克拉瑪公式

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 & —① \\ a_2x+b_2y=c_2 & —② \end{cases} \quad \Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},\ \Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix},\ \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

①$\times b_2$ − ②$\times b_1$ 消去 y 得

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=(c_1b_2-c_2b_1) \rightarrow \Delta\cdot x=\Delta_x$$

②$\times a_1$ − ①$\times a_2$ 消去 x 得

$$(a_1b_2-a_2b_1)y=(a_1c_2-a_2c_1) \rightarrow \Delta\cdot y=\Delta_y$$

故 $\begin{cases} \Delta\cdot x=\Delta_x \\ \Delta\cdot y=\Delta_y \end{cases}$

(1) $\Delta\neq 0$ 時 恰一組解

$\begin{cases} x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta} \\ y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta} \end{cases}$ (此時 $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$) (二直線交於一點)

(2) $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$ 時 無限多組解

$\begin{cases} 0\cdot x=0 \\ 0\cdot y=0 \end{cases}$ (此時 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$) (二直線重合)

(3) $\Delta=0$，但 Δ_x、Δ_y 至少一有不是 0 時 無解

(此時 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$) (二直線平行)

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases} \qquad \Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

(1) $\Delta \neq 0$ 時恰一組解 $(x,y,z)=\left(\frac{\Delta_x}{\Delta},\frac{\Delta_y}{\Delta},\frac{\Delta_z}{\Delta}\right)$

(2) $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ 時無限多組解

(3) $\Delta=0$，但 Δ_x、Δ_y、Δ_z 至少有一不為 0 時無解

降階法則

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \times \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \times \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \times \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$