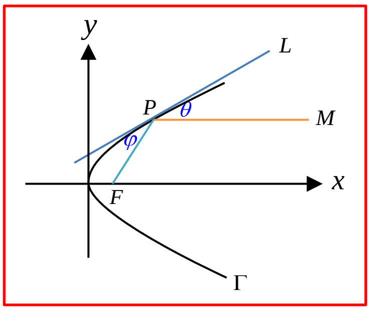
【圓錐曲線之光學性質 1】

過拋物線上任意點的切線與過切點之焦半徑所夾的**銳角**，等於此切線與過切點並平行於對稱軸的直線所夾的**銳角**。

[證明] 設拋物線$\Gamma: y^2=4cx$，$P(x_0, y_0)$為Γ上任意一點，$F(c, 0)$為Γ之焦點。

令 L 為過 P 點之切線，M 為過 P 點且與 x 軸平行的直線，如圖所示。

由切線公式可得 $L: y_0y=4c(\frac{x+x_0}{2}) \rightarrow L: y=\frac{2c}{y_0}x+\frac{2cx_0}{y_0} \rightarrow L$ 斜率$=\frac{2c}{y_0}$



設 L 與 M 之銳交角 θ，則 $\tan\theta=\frac{2c}{y_0}$

而 $\overline{PF}$ 的斜率$=\frac{y_0-0}{x_0-c}=\frac{y_0}{x_0-c}$

設 $\overline{PF}$ 與 L 之銳交角為 φ，則由**交角公式**可得

$$\tan\varphi=\frac{\frac{y_0}{x_0-c}-\frac{2c}{y_0}}{1+(\frac{y_0}{x_0-c})(\frac{2c}{y_0})}=\frac{y_0^2-2c(x_0-c)}{(x_0-c)y_0+2cy_0}=\frac{2c}{y_0}\cdot[\frac{\frac{y_0^2}{2c}-(x_0-c)}{(x_0-c)+2c}]$$

因為 P 在Γ上，所以 $y_0^2=4cx_0 \rightarrow \frac{y_0^2}{2c}=2x_0 \rightarrow \frac{\frac{y_0^2}{2c}-(x_0-c)}{(x_0-c)+2c}=\frac{2x_0-x_0+c}{x_0-c+2c}=\frac{x_0+c}{x_0+c}=1$

故 $\tan\varphi=\frac{2c}{y_0}=\tan\theta \rightarrow \varphi=\theta$

※ 切線公式：

若 $P(x_0, y_0)$為二次曲線$\Gamma: ax^2+cy^2+dx+ey+f=0$上一點，則過 P 之切線方程式為

$$L: a(x_0x)+c(y_0y)+d(\frac{x+x_0}{2})+e(\frac{y+y_0}{2})+f=0$$

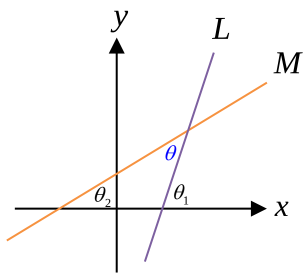
即方程式中變數作以下變換：$x^2\rightarrow x_0x$、$y^2\rightarrow y_0y$、$x\rightarrow\frac{x+x_0}{2}$、$y\rightarrow\frac{y+y_0}{2}$

※ **交角公式**：

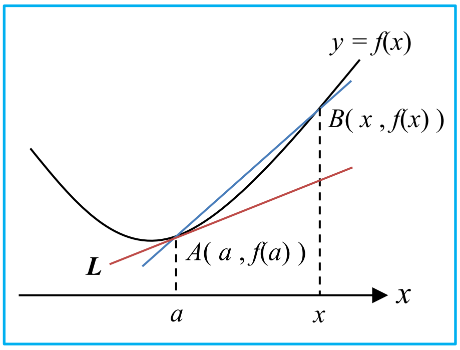
如右圖，設 L_1、L_2 兩直線的斜角為 θ_1、θ_2，斜率為 m_1、m_2，

則 $m_1=\tan\theta_1$、$m_2=\tan\theta_2$ (由圖得知此時 $m_1>m_2$)，

若 L_1、L_2 的銳交角為 θ，則 $\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$。



☆ 導數與導函數：



如右圖，割線 AB 之斜率為 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

切線 L 之斜率為 $f\,'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$f\,'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 稱為 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 處的**導數**

設 $x-a=h$，則 $x=a+h$ 且當 $x\to a$ 時 $h\to 0$

故 $f\,'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (**導數**的另一形式)

當 a 值變動，與 $f\,'(a)$ 的值形成一函數關係，則將 a 換成 x，可得

導函數 $f\,'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

☆ 多項式函數的微分：

$f(x)=x^n\,(n\in N)\ \to\ f\,'(x)=nx^{n-1}$

$$
\begin{aligned}
f\,'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{C_0^n x^n+C_1^n x^{n-1}h+C_2^n x^{n-2}h^2+\cdots\cdots+C_n^n h^n-x^n}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^n}+nx^{n-1}h+(C_2^n x^{n-2}h^2+\cdots\cdots+C_n^n h^{n-2})h^2-\cancel{x^n}}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}[nx^{n-1}+(C_2^n x^{n-2}h^2+\cdots\cdots+C_n^n h^{n-2})h]\\
&=nx^{n-1}
\end{aligned}
$$

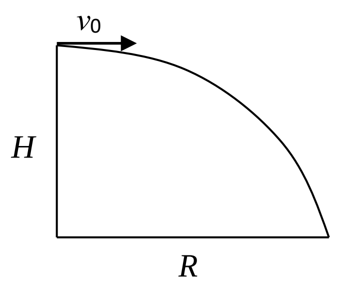
【水平拋射】

水平拋射可分解為水平等速直線運動及鉛直自由落體運動。

(1) 下落時間的計算 → 利用自由落體

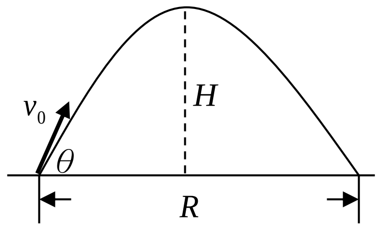
假設拋出後下落 H，則所花費時間為 $t_H = \sqrt{\dfrac{2H}{g}}$，

水平射程 $R = v_0 \times t_H$。



(2) $\begin{cases} x = v_0 t \\ y = -\dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases} \Rightarrow y = -\dfrac{g}{2{v_0}^2} x^2$ (軌跡方程式)

【斜向拋射】



斜向拋射可分解為水平等速直線運動及鉛直上拋運動。

設在地面以初速v_0、仰角θ拋出(重力加速度為g)：

(1) $\begin{cases} v_x = v_0 \cos\theta \\ v_y = v_0 \sin\theta - gt \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = v_0 \cos\theta\, t \\ y = v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$

由v_y可知，當到達最高點時，$v_y = 0 \rightarrow$ 達最高點所需時間$t_H = \dfrac{v_0 \sin\theta}{g}$。

由運動的獨立性和鉛直上拋的性質得知，上升和下落所費時間**相等**，

故整個飛行時間為 $T = 2t_H = \dfrac{2v_0 \sin\theta}{g}$。

(2) 由飛行時間為$T = \dfrac{2v_0 \sin\theta}{g}$得知，$R = v_0 \cos\theta\, T = \dfrac{2{v_0}^2 \sin\theta\cos\theta}{g} = \dfrac{{v_0}^2 \sin 2\theta}{g}$(水平射程)。

※ $\theta = 45°$時有最大射程。

※ $\theta + \phi = 90° \rightarrow \phi = 90° - \theta \rightarrow 2\phi = 180° - 2\theta \rightarrow \sin 2\phi = \sin(180° - 2\theta) = \sin 2\theta$

故$\dfrac{{v_0}^2 \sin 2\phi}{g} = \dfrac{{v_0}^2 \sin 2\theta}{g} \rightarrow$ 水平射程相同

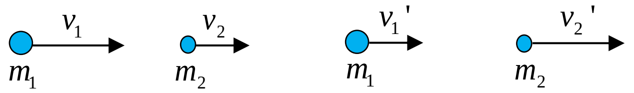
(3) 以$t_H = \dfrac{v_0 \sin\theta}{g}$代入 y 中整理可得$H = \dfrac{{v_0}^2 \sin^2\theta}{2g}$(最大高度)。

※ $\begin{cases} R = \dfrac{2{v_0}^2 \sin\theta\cos\theta}{g} \\ H = \dfrac{{v_0}^2 \sin^2\theta}{2g} \end{cases} \rightarrow \dfrac{H}{R} = \dfrac{\sin\theta}{4\cos\theta} \rightarrow \tan\theta = \dfrac{4H}{R}$

(4) 由$\begin{cases} x = v_0 \cos\theta\, t \\ y = v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$可得$y = \tan\theta\, x - \dfrac{g}{2{v_0}^2 \cos^2\theta}x^2$(軌跡方程式)。

【一維彈性碰撞之速度轉化公式】

碰撞前　　　　　　　　碰撞後



$$\begin{cases} v_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \dfrac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \\ v_2' = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \end{cases}$$

[證明]

動量守恆 $\rightarrow\ m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \cdots\cdots$①

$\rightarrow\ m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2) \cdots\cdots$②

動能守恆 $\rightarrow\ \dfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \dfrac{1}{2} m_2 v_2^2 = \dfrac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \dfrac{1}{2} m_2 v_2'^2$

$\rightarrow\ m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2)$

$\rightarrow\ \underline{m_1(v_1 - v_1')}(v_1 + v_1') = \underline{m_2(v_2' - v_2)}(v_2' + v_2)$

(由①得知可消去)

$\rightarrow\ v_1 + v_1' = v_2' + v_2 \cdots\cdots$③

由③得 $v_1' - v_2' = v_2 - v_1 \cdots\cdots$④

解 $\begin{cases} m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 + m_2 v_2 \cdots\cdots① \\ v_1' - v_2' = -v_1 + v_2 \cdots\cdots④ \end{cases}$

①+④$\times m_2$ 消去 v_2' 得

$(m_1 + m_2) v_1' = (m_1 - m_2) v_1 + 2m_2 v_2\ \rightarrow\ v_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \dfrac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2$

①−④$\times m_1$ 消去 v_1' 得

$(m_1 + m_2) v_2' = 2m_1 v_1 + (m_2 - m_1) v_2\ \rightarrow\ v_2' = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$

※ (1) $m_1 = m_2\ \rightarrow\ v_1' = v_2$ 且 $v_2' = v_1$ (碰撞後兩質點**速度交換**)

(2) $v_2 = 0 \rightarrow \begin{cases} v_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \\ v_2' = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \end{cases}$

① $m_1 = m_2 \rightarrow v_1' = 0$，$v_2' = v_1$ (碰撞後，m_1動能完全轉移給m_2)

② $m_1 > m_2 \rightarrow v_1' > 0$ (碰撞後，m_1仍繼續向前運動)

③ $m_1 >> m_2 \rightarrow v_1' \approx v_1$，$v_2' \approx 2v_1$

④ $m_1 << m_2 \rightarrow v_1' \approx -v_1$，$v_2' \approx 0$ (碰撞後，m_1以原速率反向彈回，m_2靜止)

※ 由$v_1 - v_2 = v_2' - v_1'$得知，一維彈性碰撞之恢復係數$e = \dfrac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} = 1$。

其中$v_1 - v_2$為接近速度，$v_2' - v_1'$為分離速度

※ 以質心速度v_c表示v_1'、v_2'：

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_c \rightarrow v_c = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

$$\rightarrow 2v_c = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

$$\rightarrow 2v_c - v_1 = (\frac{2m_1}{m_1 + m_2} - 1) v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

$$\rightarrow 2v_c - v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 = v_1'$$

同理，$2v_c - v_2 = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + (\dfrac{2m_2}{m_1 + m_2} - 1) v_2 \rightarrow 2v_c - v_2 = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 = v_2'$

故得知$\begin{cases} v_1' = 2v_c - v_1 \\ v_2' = 2v_c - v_2 \end{cases}$