【2024 版_新課綱_統測數學 C 歷屆試題_分單元】

ch01_坐標系與函數圖形

若點(a, b)落在第一象限且滿足$b=-a^2+10$，則a^2b的最大值為何？

(A) 10　(B) 21　(C) 23　(D) 25　【113*C08*】

Ans：(D)

$$a^2+b=10$$

$$\frac{a^2+b}{2} \geq \sqrt{a^2b}$$

$$5 \geq a^2b$$

$$a^2b \leq 25$$

在生成式人工智慧技術中，利用函數變換的概念可將資料的分布狀態作轉換。若有十筆原始資料 x(以●表示)分布在區間[2 , 5]，如圖(二)(a)，現將此十筆資料經線型函數 $f(x)$ 變換後，其分布區間為[4 , 13]，如如圖(二)(b)，則下列何者可為達成任務的 $f(x)$ ？

圖(二)(a)

圖(二)(b)

(A) $f(x)=2x+4$ (B) $f(x)=4x-4$ (C) $f(x)=3x-2$ (D) $f(x)=2x-3$ 【113*C10*】

Ans：(C)

(c) $f(x)=3x-2$

滿足 $f(2)=3\times2-2=6-2=4$

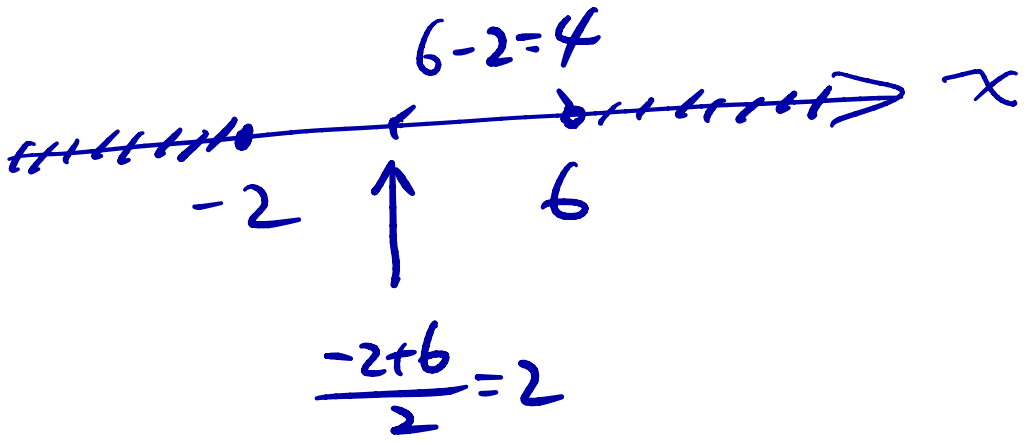
$f(5)=3\times5-2=15-2=13$

$[2,5] \xrightarrow{3x-2} [4,13]$

已知 A、B 為實數，若不等式 $|Ax+6| \geq B$ 的解為 $x \leq -2$ 或 $x \geq 6$，則 $2A+B=$？

(A) -12　(B) -6　(C) 6　(D) 12　【112*C11*】

Ans：(C)



$|x-2| \geq 4$

$|x-2| \times |-3| \geq 4 \times |-3|$

$|-3x+6| \geq 12$

$A=-3,\ B=12$

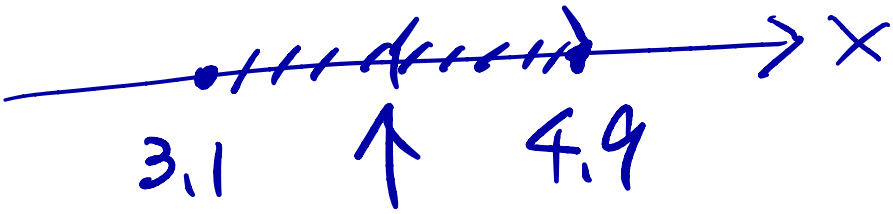
$2A+B=-6+12=6$ #

公益文教基金會調查技術型高中三年級學生每天手機使用時間介於 3.1 至 4.9 小時之間(含)。若 x(單位：小時)為其中一位參與調查的技術型高中學生每天手機使用時間，且將上述使用時間範圍用 $|x-a|\le b$ 來表示，則 $ab=$？

(A) 3.2　(B) 3.6　(C) 3.8　(D) 4.2　【111*C03*】

Ans：(B)

$4.9-4=0.9$



$$\frac{3.1+4.9}{2}=4$$

$$|x-4|\le 0.9$$

$$a=4,\ b=0.9$$

$$ab=4\times 0.9=3.6$$

不等式 $5x-4<x^2<x+2$ 的解為何？

(A) $-1<x<1$　　(B) $-1<x<2$　　(C) $-2<x<1$　　(D) $0<x<4$　　【111*C08*】

Ans：(A)

$5x-4<x^2 \rightarrow x^2-5x+4>0$

$\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & -4 \end{matrix}$

$\rightarrow (x-1)(x-4)>0$

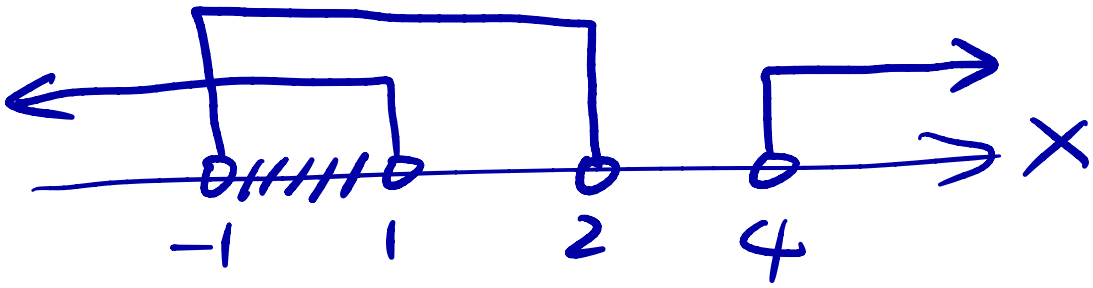
$\rightarrow x<1$ 或 $x>4$

$x^2<x+2 \rightarrow x^2-x-2<0$

$\begin{matrix} 1 & +1 \\ 1 & -2 \end{matrix}$

$\rightarrow (x+1)(x-2)<0$

$\rightarrow -1<x<2$



$-1<x<1$ #

若 x 為實數，則 $x^2-2+\dfrac{9}{x^2+2}$ 的最小值為何？

(A) 2　　(B) $\dfrac{5}{2}$　　(C) $\dfrac{13}{2}$　　(D) 6　　【110*C20*】

Ans：(A)

$\because\ x^2+2>0,\ \dfrac{9}{x^2+2}>0$

$\therefore\ x^2+2+\dfrac{9}{x^2+2}\geq 2\cdot\sqrt{\cancel{(x^2+2)}\cdot\left(\dfrac{9}{\cancel{x^2+2}}\right)}=6$

故 $x^2+2+\dfrac{9}{x^2+2}-4\geq 6-4$

$x^2-2+\dfrac{9}{x^2+2}\geq 2$ #

設 a、b 為實數，且不等式 $-x^2+6x+b>0$ 與不等式 $|x+a|<5$ 的解完全相同，則 $a+b=$？

(A) -13　(B) -7　(C) 7　(D) 13　【106*C12*】

Ans：(D)

$|x+a|<5 \rightarrow -5<x+a<5$

$\rightarrow -5-a<x<5-a$

$-x^2+6x+b>0 \rightarrow x^2\underline{-6}x-\underline{b}<0$

而 $[x-(-5-a)][x-(5-a)]<0$

$x^2-(5-a)x-(-5-a)x+(-5-a)(5-a)<0$

$\rightarrow x^2\underline{+2a}x-\underline{(25-a^2)}<0$

$\therefore 2a=-6 \rightarrow a=-3$

$b=25-(-3)^2=25-9=16$

故 $a+b=(-3)+16=13$ #

已知 a、b 為實數，若不等式 $x^2+ax\le b$ 之解為 $-5\le x\le 3$，則 $a+b=$？

(A) -17　(B) -13　(C) 13　(D) 17　【104*C01*】

Ans：(D)

$-5\le x\le 3 \rightarrow (x+5)(x-3)\le 0$

$\rightarrow x^2+2x-15\le 0$

$\rightarrow x^2+2x\le 15$

$\therefore a=2,\ b=15$

故 $a+b=2+15=17$ ※

下列方程式所對應的圖形中，何者恆在 x 軸的上方？

(A) $y=5x^2-3x+1$ (B) $y=3x^2+5x-1$ (C) $y=x^2-5x+3$ (D) $y=3x^2+x-5$【104*C02*】

Ans：(A)

(A) $(-3)^2-4\times5\times1<0$ (合)

(B) $5^2-4\times3\times(-1)>0$ (不合)

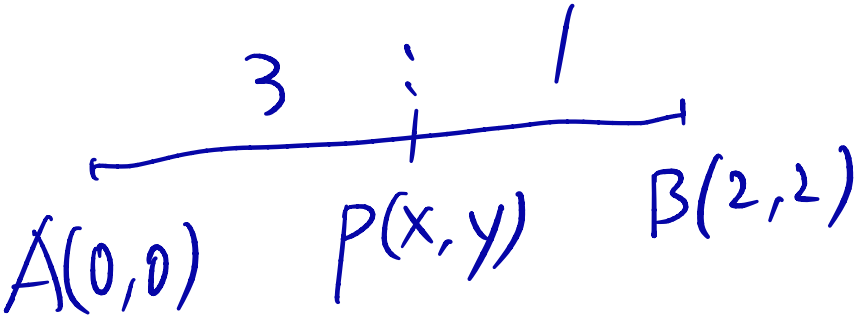
(C) $(-5)^2-4\times1\times3>0$ (不合)

(D) $1^2-4\times3\times(-5)>0$ (不合)

設 $A(0,0)$、$B(2,2)$ 為平面上二點，若 $P(m,n)$ 在線段 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{AP}:\overline{PB}=3:1$，則 $m+n$ 之值為何？

(A) 2　(B) 2.5　(C) 3　(D) 3.5　【103*C07*】

Ans：(C)



$$x=\frac{0+6}{4}=\frac{3}{2}$$

$$y=\frac{0+6}{4}=\frac{3}{2}$$

$$\therefore\ m=\frac{3}{2},\ n=\frac{3}{2}\longrightarrow m+n=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3$$

設 $x>0$，$y>0$，$x+y=6$，則 xy^2 之最大值為何？

(A) 16　(B) 18　(C) 25　(D) 32　【103*C18*】

Ans：(D)

$$x+y=6 \rightarrow x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y=6$$

而 $$\frac{x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y}{3} \geq \sqrt[3]{x\cdot\frac{1}{2}y\cdot\frac{1}{2}y}=\sqrt[3]{\frac{1}{4}xy^2}$$

$$2 \geq \sqrt[3]{\frac{1}{4}xy^2} \rightarrow 8 \geq \frac{1}{4}xy^2$$

$$\rightarrow xy^2 \leq 32 \ \#$$

下列何者為不等式 $3x^2-3x\le 6$ 之解？

(A) $x\le -2$ 或 $x\ge 1$　(B) $-2\le x\le 1$　(C) $-1\le x\le 2$　(D) $x\le -1$ 或 $x\ge 2$ 【101*C01*】

Ans：(C)

$$3x^2-3x\le 6$$

$$x^2-x\le 2$$

$$x^2-x-2\le 0$$

$$\begin{matrix}1 & +1\\ 1 & -2\end{matrix}$$

$$(x+1)(x-2)\le 0$$

$$-1\le x\le 2$$

在 xy 平面上，P 和 Q 為拋物線 $y=x^2$ 上的兩點，若 P 和 Q 的 x 坐標分別是 -1 和 2，則 P 和 Q 的距離為何？

(A) 1　(B) 2　(C) 4　(D) $3\sqrt{2}$　【101*C08*】

Ans：(D)

$y=(-1)^2=1 \rightarrow P(-1,1)$

$y=2^2=4 \rightarrow Q(2,4)$

$\overline{PQ}=\sqrt{(2+1)^2+(4-1)^2}$

$=\sqrt{9+9}$

$=\sqrt{18}$

$=3\sqrt{2}$ ※

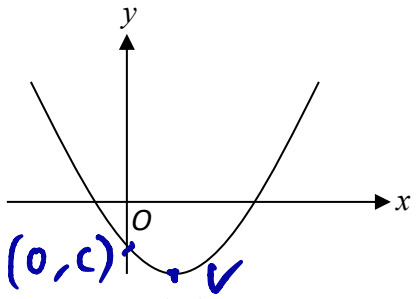
設 a、b、c 為實數，且二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形如圖(二)所示，則點 $P(b^2-4ac, abc)$ 在第幾象限？

(A) 第一象限

(B) 第二象限

(C) 第三象限

(D) 第四象限



圖(二)

【100C10】

Ans：(A)

開口向上 → $a>0$

在第四象限

$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right) \to (+,-)$

$b<0$, $b^2-4ac>0$

$(0,c) \to c<0$

故 $P(b^2-4ac, abc) \to (+,+)$

→第一象限

※

設 a、b 為實數，若一元二次不等式 $ax^2+x+b>0$ 的解集合為 $\left\{x \middle| -\frac{1}{5}<x<\frac{2}{3}, x\text{為實數}\right\}$，則 $2a+b=$？

(A) -5　(B) -4　(C) 4　(D) 5　【100*C23*】

Ans：(B)

$$-\frac{1}{5}<x<\frac{2}{3} \rightarrow (5x+1)(3x-2)<0$$

$$\rightarrow 15x^2-7x-2<0$$

$$\xrightarrow{\times(-\frac{1}{7})} -\frac{15}{7}x^2+x+\frac{2}{7}>0$$

$$\therefore a=-\frac{15}{7},\ b=\frac{2}{7}$$

故 $2a+b=-\frac{30}{7}+\frac{2}{7}=\frac{-28}{7}=-4$ ※

平面上兩點 $A(5,-1)$，$B(3,4)$。若 C 點在 y 軸上，且滿足 $\overline{AC}=\overline{BC}$，則 C 點坐標為何？

(A) $(0,-\frac{1}{10})$　(B) $(0,-\frac{1}{15})$　(C) $(0,\frac{1}{15})$　(D) $(0,\frac{1}{10})$　【98*C01*】

Ans：(A)

設 $C(0,y)$

$\because \overline{AC}=\overline{BC}$

$\therefore \overline{AC}^2=\overline{BC}^2$

$25+(y+1)^2=9+(y-4)^2$

$25+\cancel{y^2}+2y+1=9+\cancel{y^2}-8y+16$

$10y=-1 \rightarrow y=-\frac{1}{10}$

故得 $C(0,-\frac{1}{10})$ #

若 $180° < \theta < 270°$ 且 $\sin\theta = \sin 2024°$，則 $\theta =$？

(A) 204°　(B) 214°　(C) 224°　(D) 234°　【113*C03*】

Ans：(C)

$$\begin{array}{r} 2024 \\ -1800 \\ \hline 224 \end{array}$$

224°為2024°的最小正同界角

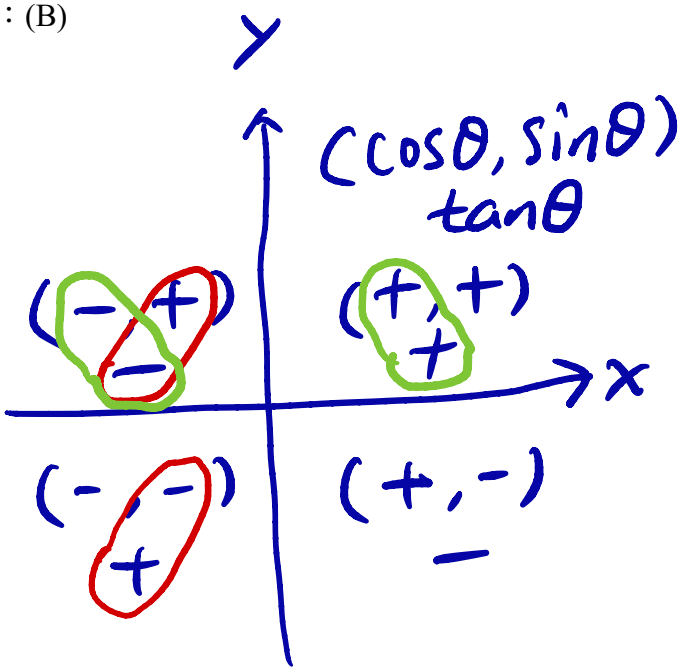
$180° < 224° < 270°$

$\therefore \theta = 224°$ ※

已知 $\sin\theta\tan\theta<0$ 且 $\cos\theta\cot\theta>0$，則 θ 為第幾象限角？

(A) 一　(B) 二　(C) 三　(D) 四　【113*C06*】

Ans：(B)



$\sin\theta\tan\theta<0$

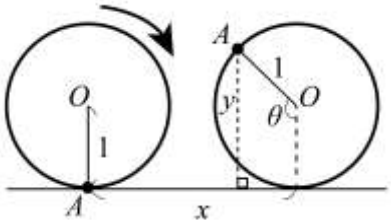
+	−
−	+

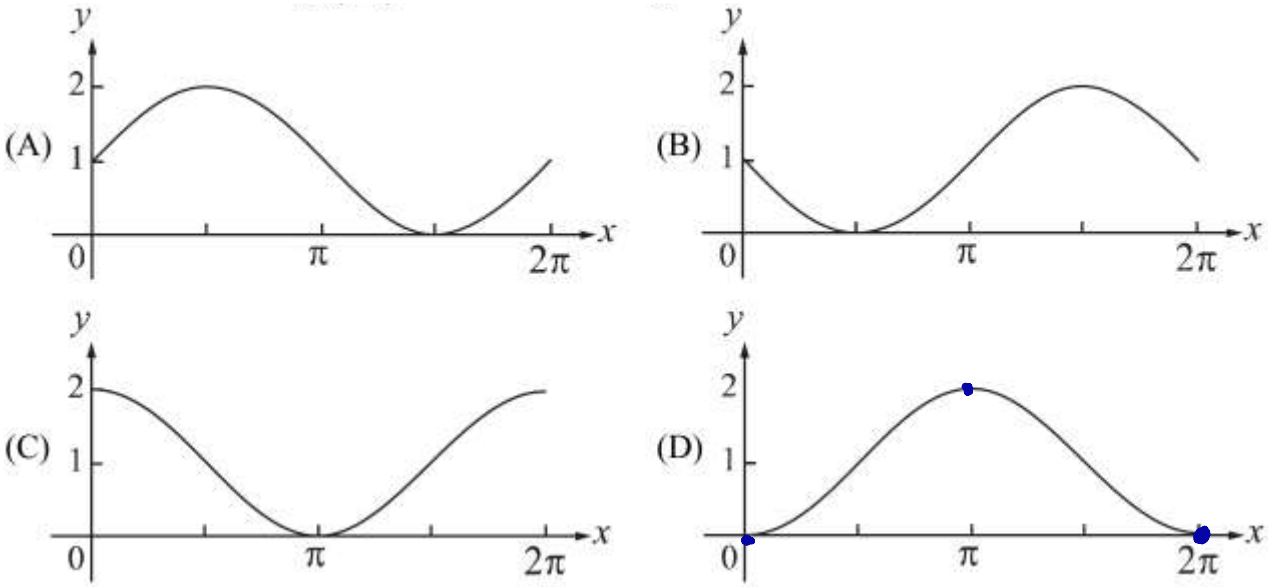
$\cos\theta\cot\theta>0$

+	+
−	−

$\therefore\ \theta$ 為第二象限角

有一個在水平地面的圓形輪子，其半徑為 1 單位長。輪子上 A 點與地面接觸，如圖所示，當輪子向右滾動，相對於圓心而言，A 點以順時針轉動 θ 角，且輪子中心 O 前進 x 單位長的時候，A 點距離地面的高度為 y 單位長。在坐標平面上，若在 $0 \le x \le 2\pi$ 的範圍中，y 可以表示為 x 的函數 $f(x)$，則下列何者為 $y = f(x)$ 的圖形？ 【113*C17*】





Ans：(D)

$x=0 \rightarrow y=0$

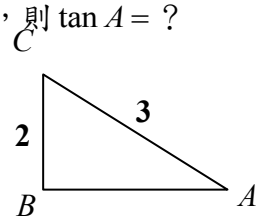
$x=r\cdot\pi=1\times\pi=\pi \rightarrow y=2r=2$

$x=2\pi r=2\times\pi\times1=2\pi \rightarrow y=0$

故選(D)

在 ΔABC 中，$\angle B = 90°$，如圖所示，且 $\overline{AC} = 3$、$\overline{BC} = 2$，則 $\tan A =$？

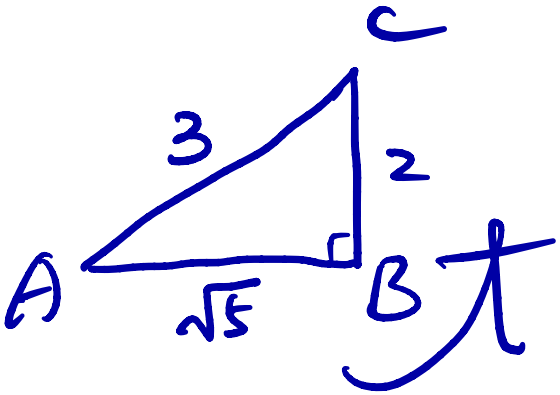
(A) $\frac{3}{\sqrt{5}}$　(B) $\frac{2}{\sqrt{5}}$　(C) $\frac{1}{\sqrt{5}}$　(D) $\frac{1}{3\sqrt{5}}$



【112*C03*】

Ans：(B)

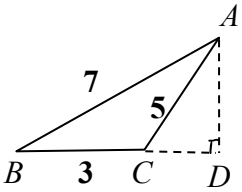
$\overline{AB} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$



$\tan A = \frac{2}{\sqrt{5}}$ #

已知 ΔABC 三邊長分別為 $\overline{AB}=7$，$\overline{BC}=3$，$\overline{CA}=5$，如圖所示，試求 $\overline{BC}$ 邊上的高 $\overline{AD}=$？

(A) $\frac{5\sqrt{3}}{4}$　(B) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　(C) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$　(D) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$



【112*C06*】

Ans：(D)

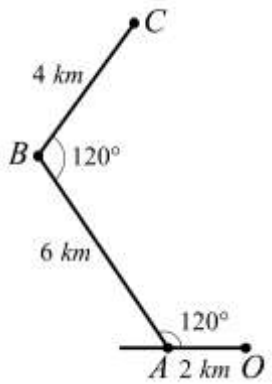
$$S=\frac{1}{2}(3+5+7)=\frac{15}{2}$$

$$\Delta=\sqrt{\frac{15}{2}\times\frac{9}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{1}{2}}=\frac{15\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}\times3\times\overline{AD}$$

$$\therefore\ \overline{AD}=\frac{15\sqrt{3}}{4}\times2\times\frac{1}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

#

一公路依水平地形迂迴而建，如圖所示。從 O 地到 A 地、A 地到 B 地、B 地到 C 地的距離分別為 2、6、4 公里(km)，而 $\overline{OA}$ 與 $\overline{AB}$ 的夾角及 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$ 的夾角均為 $120°$，則 C 地到 O 地的直線距離為多少公里？



(A) $2\sqrt{11}$

(B) $2\sqrt{21}$

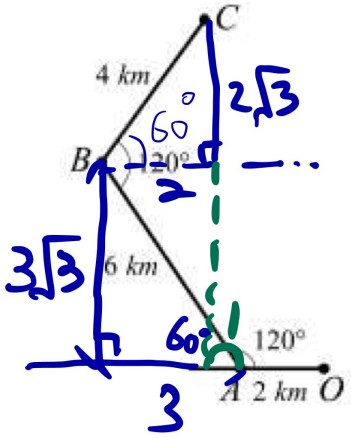
(C) $2\sqrt{31}$

(D) $2\sqrt{41}$

【112*C18*】

Ans：(B)

如圖

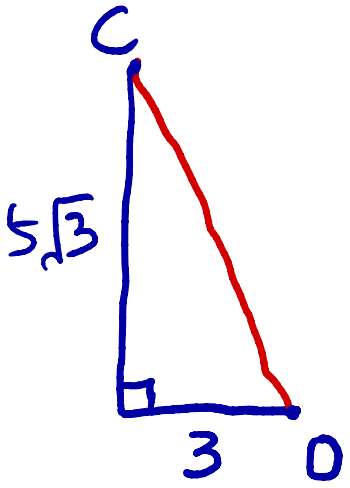


$\overline{OC} = \sqrt{3^2 + (5\sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{9 + 75}$

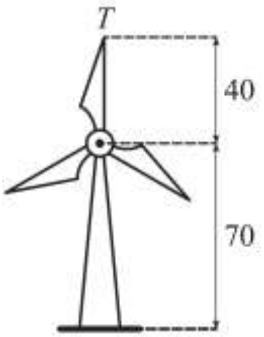
$= \sqrt{84}$

$= 2\sqrt{21}$ #



假設風力發電的風車旋轉軸平行於地面，且有三葉片，T 點為某葉片的頂端，如圖所示，我們想了解 T 點在風車旋轉過程中距離地面的高度變化。已知風車逆時針方向等速旋轉一圈需時 4 秒，且每個葉片長度皆為 40 公尺，其旋轉中心離地面 70 公尺。若風車開始運轉時，T 點恰在離地面最高的位置上，且 x 秒後可用 $f(x)=40\sin(ax+\frac{\pi}{2})+70$ (其中常數 $a>0$ 且 $0\le x\le 4$)來描述 T 點離地面的高度(單位：公尺)，則 a 可為下列何者？ 【112*C25*】

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) π (D) $\frac{4\pi}{3}$



Ans：(B)

$T=\frac{2\pi}{a}=4 \rightarrow a=\frac{\pi}{2}$ #

下列何者錯誤？

(A) $y=|\sin 2x|$ 之週期為 $\frac{\pi}{2}$　　(B) $y=3\sin x$ 之週期為 2π

(C) $y=\cos 2x$ 之週期為 $\frac{\pi}{2}$　　(D) $y=4\cos x$ 之週期為 2π　　【111*C04*】

Ans：(C)

(A) $\because y=\sin 2x \rightarrow T=\frac{2\pi}{2}=\pi$

$\therefore y=|\sin 2x| \rightarrow T=\frac{\pi}{2}$

(B) $y=3\sin x \rightarrow T=2\pi$

(C) $y=\cos 2x \rightarrow T=\frac{2\pi}{2}=\pi$

(D) $y=4\cos x \rightarrow T=2\pi$

若 ΔABC 之三邊長為 4、5、6，則其外接圓直徑為何

(A) $\frac{8}{\sqrt{7}}$　(B) $\frac{12}{\sqrt{7}}$　(C) $\frac{16}{\sqrt{7}}$　(D) $\frac{20}{\sqrt{7}}$　【111*C22*】

Ans：(C)

$$S=\frac{1}{2}(4+5+6)=\frac{15}{2}$$

$$\Delta=\sqrt{\frac{15}{2}\times\frac{7}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$$

$$R=\frac{abc}{4\Delta}=\frac{4\times\cancel{5}\times\overset{2}{\cancel{6}}}{\cancel{4}\times\frac{\cancel{15}\sqrt{7}}{\cancel{4}}}=\frac{8}{\sqrt{7}}$$

直徑 $2R=\frac{16}{\sqrt{7}}$ ※

已知 ΔABC 的面積為 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$，其中 $\overline{AB}=3$、$\overline{AC}=2$，且 $\angle BAC$ 為鈍角。若 $\overline{BC}$ 的長度為 a，則 $a^2=$？

(A) $13-6\sqrt{2}$　(B) $13-2\sqrt{6}$　(C) $13+2\sqrt{6}$　(D) $13+6\sqrt{2}$　【111*C23*】

Ans：(D)

$\frac{1}{2}\times 3\times 2\times \sin A=\frac{3\sqrt{2}}{2} \rightarrow \angle A=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\because \angle A$ 為鈍角 $\therefore \angle A=180^\circ-45^\circ=135^\circ$

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$=2^2+3^2-2\times 2\times 3\times \cos 135^\circ$

$=4+9-12\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=13+6\sqrt{2}$ ※

若 $\tan\theta+\sec\theta=5$，則 $\tan\theta-\sec\theta=$？

(A) $-\frac{3}{5}$　(B) $-\frac{1}{5}$　(C) $\frac{1}{5}$　(D) $\frac{3}{5}$　【110*C02*】

Ans：(B)

$\tan\theta+\sec\theta=5$

$(\sec\theta)^2=(5-\tan\theta)^2$

$\sec^2\theta=25-10\tan\theta+\tan^2\theta$

$1+\cancel{\tan^2\theta}=25-10\tan\theta+\cancel{\tan^2\theta}$

$10\tan\theta=24 \rightarrow \tan\theta=\frac{12}{5}$

$\rightarrow \sec\theta=5-\frac{12}{5}=\frac{13}{5}$

故 $\tan\theta-\sec\theta=\frac{12}{5}-\frac{13}{5}$

$=-\frac{1}{5}$ ※

已知 ΔABC 中，a、b、c 分別為 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 之對邊長。若 $ab：bc：ca = 3：4：6$，則 $\sin A：\sin B：\sin C = ?$

(A) 4：3：2　(B) 4：2：3　(C) 2：3：4　(D) 3：2：4　【110*C14*】

Ans：(D)

$$\frac{ab}{abc} : \frac{bc}{abc} : \frac{ca}{abc} = 3 : 4 : 6$$

$$\frac{1}{c} : \frac{1}{a} : \frac{1}{b} = 3 : 4 : 6$$

$$c : a : b = \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{6} = 4 : 3 : 2$$

故 $a : b : c = 3 : 2 : 4$

即 $\sin A : \sin B : \sin C = 3 : 2 : 4$

※

若 $a=\tan 480°$，$b=\sec 135°$，$c=\cos(-60°)$，則下列有序數對何者在第二象限？

(A)(b , c)　(B) (a , b)　(C) (c , a)　(D) (c , b)　【109*C02*】

Ans：(A)

$a=\tan 480° = \tan 120° < 0$

$b=\sec 135° < 0$

$c=\cos(-60°) = \cos 60° > 0$

(A) $(b,c) \to (-,+) \to$ II

(B) $(a,b) \to (-,-) \to$ III

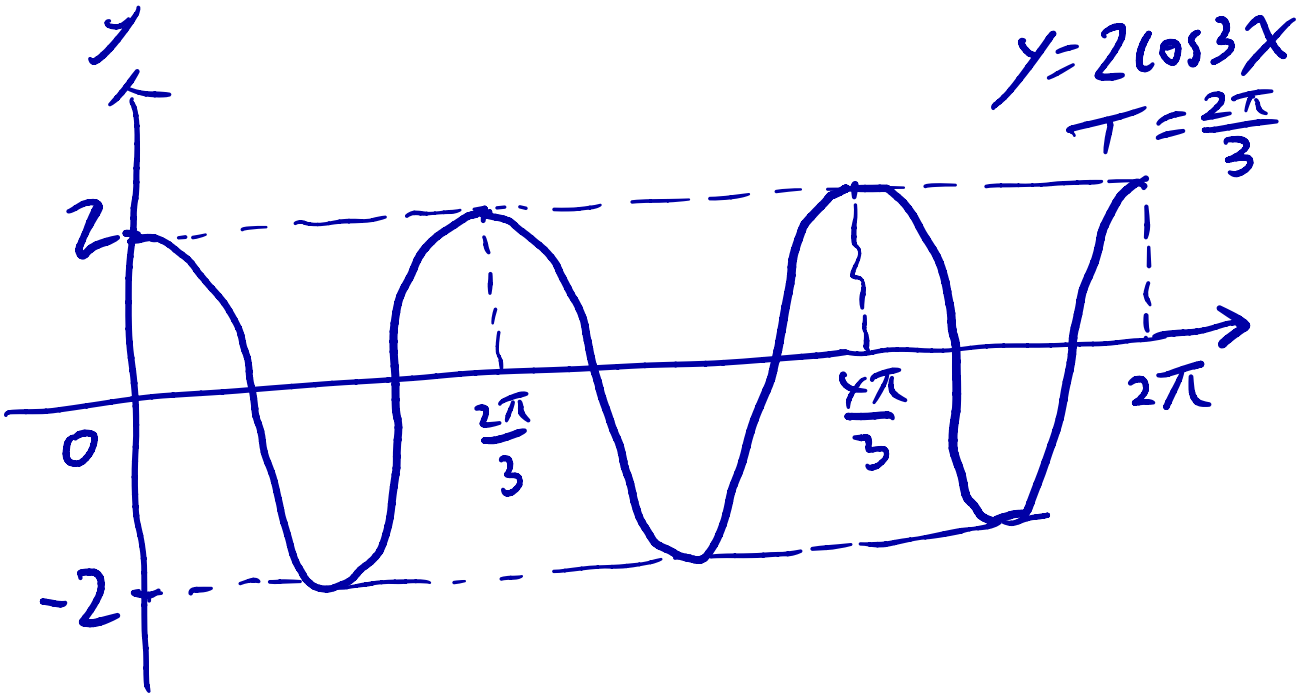
(C) $(c,a) \to (+,-) \to$ IV

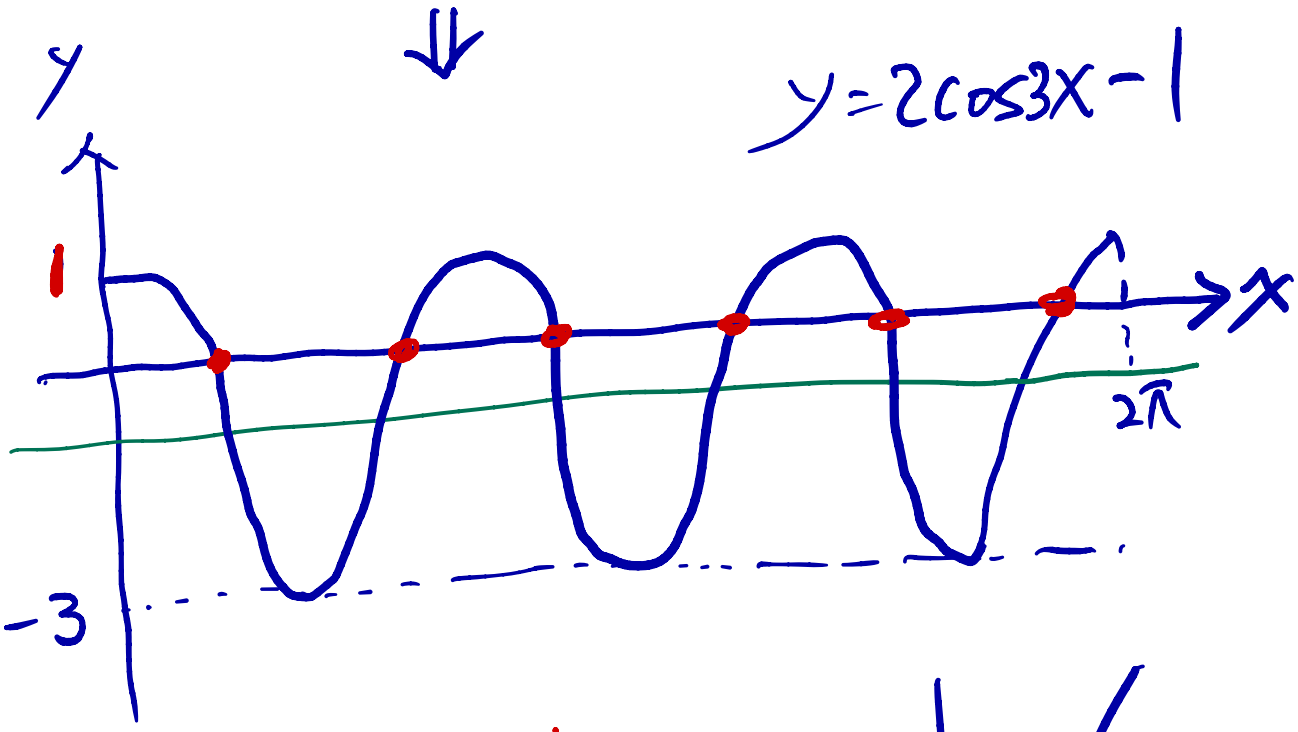
(D) $(c,b) \to (+,-) \to$ IV

設函數 $f(x)=2\cos 3x-1$，$x\in[0,2\pi]$，若其圖形和 x 軸的交點個數與函數的最大值分別為 a、b，則 $ab=$？

(A) 6　　(B) 9　　(C) 12　　(D) 18　　【109*C11*】

Ans：(A)

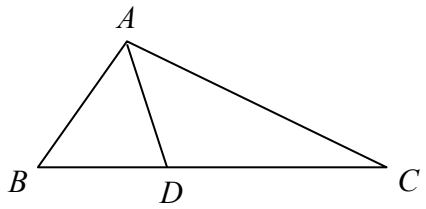




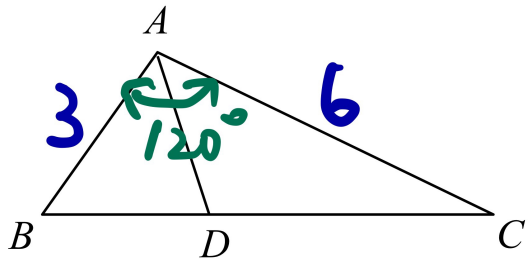
$a=6$，$b=1$ → $ab=6$ #

在 ΔABC 中，若 $\angle A$ 之內角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D，其中 $\overline{AB}=3$、$\overline{AC}=6$，且 $\angle A=120°$，如圖，則 $\overline{CD}=$？

(A) $\sqrt{26}$　(B) $3\sqrt{3}$　(C) $2\sqrt{7}$　(D) $\sqrt{7}$　【109C23】



Ans：(C)



$\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}=3:6=1:2$

$\overline{BC}^2=3^2+6^2-2\times3\times6\times\cos120°$

$=9+36-36\times(-\frac{1}{2})$

$=63$

$\overline{BC}=\sqrt{63}=3\sqrt{7}$

$\overline{CD}=\overline{BC}\times\frac{2}{3}=3\sqrt{7}\times\frac{2}{3}=2\sqrt{7}$ #

已知扇形的面積為 1 且其周長為 5，試問此扇形的半徑為何？

(A) $\frac{2}{5}$　(B) $\frac{1}{2}$　(C) 1　(D) 2　【108*C05*】

Ans：(D)

注意！

扇形之 $0<\theta<2\pi$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}r^2\theta = 1 & -① \\ r\theta + 2r = 5 & -② \end{cases}$$

由①得 $\theta = \frac{2}{r^2}$ 代入②

$\cancel{r}\cdot\frac{2}{r^{\cancel{2}}} + 2r = 5 \rightarrow 2 + 2r^2 = 5r$

$2r^2 - 5r + 2 = 0 \rightarrow (r-2)(2r-1) = 0$

$\begin{matrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{matrix}$ $\rightarrow r = 2$ 或 $r = \frac{1}{2}$

當 $r=2$ 時，$\theta = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2} < 2\pi \doteqdot 6.28$ (合)

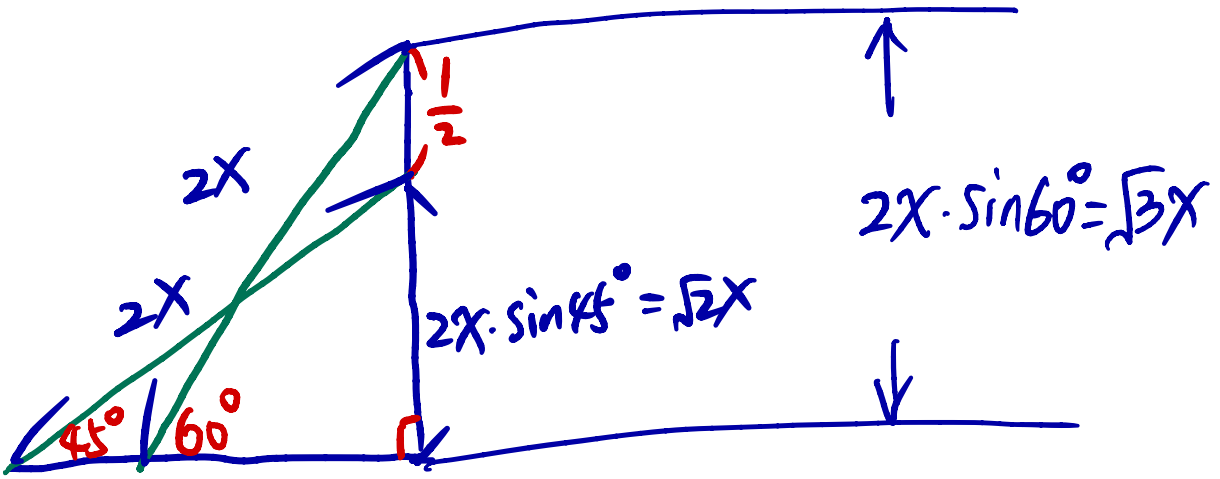
當 $r=\frac{1}{2}$ 時，$\theta = \frac{2}{(\frac{1}{2})^2} = 8 > 2\pi \doteqdot 6.28$ (不合)

故 $r=2$ ※

有一梯子斜靠於牆上，且梯子、地面及牆面構成一個 30°、60°、90° 的直角三角形。若梯子沿牆面下滑 $\frac{1}{2}$ 公尺時，則梯子、地面及牆面構成一個 45°、45°、90° 的直角三角形。試問梯長為多少公尺？

(A) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$　(B) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$　(C) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$　(D) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$　【108*C06*】

Ans：(C)



故 $\sqrt{3}x-\sqrt{2}x=\frac{1}{2}$

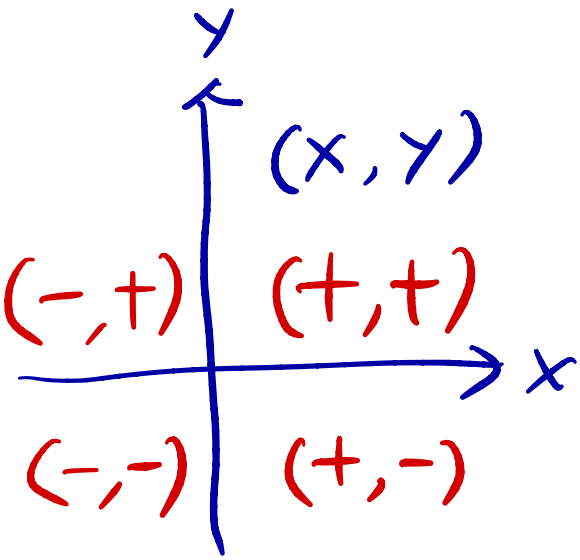
$(\sqrt{3}-\sqrt{2})x=\frac{1}{2}$

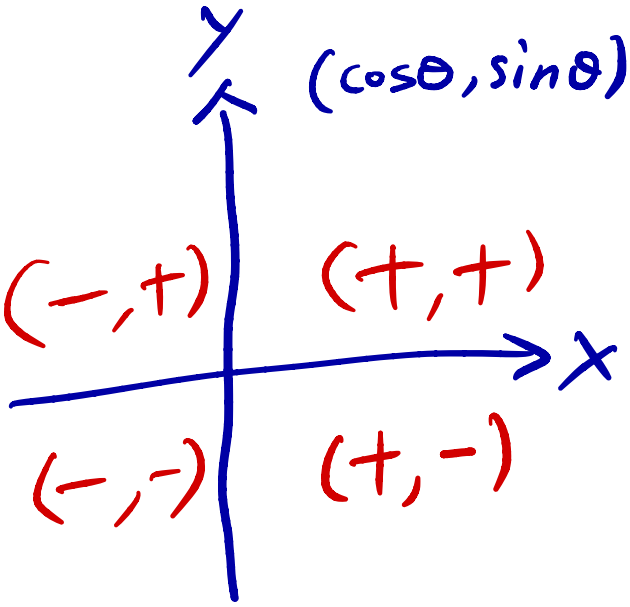
$2x=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ #

若點 $P(x,y)$ 為有向角 θ 終邊上一點且 $xy\neq 0$，則下列何者正確？

(A) $x\sin\theta>0$　(B) $y\cos\theta>0$　(C) $x\cot\theta>0$　(D) $y\csc\theta>0$　【108*C16*】

Ans：(D)





即取 $r=1$ 時 $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$

(A) $x\sin\theta = xy$ 一、三為 + ; 二、四為 −

(B) $y\cos\theta = yx$ 一、三為 + ; 二、四為 −

(C) $x\cdot\cot\theta = x\cdot\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{x^2}{y}$ 一、二為 + ; 三、四為 −

(D) $y\csc\theta = y\cdot\dfrac{1}{\sin\theta} = y\cdot\dfrac{1}{y} = 1 > 0$ ※

設三角形三邊長分別為 5、6、7，若三角形面積為 A，內切圓半徑為 r，則 $A\cdot r=$？

(A) 24　(B) 35　(C) 105　(D) 210　【107*C07*】

Ans：(A)

$$S=\frac{1}{2}(5+6+7)=9$$

$$A=\sqrt{9\times4\times3\times2}=6\sqrt{6}$$

$$r=\frac{6\sqrt{6}}{9}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

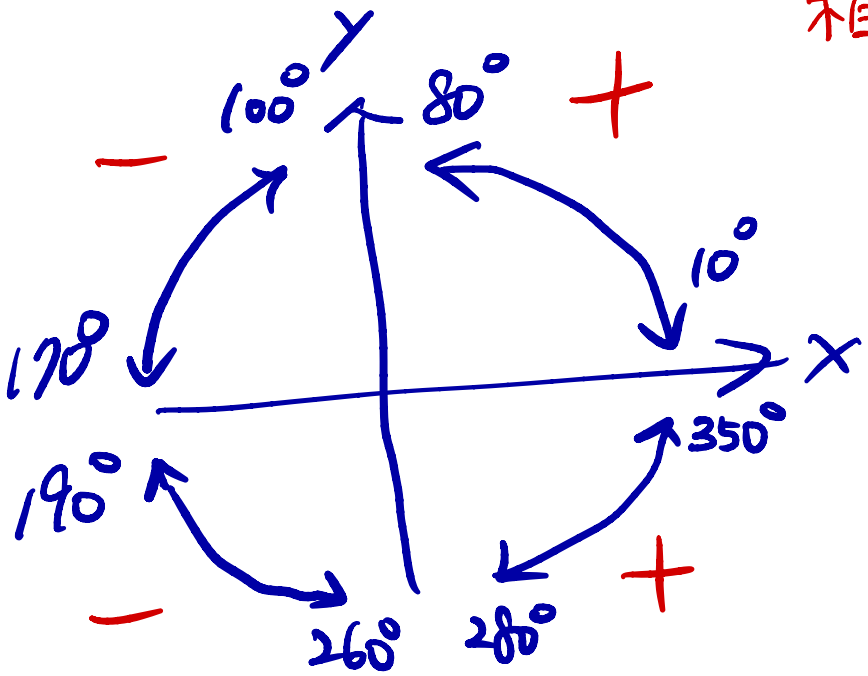
$$\therefore Ar=\cancel{6}^{2}\sqrt{6}\times\frac{2\sqrt{6}}{\cancel{3}}=24$$

$\cos 0° + \cos 10° + \cos 20° + \cos 30° + \cdots + \cos 350° + \cos 360° = ?$

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3　　【107*C08*】

Ans：(B)

$\underbrace{\cos 0° = 1,\ \cos 90° = 0,\ \cos 180° = -1,\ \cos 270° = 0}_{\text{相加會消掉}},\ \underbrace{\cos 360° = 1}_{\text{留下}}$



相加會消掉

故原式 = 1 ※

若 $\tan\theta\csc\theta=-1+6\cos\theta$，其中 θ 為第三象限角時，則 $\tan\theta=$？

(A) $2\sqrt{2}$　(B) $\sqrt{3}$　(C) $-\sqrt{3}$　(D) $-2\sqrt{2}$　【106*C02*】

Ans：(A)

$$\frac{\cancel{\sin\theta}}{\cos\theta}\times\frac{1}{\cancel{\sin\theta}}=-1+6\cos\theta$$

$$1=-\cos\theta+6\cos^2\theta$$

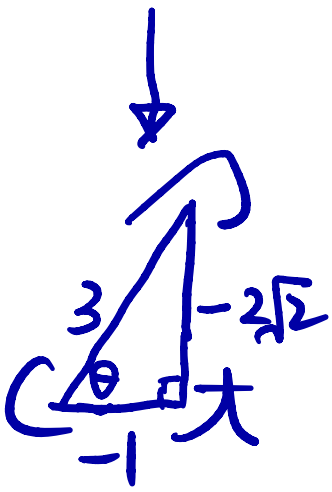
$$6\cos^2\theta-\cos\theta-1=0$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & & -1 \\ 3 & & +1 \end{array}$$

$$(2\cos\theta-1)(3\cos\theta+1)=0$$

$\cos\theta=\frac{1}{2}$ 或 $\cos\theta=-\frac{1}{3}$

(不合)



示意圖

$\rightarrow \tan\theta=\frac{-2\sqrt{2}}{-1}$

$=2\sqrt{2}$ ※

求 $\sin^2 18° + \sin^2 36° + \sin^2 54° + \sin^2 72° + \sin^2 90° =$ ？

(A) 2　　(B) 2.5　　(C) 3　　(D) 3.5　　【106*C03*】

Ans：(C)

$\sin^2 18° + \sin^2 72° = \sin^2 18° + \cos^2 18° = 1$

$\sin^2 36° + \sin^2 54° = \sin^2 36° + \cos^2 36° = 1$

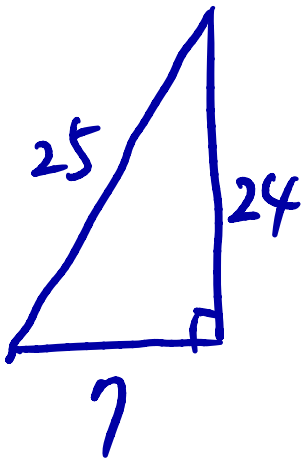
$\sin^2 90° = 1$

故原式 $= 1 + 1 + 1 = 3$ #

設三角形的三邊長為 7、24、25，其內切圓半徑為 r，外接圓半徑為 R，求 $\frac{r}{R}=$？

(A) 0.12　(B) 0.24　(C) 0.25　(D) 0.48　【106*C05*】

Ans：(B)



$\triangle=\frac{1}{2}\times7\times24=84$

$S=\frac{1}{2}(7+24+25)=28$

$r=\frac{\triangle}{S}=\frac{84}{28}=3$

直角三角形 $\rightarrow R=\frac{25}{2}$

R=斜邊的一半

故 $\frac{r}{R}=\frac{3}{\frac{25}{2}}=\frac{6}{25}=0.24$ ※

設ΔABC三內角$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的對應邊分別為a、b、c，且$\sqrt{a^2-3bc}=b-c$，求$\angle A$之值。

(A)$\frac{\pi}{2}$　(B)$\frac{2\pi}{3}$　(C)$\frac{3\pi}{4}$　(D)$\frac{5\pi}{6}$　【105*C03*】

Ans：(B)

$$a^2-3bc=(b-c)^2$$
$$=b^2+c^2-2bc$$

$$a^2=b^2+c^2+bc=b^2+c^2-2bc\cos A$$

故 $\cos A=-\frac{1}{2}\rightarrow \angle A=120^\circ=\frac{2\pi}{3}$ ※

設 $\sec\theta+\csc\theta=1$，求 $\sec\theta\csc\theta$ 之值。

(A) $\sqrt{2}+1$　(B) $\sqrt{2}-1$　(C) $-\sqrt{2}-1$　(D) $-\sqrt{2}+1$　【105*C04*】

Ans：(C)

$$\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\sin\theta}=1$$

$$\sin\theta+\cos\theta=\sin\theta\cos\theta$$

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=(\sin\theta\cos\theta)^2$$

$$1+2(\sin\theta\cos\theta)=(\sin\theta\cos\theta)^2$$

令 $\sin\theta\cos\theta=t<1$

則 $1+2t=t^2 \longrightarrow t^2-2t-1=0$

$$\longrightarrow t=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{2}}{2}$$

$$=1\pm\sqrt{2}$$

而 $1+\sqrt{2}>1$ 不合，故 $t=1-\sqrt{2}$

$$\sec\theta\csc\theta=\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{t}=\frac{1}{1-\sqrt{2}}=-(\sqrt{2}+1)$$

$$=-\sqrt{2}-1$$

※

已知 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$，則 $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=$？

(A) $2(\sqrt{3}-1)$　(B) $4(\sqrt{3}-1)$　(C) $2(\sqrt{3}+1)$　(D) $4(\sqrt{3}+1)$　【104*C06*】

Ans：(C)

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

$$=\sin\theta\left[\frac{1-\cancel{\cos\theta}+1+\cancel{\cos\theta}}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}\right]$$

$$=\sin\theta\left(\frac{2}{1-\cos^2\theta}\right)$$

$$=\cancel{\sin\theta}\cdot\frac{2}{\sin^{\cancel{2}}\theta}$$

$$=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}-1}\times\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\overset{2}{\cancel{4}}(\sqrt{3}+1)}{\cancel{2}}=2(\sqrt{3}+1)\ \#$$

已知三角形的三邊長分別為 3 公分、3 公分、4 公分，則此三角形之外接圓半徑為何？

(A) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　(B) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$　(C) $\frac{7\sqrt{5}}{10}$　(D) $\frac{9\sqrt{5}}{10}$　【104*C24*】

Ans：(D)

$$S=\frac{1}{2}(3+3+4)=5$$

$$\Delta=\sqrt{5\times2\times2\times1}=2\sqrt{5}$$

$$R=\frac{abc}{4\Delta}=\frac{3\times3\times\cancel{4}}{\cancel{4}\times2\sqrt{5}}=\frac{9}{2\sqrt{5}}=\frac{9\sqrt{5}}{10}\ \#$$

在 ΔABC 中，設三邊長之比 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=7:5:3$，則 ΔABC 之最大內角為何？

(A) 75°　(B) 90°　(C) 120°　(D) 135°　【103*C09*】

Ans：(C)

$c:a:b=7:5:3 \rightarrow a:b:c=5:3:7$

$\rightarrow \angle C$ 為最大內角

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$=\frac{5^2+3^2-7^2}{2\times5\times3}$$

$$=\frac{-15}{30}$$

$$=-\frac{1}{2} \rightarrow \angle C=120^\circ$$

#

若 ΔABC 中，$\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=9$、$\overline{CA}=10$，則 $\cos(\angle A+\angle B)=$？

(A) $-\frac{13}{15}$　(B) $-\frac{7}{15}$　(C) $\frac{7}{15}$　(D) $\frac{13}{15}$　【102*C06*】

Ans：(A)

ΔABC 中，$A+B+C=180^\circ \rightarrow A+B=180^\circ-C$

$\cos(A+B)=\cos(180^\circ-C)=-\cos C$

而 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$=\frac{9^2+10^2-5^2}{2\times9\times10}$

$=\frac{156}{180}$

$=\frac{13}{15}$

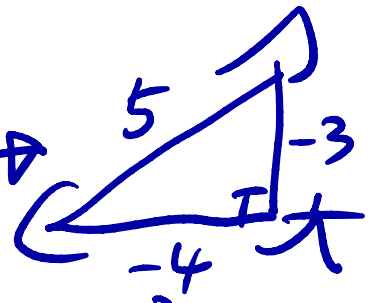
故所求 $=-\frac{13}{15}$ ※

已知θ為第三象限角，且$\tan\theta=\frac{3}{4}$，則$\frac{2\sin\theta-1}{3+4\cos\theta}=$？

(A) $\frac{1}{31}$　(B) $\frac{13}{7}$　(C) 11　(D) 31　【102*C12*】

Ans：(C)

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{3}{4}=\frac{-3}{-4}\rightarrow$$



示意圖

$$\frac{2\sin\theta-1}{3+4\cos\theta}=\frac{2\times\frac{-3}{5}-1}{3+4\times\left(\frac{-4}{5}\right)}$$

$$=\frac{(-6)-5}{15-16}$$

$$=\frac{-11}{-1}$$

$$=11$$

#

試問下列哪一個三角函數值與 $\sec 250°$ 相等？

(A) $-\csc 70°$　(B) $-\sec 110°$　(C) $-\sec 340°$　(D) $-\csc 160°$　【101*C14*】

Ans：(D)

$\sec 250° = \sec(180° + 70°) = -\sec 70°$

(A) $-\csc 70° \neq -\sec 70°$

(B) $-\sec 110° = -\sec(180° - 70°)$

$= -(-\sec 70°)$

$= \sec 70° \neq -\sec 70°$

(C) $-\sec 340° = -\sec(360° - 20°)$

$= -\sec 20° \neq -\sec 70°$

(D) $-\csc 160° = -\csc(90° + 70°)$

$= -\sec 70°$

$\sin^2 210° + \cos^2 570° + \sec^2 930° - \tan^2 1290° + \csc^2 1650° - \cot^2 2010° = ?$

(A) -1　(B) 1　(C) $\frac{3}{2}$　(D) 3　【101*C21*】

Ans：(D)

210°為570°、930°、1290°、1650°、2010°的最小正同界角

∴令 $\theta = 210°$

則原式 $= \sin^2\theta + \cos^2\theta + \sec^2\theta - \tan^2\theta + \csc^2\theta - \cot^2\theta$

$= 1 + 1 + 1$

$= 3$ ※

ΔABC 中，若 $\overline{BC}=\sqrt{13}$，$\overline{AC}=3$，$\angle A=60°$，則 $\cos C$ 之值為何？

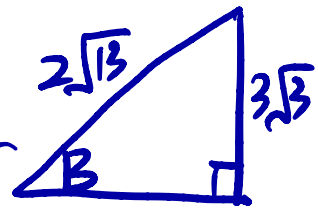
(A) $-\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$　(B) $-\dfrac{1}{\sqrt{13}}$　(C) $\dfrac{1}{\sqrt{13}}$　(D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$　【101*C22*】

Ans：(C)

$$\frac{\sqrt{13}}{\sin 60°}=\frac{3}{\sin B} \rightarrow \sin B=\frac{3}{\sqrt{13}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$$

$\because \sqrt{13}>3=\sqrt{9}$　$\therefore \angle B$ 必為銳角

故



$$\sqrt{(2\sqrt{13})^2-(3\sqrt{3})^2}=\sqrt{52-27}=\sqrt{25}=5$$

得 $\cos B=\dfrac{5}{2\sqrt{13}}$

$$\cos C=\cos[180°-(A+B)]$$
$$=-\cos(A+B)$$

而 $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2\sqrt{13}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}=\frac{-4}{4\sqrt{13}}$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{13}}$$

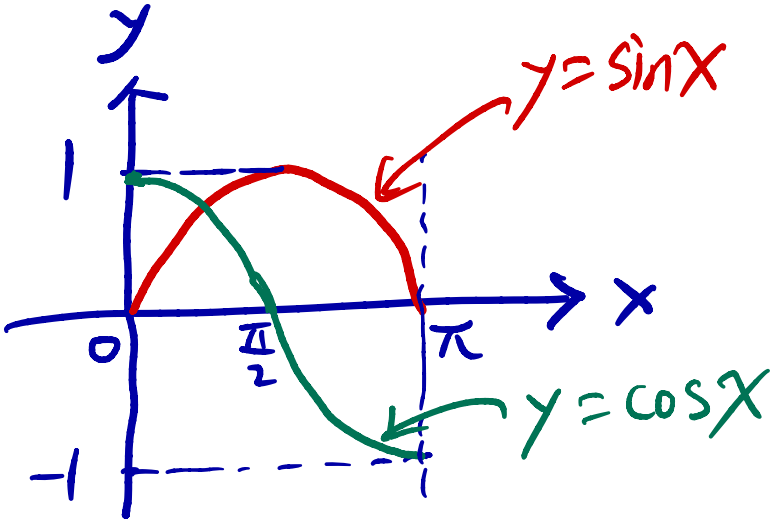
故 $\cos C=\dfrac{1}{\sqrt{13}}$ #

已知 $0 \le \alpha, \beta \le \pi$。下列個選項中，何者恆為正確？

(A) 若 $\cos\alpha = \cos\beta$，則 $\alpha = \beta$　　(B) 若 $\cos(\alpha-\beta)=0$，則 $\alpha=\beta$

(C) 若 $\sin\alpha = \sin\beta$，則 $\alpha = \beta$　　(D) 若 $\sin(\alpha-\beta)=0$，則 $\alpha=\beta$　　【100*C08*】

Ans：(A)



(A) 由 $y=\cos x$ 的圖形可知

若 $\cos\alpha=\cos\beta$，則 $\alpha=\beta$

(B) $\cos(\alpha-\beta)=0 \rightarrow$ 取 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，$\beta=0 \rightarrow \alpha\neq\beta$

(C) 由 $y=\sin x$ 的圖形可知

$\sin 0=\sin\pi=0 \rightarrow 0\neq\pi$

(D) $\sin(\alpha-\beta)=0 \rightarrow$ 可取 $\alpha=\pi$，$\beta=0 \rightarrow \alpha\neq\beta$

下列各三角函數值，何者數值最小？

(A) sin885°　(B) cos (–430°)　(C) tan 131°　(D) sin (–2010°)　【99*C03*】

Ans：(C)

(A) $\sin 885^\circ = \sin 165^\circ > 0$

$$\begin{array}{r} 885 \\ -720 \\ \hline 165 \end{array}$$

(B) $\cos(-430^\circ) = \cos 290^\circ > 0$

$$\begin{array}{r} -430 \\ +\ 720 \\ \hline 290 \end{array}$$

(C) $\tan 131^\circ < 0$

$$\begin{array}{r} 2160 \\ -2010 \\ \hline 150 \end{array}$$

(D) $\sin(-2010^\circ) = \sin 150^\circ > 0$

設A、B、C為一圓之圓周上三點，若 $\overline{AB}=4$ 、 $\overline{BC}=6$ 、 $\overline{CA}=8$ ，則該圓之面積為何？

(A) $\frac{256}{15}\pi$　(B) $\frac{256}{13}\pi$　(C) $\frac{81}{4}\pi$　(D) $\frac{81}{2}\pi$　【99*C14*】

Ans：(A)

$$S=\frac{1}{2}(6+8+4)=9$$

$$\Delta=\sqrt{9\times3\times1\times5}=3\sqrt{15}$$

$$R=\frac{abc}{4\Delta}=\frac{\overset{2}{\cancel{6}}\times8\times\cancel{4}}{\cancel{4}\times\cancel{3}\sqrt{15}}=\frac{16}{\sqrt{15}}$$

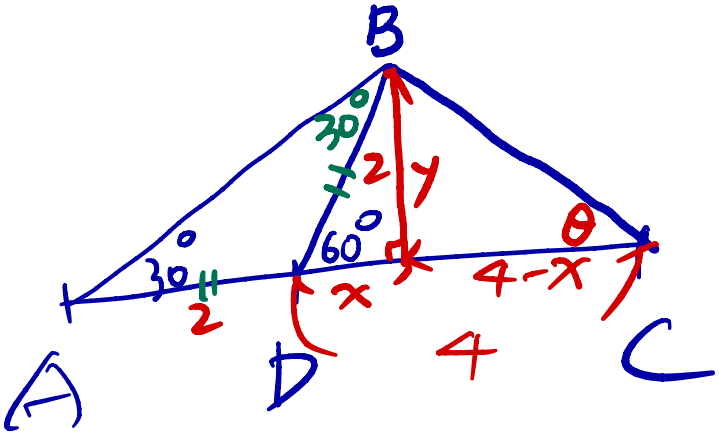
$$\pi R^2=\pi\times\left(\frac{16}{\sqrt{15}}\right)^2=\frac{256}{15}\pi$$

#

在 ΔABC 中，若 D 點在線段 $\overline{AC}$ 上且 $\overline{AD}:\overline{DC}=1:2$，又 $\angle BAD=30°$，$\angle BDC=60°$，則 $\angle DCB$ 的角度為何？

(A) 30°　(B) 45°　(C) 60°　(D) 75°　【99*C22*】

Ans：(A)



取 $\overline{AD}=\overline{BD}=2$，則 $\overline{CD}=4$

圖中，$x=2\cdot\cos 60°=2\times\frac{1}{2}=1$

$y=2\cdot\sin 60°=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

而 $4-x=4-1=3$

故 $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}\rightarrow\theta=30°$ ※

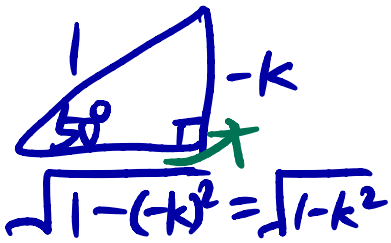
若 $\sin 230° = k$ ，則 $\tan 50° =$ ？

(A) $-\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k}$　(B) $-\dfrac{k}{\sqrt{1-k^2}}$　(C) $-\sqrt{1-k^2}$　(D) $-\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2}}$　【98*C03*】

Ans：(B)

$\sin 230° = \sin(180° + 50°) = -\sin 50° = k$

$\sin 50° = -k \rightarrow$

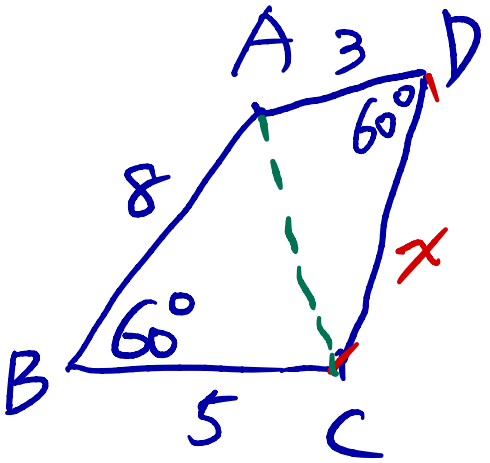


故 $\tan 50° = \dfrac{-k}{\sqrt{1-k^2}} = -\dfrac{k}{\sqrt{1-k^2}}$ #

已知四邊形 $ABCD$(按順序)中，$\overline{AB}=8$，$\overline{BC}=5$，$\overline{AD}=3$，且 $\angle ABC=\angle ADC=60°$，則 $\overline{CD}$ 之長為多少？

(A) 5　(B) 6　(C) 7　(D) 8　【98*C04*】

Ans：(D)



$$\overline{AC}^2=8^2+5^2-\cancel{2}\times 8\times 5\times \cancel{\cos 60^\circ}=49$$

$$\overline{AC}^2=3^2+x^2-\cancel{2}\times 3\times x\times \cancel{\cos 60^\circ}=9+x^2-3x$$

$$\therefore\ 9+x^2-3x=49 \rightarrow x^2-3x-40=0$$

$$\begin{matrix}1 & +5\\ 1 & -8\end{matrix}$$

$$(x+5)(x-8)=0 \rightarrow x=8 \ \#$$

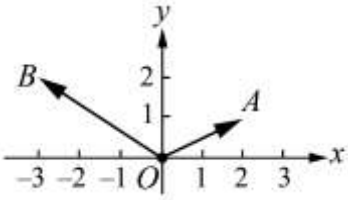
在坐標平面上，已知 O 為原點，$A(2,1)$，$B(-3,2)$，如圖所示，若 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OA}$，其中 $-1\le t\le 1$，則所有滿足 P 點所形成的線段長為多少？

(A) $3\sqrt{2}$

(B) $2\sqrt{5}$

(C) $3\sqrt{3}$

(D) $4\sqrt{2}$



【113*C25*】

Ans：(B)

$t=-1 \rightarrow \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-3-2,2-1)=(-5,1)$

$t=1 \rightarrow \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}=(-3+2,2+1)=(-1,3)$

所求線段之兩端點為 $(-5,1)$、$(-1,3)$

故線段長 $=\sqrt{(-5+1)^2+(1-3)^2}$

$=\sqrt{16+4}$

$=\sqrt{20}$

$=2\sqrt{5}$ ※

在坐標平面上，已知 ΔABC 的三個頂點坐標為 $A(x,y)$、$B(2,0)$、$C(0,0)$，線段 $\overline{AB}$ 的中點為 D，線段 $\overline{BC}$ 的中點為 E，線段 $\overline{AC}$ 的中點為 F。若內積 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=0$，則下列何者為真？

(A) ΔABC 為銳角三角形　(B) ΔABC 為鈍角三角形　(C) $\angle BCA$ 為直角　(D) $\angle BAC$ 為直角

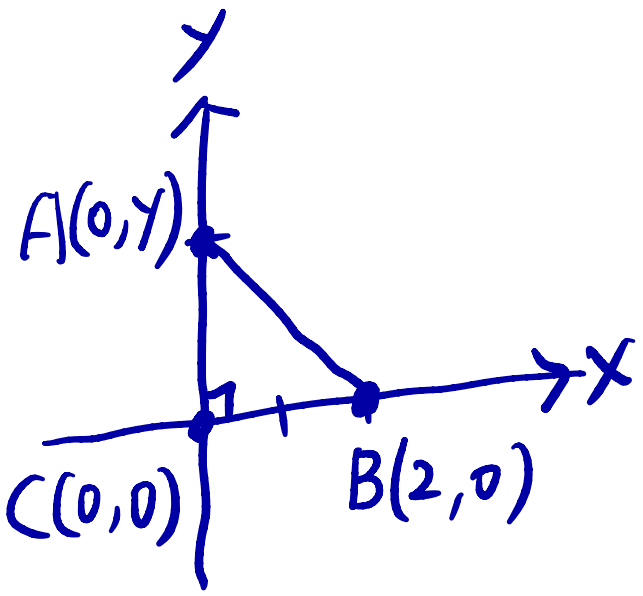
Ans：(C)　【112*C04*】

$D\left(\frac{x+2}{2},\frac{y}{2}\right)$, $E(1,0)$, $F\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right)$

$\overrightarrow{DE}=\left(-\frac{x}{2},-\frac{y}{2}\right)$, $\overrightarrow{DF}=(-1,0)$

$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=\frac{x}{2}=0 \rightarrow x=0$

$\rightarrow A(0,y)$ 在 y 軸上



ΔABC 為直角 Δ

且 $\angle BCA$ 為直角

#

已知平面上兩向量 $\vec{a}=(2x+1,-3)$、$\vec{b}=(3,x-2)$，滿足 $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$，則 $x=$？

(A) 3　(B) 1　(C) -1　(D) -3　【111*C16*】

Ans：(D)

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2$$

$$=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2 \rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(2x+1)\times 3+(-3)\times(x-2)$$

$$=6x+3-3x+6$$

$$=3x+9$$

$$3x+9=0 \rightarrow x=-3 \ \#$$

已知$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$為平面上的三向量，且$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$，$|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=12$，$|\vec{c}|=13$。若$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$，則$\vec{a}\cdot\vec{b}=$？

(A) -30　(B) -60　(C) -65　(D) -156　【110*C16*】

Ans：(B)

$$\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{c}=0\\ \vec{b}\cdot\vec{c}=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\vec{a}\perp\vec{c}\\ \vec{b}\perp\vec{c}\end{cases}\rightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$$

又 $\vec{a}\cdot\vec{b}<0\rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}$ 反向

$\rightarrow\theta=180^\circ$

$\rightarrow\cos\theta=\cos180^\circ=-1$

故 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$=5\times12\times(-1)$

$=-60$ #

設平面上三點 $A(1,1)$、$B(5,-2)$、$C(5,2)$，且 $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 的正射影為 $\overrightarrow{AD}$，若 $\overrightarrow{DC}=(x,y)$，則 $x+y=$？

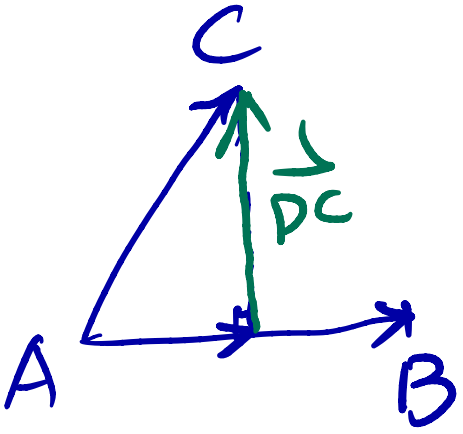
(A) $\frac{34}{25}$　(B) $\frac{89}{25}$　(C) $\frac{104}{25}$　(D) $\frac{112}{25}$　【109C21】

Ans：(D)

$\overrightarrow{AC}=(4,1)$，$\overrightarrow{AB}=(4,-3)$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=16-3=13$，$|\overrightarrow{AB}|=5$

$$\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|^2}\overrightarrow{AB}=\frac{13}{25}(4,-3)=\left(\frac{52}{25},-\frac{39}{25}\right)$$



$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$$

$$=(4,1)-\left(\frac{52}{25},-\frac{39}{25}\right)$$

$$=\left(4-\frac{52}{25},1+\frac{39}{25}\right)$$

$$=\left(\frac{48}{25},\frac{64}{25}\right)\rightarrow x=\frac{48}{25},\ y=\frac{64}{25}$$

故 $x+y=\frac{112}{25}$ ※

已知 $\vec{u}=(1,1)$，$\vec{v}=(x+4,y-1)$ 及 $\vec{w}=(2x,y)$。若 $\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 垂直且 $\vec{u}$ 與 $\vec{w}$ 平行，則下列何者正確？

(A) $x=1$　(B) $y=-2$　(C) $y=1$　(D) $x=-2$　【108*C01*】

Ans：(B)

$\vec{u}\perp\vec{v} \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0$

$\rightarrow (x+4)+(y-1)=0$

$\rightarrow x+y=-3$ —①

$\vec{u}\parallel\vec{w} \rightarrow \frac{2x}{1}=\frac{y}{1}$

$\rightarrow y=2x$ —②

將②代入①得 $x+2x=-3 \rightarrow x=-1$

$\rightarrow y=-2$

已知$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{5}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$。若$t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$和$\vec{a}-\vec{b}$垂直，其中t為實數，則$t=$？

(A) $\frac{7}{10}$　(B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　(C) $\frac{3}{4}$　(D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$　【106*C06*】

Ans：(A)

$$[t\vec{a}+(1-t)\vec{b}]\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$$

$$t|\vec{a}|^2-t(\vec{a}\cdot\vec{b})+(1-t)(\vec{a}\cdot\vec{b})-(1-t)|\vec{b}|^2=0$$

$$t+2t-2(1-t)-5(1-t)=0$$

$$t+2t-2+2t-5+5t=0$$

$$10t-7=0$$

$$t=\frac{7}{10}$$

$|\vec{a}|=10$

已知向量 $\vec{a}=(-6,8)$ 且與 $\vec{b}$ 之夾角為 $60°$，則向量 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影長為何？

(A) 5　(B) 7　(C) $5\sqrt{3}$　(D) 10　【105*C06*】

Ans：(A)

$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上之正射影為 $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$

正射影長 $=\left|\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}\right|=\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|^{\cancel{2}}}\cdot\cancel{|\vec{b}|}$

而 $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=\left||\vec{a}||\vec{b}|\cos 60°\right|$

$=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60°$

$\rightarrow \dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}=|\vec{a}|\cos 60°=10\times\dfrac{1}{2}=5$ ※

已知平面上四點坐標為 $A(57,23)$、$B(7,-2)$、$C(5,12)$、$D(x,y)$。

若向量 $\overrightarrow{AD}=\frac{7}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$，則 $x+y=$？

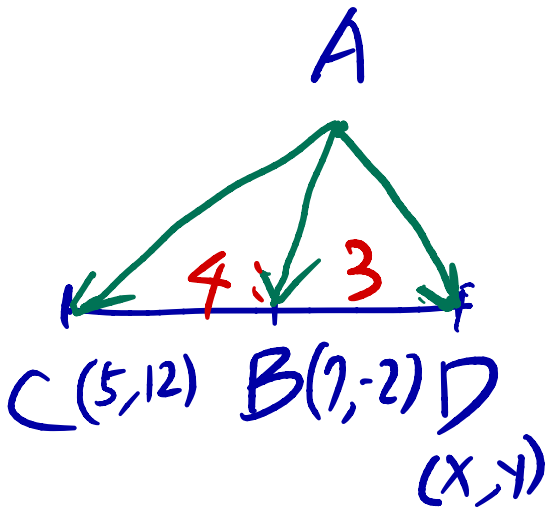
(A) -4　(B) -2　(C) 2　(D) 4　【104*C08*】

Ans：(A)

$$4\overrightarrow{AD}=7\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$$

$$7\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AB}=\frac{3}{7}\overrightarrow{AC}+\frac{4}{7}\overrightarrow{AD}\rightarrow$$



$$7=\frac{4x+15}{7}\rightarrow 49=4x+15\rightarrow 4x=34$$
$$\rightarrow x=\frac{17}{2}$$

$$-2=\frac{4y+36}{7}\rightarrow 4y+36=-14\rightarrow 4y=-50$$
$$\rightarrow y=-\frac{25}{2}$$

$$x+y=\frac{17}{2}+\left(-\frac{25}{2}\right)=-\frac{8}{2}=-4 \ \#$$

已知平面三向量 $\vec{a}=(3,4)$，$\vec{b}=(x,-9)$，$\vec{c}=(-8,y)$。設 $\vec{a}\perp\vec{b}$，$\vec{b}//\vec{c}$，則 $y-x=$？

(A) -18　(B) -6　(C) 6　(D) 18　【103*C01*】

Ans：(B)

$\vec{a}\perp\vec{b} \rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\rightarrow 3x-36=0$

$\rightarrow x=12 \rightarrow \vec{b}=(12,-9)$

$\vec{b}//\vec{c} \rightarrow \frac{-8}{12}=\frac{y}{-9}$

$\rightarrow y=\frac{72}{12}=6$

故 $y-x=6-12=-6$ ※

設平面二向量 $\vec{u}=(2\cos\theta,\sin\theta)$，$\vec{v}=(\sin\theta,2\cos\theta)$ 且其內積 $\vec{u}\cdot\vec{v}=1$，若 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，則 θ 之值可能為何？

(A) $\frac{\pi}{12}$　(B) $\frac{\pi}{6}$　(C) $\frac{\pi}{4}$　(D) $\frac{\pi}{3}$　【103*C20*】

Ans：(A)

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=2\sin\theta\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta$$

$$=\sin2\theta+\sin2\theta$$

$$\boxed{\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta}$$

$$=2\sin2\theta$$

$$=1$$

$$\sin2\theta=\frac{1}{2}$$

$$\because\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ 0\le2\theta\le\pi\ \rightarrow\ 2\theta=\frac{\pi}{6}\ \rightarrow\ \theta=\frac{\pi}{12}\ \#$$

$|\vec{a}|=5$

設向量$\vec{a}=(3,4)$，向量$\vec{b}//\vec{a}$ ，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=-50$，則$\left|2\vec{a}+3\vec{b}\right|=$？

(A) 20　(B) 40　(C) 60　(D) 80　【102*C09*】

Ans：(A)

$\vec{b}//\vec{a}$ 且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-50<0 \rightarrow \theta=180^\circ$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 180^\circ$

$-50=5\times|\vec{b}|\times(-1) \rightarrow |\vec{b}|=10$

$|2\vec{a}+3\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2+12(\vec{a}\cdot\vec{b})+9|\vec{b}|^2$

$=4\times25+12\times(-50)+9\times100$

$=100-600+900$

$=400$

$|2\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{400}=20$ ※

設向量 $\vec{u}=(a,2)$，$\vec{v}=(3,2a)$，$\vec{w}=(-1,2)$，則下列敘述何者正確？

(A) 若 $2\vec{u}+\vec{v}$ 與 $\vec{w}$ 平行，則 $a=-3$　　(B) 若 $(2\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=0$，則 $a=-\frac{5}{2}$

(C) 若 $\left|2\vec{u}+\vec{v}\right|=5$，則 $a=-\frac{1}{2}$　　(D) 若 $\left|2\vec{u}+\vec{v}\right|=\left|\vec{w}\right|$，則 $a=0$　　【101*C09*】

Ans：(B)

$2\vec{u}+\vec{v}=(2a,4)+(3,2a)=(2a+3,2a+4)$

(A) $(2\vec{u}+\vec{v})\parallel\vec{w} \rightarrow \frac{2a+3}{-1}=\frac{2a+4}{2}$

$\rightarrow 4a+6=-2a-4$

$\rightarrow 6a=-10$

$\rightarrow a=-\frac{5}{3}$

(B) $(2\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=-(2a+3)+2(2a+4)=2a+5$

$2a+5=0 \rightarrow a=-\frac{5}{2}$ ※

(C) $|2\vec{u}+\vec{v}|^2=25 \rightarrow (2a+3)^2+(2a+4)^2=25$

$\rightarrow 8a^2+28a=0$

$\rightarrow a=0$ 或 $a=-\frac{7}{2}$

(D) $|2\vec{u}+\vec{v}|^2=|\vec{w}|^2 \rightarrow 8a^2+28a+25=5$

$\rightarrow a\neq 0$

平面上四點 $A(1,1)$、$B(a,2)$、$C(b,-1)$、$D(0,-2)$，其中 b 為正數，若 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 互相平行，$\overline{BD}$ 與 $\overline{AC}$ 互相垂直，求 $a+2b$ 之值為何？

(A) 7　(B) 8　(C) 9　(D) 10　【101*C16*】

Ans：(D)

$\overrightarrow{AB}=(a-1,1)$，$\overrightarrow{CD}=(-b,-1)$

$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD} \rightarrow \frac{a-1}{-b}=\frac{1}{-1} \rightarrow a=b+1$ —①

$\overrightarrow{BD}=(-a,-4)$，$\overrightarrow{AC}=(b-1,-2)$

$\overrightarrow{BD}\perp\overrightarrow{AC} \rightarrow \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$\rightarrow -a(b-1)+8=0$

$\rightarrow a(b-1)=8$ —②

次①代入②得

$(b+1)(b-1)=8 \rightarrow b^2-1=8$

$\rightarrow b^2=9$

$\rightarrow b=3\ (b>0)$

$\therefore a=3+1=4$

故 $a+2b=4+6=10$ #

已知兩向量 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 互相垂直。若 $|\vec{a}|=4\sqrt{5}$ ，$|\vec{a}+\vec{b}|=5\sqrt{5}$ ，則 $|\vec{b}|=$ ？

(A) $\sqrt{5}$ (B) $2\sqrt{5}$ (C) $3\sqrt{5}$ (D) $4\sqrt{5}$ 【100*C03*】

Ans：(C)

$\vec{a}\perp\vec{b} \rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(5\sqrt{5})^2$

$|\vec{a}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2=125$

$80+0+|\vec{b}|^2=125$

$|\vec{b}|^2=45$

$|\vec{b}|=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$ #

設 $A(-13,-19)$、$B(x,y)$ 為平面上相異兩點。若向量 $\overrightarrow{AB}$ 與向量 $\vec{u}=(5,12)$ 同方向且 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=26$，則 $3x-4y=$？

$|\vec{u}|=13$

(A) -103　(B) -29　(C) 29　(D) 103　【100*C16*】

Ans：(B)

$\overrightarrow{AB}=(x+13,\ y+19)$

$=\overset{2}{\cancel{26}}\cdot\dfrac{(5,12)}{\cancel{13}}$

$=(10,24)$

$\begin{cases} x+13=10 \\ y+19=24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=5 \end{cases}$

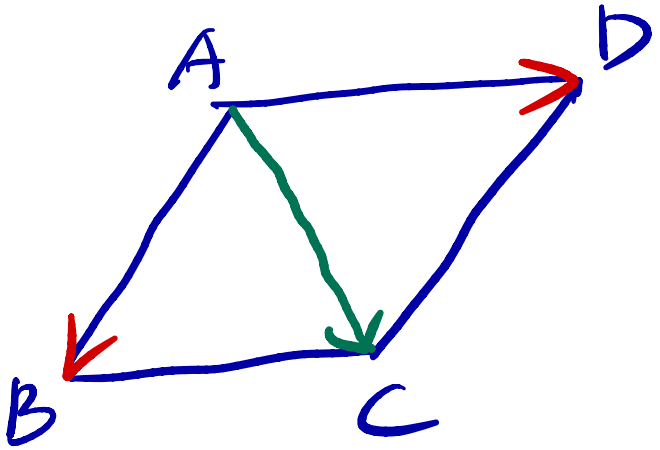
$3x-4y=-9-20=-29$ #

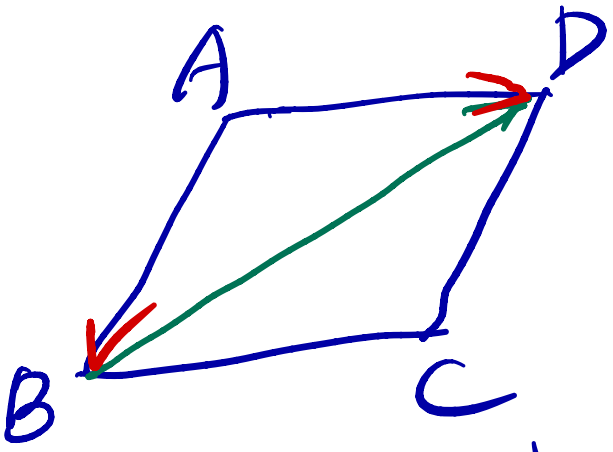
在坐標平面上的平行四邊形$ABCD$(按順序)中，若$\overrightarrow{AB}=(4,8)$、$\overrightarrow{AD}=(1,4)$，則

$\left|\overrightarrow{AC}\right|+\left|\overrightarrow{BD}\right|=$？

(A) $4\sqrt{5}+\sqrt{17}$　(B) 18　(C) $8\sqrt{5}+2\sqrt{17}$　(D) 36　【99*C04*】

Ans：(B)





$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

$=(4,8)+(1,4)$

$=(5,12)$

$\left|\overrightarrow{AC}\right|=13$

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$

$=(1,4)-(4,8)$

$=(-3,-4)$

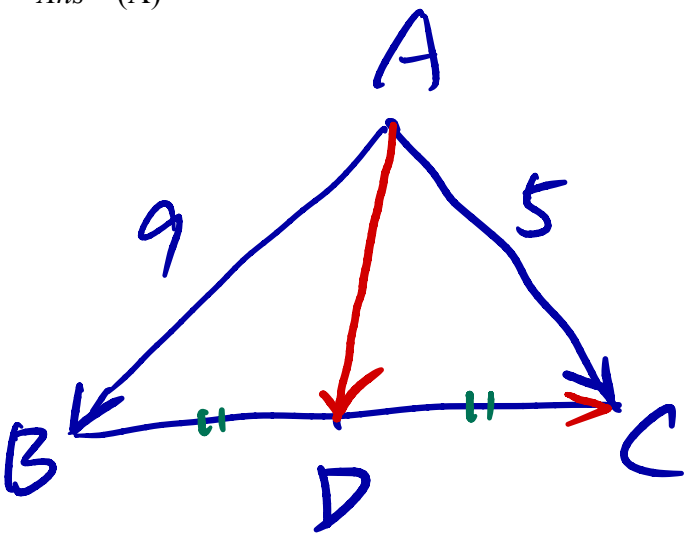
$\left|\overrightarrow{BD}\right|=5$

$\therefore \left|\overrightarrow{AC}\right|+\left|\overrightarrow{BD}\right|=13+5=18$ #

在 ΔABC 中，若 D 為線段 $\overline{BC}$ 的中點，且 $\overline{AB}=9$、$\overline{AC}=5$，則向量內積 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$？

(A) -28　(B) -14　(C) 14　(D) 28　【99*C23*】

Ans：(A)



$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$$

$$=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2)$$

$$=\frac{1}{2}\times(25-81)$$

$$=\frac{1}{2}\times(-56)=-28 \#$$

設 $\vec{a}=(4,3)$，$\vec{b}=(x,y)$ 為平面上兩向量，且 $x^2+y^2=40$，則此兩向量的內積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的最大值為何？

(A) $10\sqrt{10}$　(B) $12\sqrt{10}$　(C) $14\sqrt{10}$　(D) $16\sqrt{10}$　【98*C14*】

Ans：(A)

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=4x+3y$$

$$(x^2+y^2)(4^2+3^2)\geq(4x+3y)^2$$

$$40\times25\geq(4x+3y)^2$$

$$-\sqrt{1000}\leq 4x+3y\leq\sqrt{1000}$$

$$-10\sqrt{10}\leq 4x+3y\leq 10\sqrt{10}$$

若 $\dfrac{5}{(2x+1)(x-2)}=\dfrac{A}{2x+1}+\dfrac{B}{x-2}$，其中 A、B 為實數，則 $3A+2B=$？

(A) -7　(B) -6　(C) -5　(D) -4　【113*C01*】

Ans：(D)

$$5=A(x-2)+B(2x+1)$$
$$=(A+2B)x+(-2A+B)$$

$$\begin{cases} A+2B=0 \\ -2A+B=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=1 \end{cases}$$

故 $3A+2B=(-6)+2=-4$ #

亦可由

$x=-\frac{1}{2} \rightarrow 5=A\times(-\frac{5}{2}) \rightarrow A=-2$

$x=2 \rightarrow 5=B\times 5 \rightarrow B=1$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}-1\right)\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}+1\right]=\ ?$$

(A) $6+5\sqrt{2}$ (B) $8-5\sqrt{2}$ (C) $6-5\sqrt{2}$ (D) $-8+5\sqrt{2}$ 【113*C12*】

Ans：(D)

設 $x=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$

則原式 $=(x-1)(x^2+x+1)$

$=x^3-1$

$=(\sqrt{2}-1)^3-1$

$=(\sqrt{2})^3-3\times(\sqrt{2})^2\times1+3\times\sqrt{2}\times1^2-1^3-1$

$=2\sqrt{2}-6+3\sqrt{2}-1-1$

$=-8+5\sqrt{2}$ ※

已知方程式 $4x^2-2x-5=0$ 的兩根為 α、β，則 $\alpha\beta=$？

(A) $\frac{-5}{4}$　(B) $\frac{-1}{2}$　(C) $\frac{1}{2}$　(D) $\frac{5}{4}$　【112*C01*】

Ans：(A)

$\alpha\beta=\frac{-5}{4}$

下列何者正確？

(A) 對任意實數 x，$\sqrt[3]{x^3}=x$　　(B) 對任意實數 x，$\sqrt{4+x^2}=2+x$

(C) 對任意實數 x，$\sqrt{x^2}=x$　　(D) 對任意實數 x，$\sqrt[3]{8-x^3}=2-x$　　【112*C02*】

Ans：(A)

(A) $x\in R \rightarrow \sqrt[3]{x^3}=x$

(B) 例如 $x=1$ 時 $\sqrt{4+1^2}\neq 2+1$

(C) $x\in R \rightarrow \sqrt{x^2}=|x|$

(D) 例如 $x=1$ 時 $\sqrt[3]{8-1^3}\neq 2-1$

已知 $i=\sqrt{-1}$ 且 a、b 為實數。若 a、$b+2i$ 為 $-1+ai$ 為實係數三次方程式 $f(x)=0$ 之三根，

則下列多項式何者可能為 $f(x)$？

(A) x^3-x+10　(B) x^3+x+10　(C) $x^3-4x^2+9x-10$　(D) $x^3+4x^2+9x+10$ 【112*C12*】

Ans：(D)

$\because$ $b+2i$ 和 $-1+ai$ 為共軛複數

$\therefore$ $b=-1$，$a=-2$

$f(x)=0$ 之三根為 $-2, -1+2i, -1-2i$

令 $\begin{cases}\alpha=-1+2i\\ \beta=-1-2i\end{cases}$，則 $\begin{cases}\alpha+\beta=-2\\ \alpha\beta=(-1)^2+2^2=5\end{cases}$

得二次式 x^2+2x+5

以 α、β 為兩根之方程式為 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

故 $f(x)$ 可能為 $(x+2)(x^2+2x+5)$

展開得 $x^3+4x^2+9x+10$ ※

若 $\dfrac{x^2+2x+7}{(x-2)(x+2)(x+3)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{x+3}$，則 $A+B+C=$？

(A) 1　(B) 5　(C) 10　(D) 15　【111*C05*】

Ans：(A)

$x^2+2x+7=A(x+2)(x+3)+B(x-2)(x+3)+C(x-2)(x+2)$

$x=2 \rightarrow 4+4+7=A\times4\times5 \rightarrow A=\frac{3}{4}$

$x=-2 \rightarrow 4-4+7=B\times(-4)\times1 \rightarrow B=-\frac{7}{4}$

$x=-3 \rightarrow 9-6+7=C\times(-5)\times(-1) \rightarrow C=2$

故 $A+B+C=\frac{3}{4}+(-\frac{7}{4})+2=1$ ※

若四次多項式 $ax^4+bx^3+6x^2+5x+2$ 除以 $(x+1)^2$ 所得的餘式為 $3x+4$，則 $a+b=$？

(A) -12　(B) -6　(C) -4　(D) -2　【111*C10*】

Ans：(B)

$$ax^4+bx^3+6x^2+5x+2=(x+1)^2\cdot Q(x)+3x+4$$

$$ax^4+bx^3+6x^2+2x-2=(x+1)^2\cdot Q(x)$$

$$x=-1 \rightarrow a-b+6-2-2=0$$

$$\rightarrow \boxed{b=a+2}$$

$$ax^4+(a+2)x^3+6x^2+2x-2=(x^2+2x+1)\cdot Q(x)$$

$$\begin{array}{r|l}
 & a+(2-a)-2 \\
\hline
1+2+1 & a+(a+2)+6+2-2 \\
 & a+2a+a \\
\hline
 & (2-a)+(6-a)+2 \\
 & (2-a)+(4-2a)+(2-a) \\
\hline
 & (a+2)+a-2 \\
 & -2-4-2 \\
\hline
 & (a+4)+(a+4)+0
\end{array}$$

$$\therefore a+4=0 \rightarrow a=-4 \rightarrow b=-4+2=-2$$

故 $a+b=(-4)+(-2)=-6$ ※

若 $\dfrac{3x-1}{(x-3)(x-1)}=\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{x-1}$，其中 A、B 為實數，則下列何者正確？

(A) $A=2$　(B) $B=1$　(C) $A=-2$　(D) $B=-1$　【110*C01*】

Ans：(D)

$3x-1=A(x-1)+B(x-3)$

$x=3 \rightarrow 9-1=A\times 2 \rightarrow A=4$

$x=1 \rightarrow 3-1=B\times(-2) \rightarrow B=-1$

已知三次多項式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 滿足 $f(1)=f(2)=f(-2)=2$ 且 $f(-1)=8$，則下列何者正確？

(A) $a=-1$　(B) $b=1$　(C) $c=-4$　(D) $d=4$　【110*C15*】

Ans：(C)

設 $f(x)=a(x-1)(x-2)(x+2)+2$

則 $f(-1)=8 \rightarrow a\times(-2)\times(-3)\times 1+2=-8$

$\rightarrow 6a+2=8$

$\rightarrow a=1$

故 $f(x)=(x-1)\underline{(x-2)(x+2)}-2$

$=(x-1)(x^2-4)-2$

$=x^3-x^2-4x+2$

$a=1,\ b=-1,\ c=-4,\ d=2$

已知多項式 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x^2+x+1)$ 所得之餘式為 $3x^2+5x-2$，則 $f(x)$ 除以 x^2+x+1 所得之餘式為何？

(A) -4　(B) $2x-5$　(C) 6　(D) $8x-5$　【109*C03*】

Ans：(B)

$f(x)=(x-1)(x^2+x+1)\cdot Q(x)+\underline{3x^2+5x-2}$

∵ 要提出 x^2+x+1 當新的除式

∴ $3x^2+5x-2=\underline{3(x^2+x+1)+2x-5}$

故 $f(x)=(x^2+x+1)\left[(x-1)\cdot Q(x)+3\right]+\underline{2x-5}$ ※

設α、β為方程式$x^2+5x+k=0$之二根，已知多項式$f(x)=2x^2+7x+5$除以$x-\alpha$、$x-\beta$所得的餘式分別為-1、2，則$k=$？

(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 7　【109*C17*】

Ans：(C)

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-5\\ \alpha\beta=k\end{cases} \rightarrow \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=25-2k$$

$$\begin{cases}f(\alpha)=-1\\ f(\beta)=2\end{cases} \rightarrow \begin{cases}2\alpha^2+7\alpha+5=-1 & \text{—①}\\ 2\beta^2+7\beta+5=2 & \text{—②}\end{cases}$$

①+②得

$$2(\alpha^2+\beta^2)+7(\alpha+\beta)+10=1$$

$$2(25-2k)+7\times(-5)+10=1$$

$$50-4k-35+10=1$$

$$4k=50-35+10-1=24$$

$$k=6 \ ※$$

已知 $f(x)$ 與 $g(x)$ 均為多項式，若以 x^2-3x+2 除 $f(x)$ 所得餘式為 $3x-4$，以 $x-1$ 除 $g(x)$ 所得餘式為 5，則以 $x-1$ 除 $f(x)+g(x)$ 所得餘式為何？

(A) -4　(B) -3　(C) 3　(D) 4　【108*C07*】

Ans：(D)

$f(x)=(x-1)\cdot(x-2)\cdot Q_1(x)+3x-4$

$f(1)=3\times1-4=-1$

$g(1)=5$

$x-1$ 除 $f(x)+g(x)$ 之餘式為

$f(1)+g(1)=(-1)+5=4$ #

已知 $\dfrac{x^2+5x+6}{(x-2)(x^2+1)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$，其中 A、B 與 C 為實數，則 $A+2B+3C=$？

(A) -5　(B) 0　(C) 8　(D) 10　【108*C08*】

Ans：(A)

$x^2+5x+6=A(x^2+1)+(Bx+C)(x-2)$

$x=2 \rightarrow 4+10+6=A\times 5 \rightarrow A=4$

$x^2+5x+6=4x^2+4+(Bx+C)(x-2)$

$(Bx+C)(x-2)=-3x^2+5x+2$

$=(-3x-1)(x-2)$

$B=-3,\ C=-1$

故 $A+2B+3C=4+(-6)+(-3)$

$=-5$ ※

若 $f(x)=x^4-x^3+kx^2-2$ 為整係數多項式，其中 $k>0$ 且 $f(x)$ 有整係數一次因式 $x-h$，則 $k+h=?$

(A) 3　(B) 2　(C) 1　(D) 0　【107*C09*】

Ans：(A)

$f(x)=\underset{1}{x^4}-x^3+kx^2\underset{\pm1,\pm2}{-2}$

可能的一次因式有 $x+1, x-1, x+2, x-2$

① 一次因式若為 $x+1$，則 $f(\underset{h=-1}{-1})=0$

此時 $1+1+k-2=0 \rightarrow k=0$ (不合)

② 同理，$f(\underset{h=1}{1})=0 \rightarrow 1-1+k-2=0$

$\rightarrow k=2$ (合)

故 $h+k=1+2=3$ ※

③ $f(\underset{h=-2}{-2})=0 \rightarrow 16+8+4k-2=0 \rightarrow k=\frac{-11}{2}$ (不合)

④ $f(\underset{h=2}{2})=0 \rightarrow 16-8+4k-2=0 \rightarrow k=\frac{-3}{2}$ (不合)

若一元二次方程式 $x^2+(a-5)x+a+3=0$ 有兩正根，滿足 a 的實數解為 $m<a\le n$，則 $m+n=$？

(A) –4　(B) –3　(C) –2　(D) 1　【107*C20*】

Ans：(C)

有兩正根 $\rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta>0 \\ \alpha\beta>0 \\ \text{判別式 } D\ge 0 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} -(a-5)>0 \rightarrow a-5<0 \rightarrow \boxed{a<5} \\ a+3>0 \rightarrow \boxed{a>-3} \\ (a-5)^2-4(a+3)\ge 0 \end{cases}$

$\downarrow$

$a^2-14a+13\ge 0$

$1 \quad -1$

$1 \quad -13$

$\downarrow$

$(a-1)(a-13)\ge 0$

$\downarrow$

$\boxed{a\le 1 \text{ 或 } a\ge 13}$

故得知 $-3<a\le 1$

$m=-3,\ n=1 \rightarrow m+n=(-3)+1=-2$ #

求方程式 $\frac{-x^2}{x^2-4}=\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x-2}$ 所有解的和為何？

(A) –3　(B) –2　(C) –1　(D) 0　【106*C07*】

Ans：(C)

$-x^2=x-2+2(x+2)$

$-x^2=3x+2$

$x^2+3x+2=0$

$\begin{matrix}1 & \times & +1\\ 1 & & +2\end{matrix}$

$(x+1)(x+2)=0$

$x=-1$ 或 $x=-2$

(不合，會使分母為0)

故 $x=-1$

已知 a、b 為實數，若 $f(x)=x^3+ax^2+bx-6$，$g(x)=x^2-7x+6$，且 $f(x)$ 可被 $g(x)$ 整除，求 $2a+3b$ 之值。

$$\begin{matrix}1 & -1\\ 1 & -6\end{matrix}$$

$(x-1)(x-6)$

(A) 23　(B) 36　(C) 39　(D) 45　【105*C07*】

Ans：(A)

$$f(x)=x^3+ax^2+bx-6=(x-1)(x-6)\cdot Q(x)$$

$$\begin{cases} f(1)=0 \\ f(6)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1+a+b-6=0 \\ 216+36a+6b-6=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ 6a+b=-35 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a=-8 \\ b=13 \end{cases}$$

故 $2a+3b=-16+39=23$ ※

已知 A、B、C 為常數，且對任意 x 均滿足 $\dfrac{3x^2+9x-3}{(x-1)(x+2)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{(x+2)^2}$，求 B 之值。

(A) -1　(B) 0　(C) 1　(D) 2　【105*C08*】

Ans：(D)

$$3x^2+9x-3=A(x+2)^2+B(x-1)(x+2)+C(x-1)$$

$$x=1 \rightarrow 3+9-3=A\times 9 \rightarrow A=1$$

$$x=-2 \rightarrow 12-18-3=C\times(-3) \rightarrow C=3$$

$$3x^2+9x-3=x^2+4x+4+B(x-1)(x+2)+3x-3$$

$$B(x-1)(x+2)=2x^2+2x-4$$

$$=2(x^2+x-2)$$

$$\begin{matrix}1 & & -1\\ 1 & \times & +2\end{matrix}$$

$$=2(x-1)(x+2)$$

$$\therefore B=2 \ \#$$

將 $(x^4-3x^3+2x-5)(x^3-2)(x+3)$ 乘開化簡後，x^3 項的係數為何？

(A) -5　(B) -3　(C) 3　(D) 5　【104*C05*】

Ans：(C)

$(x^4-3x^3+2x-5)(x^4+3x^3-2x-6)$

x^3項係數$=18-15=3$ ※

已知 $i=\sqrt{-1}$ 且 a、b 為實數，若 $(2+i)(a+bi)=15+5i$，則 $a+b=$？

(A) 4　(B) 6　(C) 8　(D) 10　【104*C09*】

Ans：(B)

$$a+bi=\frac{15+5i}{2+i}\times\frac{2-i}{2-i}$$

$$=\frac{30-15i+10i-5i^2}{2^2+1^2}$$

$$\boxed{i^2=-1}$$

$$=\frac{30-15i+10i+5}{5}$$

$$=\frac{35-5i}{5}$$

$$=7-i$$

$\therefore a=7,\ b=-1$

故 $a+b=7+(-1)=6$ #

已知 a、b、c、d 為實數，若 $2x^3+x^2-5x-3=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$ ，則 $abcd=$？

(A) –20　(B) –10　(C) 10　(D) 20　【104*C17*】

Ans：(C)

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & +1 & -5 & -3 & -1 \\ & -2 & +1 & +4 & \\ \hline 2 & -1 & -4 & \boxed{+1} & \\ & -2 & +3 & & \\ \hline 2 & -3 & \boxed{-1} & & \\ & -2 & & & \\ \hline 2 & \boxed{-5} & & & \end{array}$$

$a=2, b=-5, c=-1, d=1$

$abcd=2\times(-5)\times(-1)\times 1=10$ #

求 $(\sqrt[3]{3}-2)(\sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{3}+4)$ 之值為何？

(A) -5　(B) -3　(C) 8　(D) 11　【103*C05*】

Ans：(A)

取 $a=\sqrt[3]{3}$，$b=2$

利用 $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ 得

原式 $=(\sqrt[3]{3})^3-2^3=3-8=-5$ ※

設α、β為方程式$x^2-5x+3=0$的兩根，則$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$之值為何？

(A) $-\frac{7}{3}$　(B) $\frac{17}{3}$　(C) $\frac{19}{3}$　(D) $\frac{20}{3}$　【103*C14*】

Ans：(C)

$$\begin{cases}\alpha+\beta=5\\ \alpha\beta=3\end{cases} \rightarrow \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=25-6=19$$

$$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{19}{3}$$

※

已知 m、n 為實數，$Q(x)$為二次多項式。若 $x^4-mx^3-x^2-5x+n=(x^2-3x+2)Q(x)$，則 $2m+n=$？

$\begin{matrix}1 & \times & -1\\ 1 & & -2\end{matrix}$

(A) -6　(B) -2　(C) 4　(D) 8　$(x-1)(x-2)$ 【102*C02*】

Ans：(D)

$x^4-mx^3-x^2-5x+n=(x-1)(x-2)\cdot Q(x)$

$x=1 \rightarrow 1-m-1-5+n=0$

$\rightarrow m-n=-5$ —①

$x=2 \rightarrow 16-8m-4-10+n=0$

$\rightarrow 8m-n=2$ —②

②－① 得 $7m=7 \rightarrow m=1$

$\rightarrow n=6$

故 $2m+n=2+6=8$ ※

已知 a、b、c 為實數。若 $x \neq \frac{3}{2}$ 時，等式 $\frac{4x^2-6x-3}{(2x-3)^2} = a + \frac{b}{2x-3} + \frac{c}{(2x-3)^2}$ 恆成立，則 $a+b+2c=$？

(A) -4　(B) -2　(C) 2　(D) 4　【102*C19*】

Ans：(B)

$4x^2-6x-3 = a(2x-3)^2 + b(2x-3) + c$

$= a(4x^2-12x+9) + b(2x-3) + c$

比較係數

x^2 項：$4a=4 \rightarrow a=1$

x 項：$-6 = -12+2b \rightarrow b=3$

常數項：$-3 = 9-9+c \rightarrow c=-3$

故 $a+b+2c = 1+3+(-6) = -2$ ※

已知 k 為實數，且二次方程式 $9x^2+(12k+18)x+(4k^2+12k+5)=0$ 有二實根。若其中一個根大於 1，另一根小於 0，則 k 之範圍為何？

(A) $-\frac{5}{2}<k<-2$　(B) $-2<k<-\frac{3}{2}$　(C) $-\frac{3}{2}<k<-1$　(D) $-1<k<-\frac{1}{2}$　【102*C*25】

Ans：(A)

$$9x^2+(12k+18)x+(2k+1)(2k+5)=0$$

$$\begin{array}{ccc} 3 & & (2k+1) \\ 3 & & (2k+5) \\ \hline & & 6k+15+6k+3=12k+18 \end{array}$$

$$[3x+(2k+1)][3x+(2k+5)]=0$$

$$x=\underbrace{-\frac{2k+1}{3}}_{\text{較大的根}} \text{ 或 } x=\underbrace{-\frac{2k+5}{3}}_{\text{較小的根}}$$

$$\therefore \begin{cases} -\frac{2k+1}{3}>1 \\ -\frac{2k+5}{3}<0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2k+1<-3 \\ 2k+5>0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} k<-2 \\ k>-\frac{5}{2} \end{cases}$$

故得 $-\frac{5}{2}<k<-2$ #

已知 a 和 c 為實數，若複數 $a+2i$ 為一元二次方程式 $x^2+2x+c=0$ 的一根，則 c 之值為何？

(A) -4　(B) -2　(C) 3　(D) 5　【101*C10*】

Ans：(D)

實係數方程式
虛根成雙

$$\begin{cases}\alpha=a+2i\\ \beta=a-2i\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=2a\\ \alpha\beta=a^2+2^2=a^2+4\end{cases}$$

方程式為 $x^2-2ax+(a^2+4)=0$

比較係數得 $2=-2a$ 且 $c=a^2+4$

故 $a=-1\rightarrow c=(-1)^2+4=5$ ※

☆ 以 α、β 為兩根的方程式為

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

若 x^2+x+1 為 x^3+ax^2+bx+2 的因式，則下列何者正確？

(A) $a>b$　(B) $a^2+b^2=10$　(C) $a-b=-2$　(D) $a+b=6$　【101*C12*】

Ans：(D)

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1+2 \\
\hline
1+1+1 & 1+a+b+2 \\
 & 1+1+1 \\
\hline
 & (a-1)+(b-1)+2 \\
 & 2+2+2 \\
\hline
 & (a-3)+(b-3)+0
\end{array}
$$

$$\begin{cases} a-3=0 \\ b-3=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=3 \end{cases} \rightarrow a+b=6 \ ※$$

設 $x-1$ 和 $x+1$ 為多項式 $x^5+ax^4+bx^3+5x^2+2x-5$ 的因式，則 $3a+b$ 之值為何？

(A) -3　(B) 1　(C) 3　(D) 6　【101*C13*】

Ans：(A)

$x=1 \rightarrow 1+a+b+5+2-5=0$

$\rightarrow a+b=-3$ —①

$x=-1 \rightarrow -1+a-b+5-2-5=0$

$\rightarrow a-b=3$ —②

$\frac{①+②}{2}$ 得 $a=0 \rightarrow b=-3$

故 $3a+b=0+(-3)=-3$ #

已知 $f(x)$ 為一實係數多項式，且 $f(\frac{3}{2})=27$，$f(-\frac{5}{3})=8$。若 $f(x)$ 除以 $6x^2+x-15$ 的餘式為 $ax+b$，則 $a+b=$？

$\begin{matrix}2 & -3\\ 3 & +5\end{matrix}$

(A) 4　(B) 6　(C) 18　(D) 24

$(2x-3)(3x+5)$【100*C11*】

Ans：(D)

$$f(x)=(2x-3)(3x+5)\cdot Q(x)+ax+b$$

$$\begin{cases} f(\frac{3}{2})=\frac{3}{2}a+b=27 \quad —① \\ f(-\frac{5}{3})=-\frac{5}{3}a+b=8 \quad —② \end{cases}$$

①－②得 $(\frac{3}{2}+\frac{5}{3})a=19 \rightarrow \frac{19}{6}a=19$

$\rightarrow a=6$

$\frac{3}{2}\times 6+b=27 \rightarrow 9+b=27 \rightarrow b=18$

故 $a+b=6+18=24$ ※

若 α 、 β 為方程式 $x-\frac{3}{x}=-1$ 的兩相異實根，則 $(\frac{2}{\alpha}+1)(\frac{2}{\beta}+1)=$？

(A) -1　(B) $\frac{1}{3}$　(C) 1　(D) $\frac{5}{3}$　【100*C17*】

Ans：(B)

$$x-\frac{3}{x}=-1 \rightarrow x^2-3=-x$$

$$\rightarrow x^2+x-3=0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=-1 \\ \alpha\beta=-3 \end{cases}$$

$$(\frac{2}{\alpha}+1)(\frac{2}{\beta}+1)=\frac{4}{\alpha\beta}+\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+1$$

$$=\frac{4}{\alpha\beta}+\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}+1$$

$$=\frac{4}{-3}+\frac{-2}{-3}+1$$

$$=\frac{2}{-3}+1$$

$$=\frac{1}{3} \ ※$$

設a、b、c、d為實數，若 x^2-1 為 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 之因式，且 $f(x)$ 除以 $x-2$ 餘 6，

$(x+1)(x-1)$

則 $2a+b=$？

(A) -4　(B) -2　(C) 2　(D) 4　【99*C17*】

Ans：(C)

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=(x+1)(x-1)\cdot Q(x)$

$x=-1 \rightarrow -a+b-c+d=0$ —①

$x=1 \rightarrow a+b+c+d=0$ —②

①+②得 $2b+2d=0 \rightarrow d=-b$

②−①得 $2a+2c=0 \rightarrow c=-a$

$f(x)=ax^3+bx^2-ax-b$

$f(2)=6 \rightarrow 8a+4b-2a-b=6$

$\rightarrow 6a+3b=6$

$\rightarrow 2a+b=2$ ※

令 $i=\sqrt{-1}$，若 $1+i$ 為方程式 $2x^2+kx+6+2i=0$ 之一根，則 $k=$？

(A) -6　(B) -4　(C) $-5+i$　(D) $-10+2i$　【99C18】

Ans：(A)

不是實係數方程式，不可用成雙定理！

但兩根和、兩根積仍可使用！

設 $\alpha=1+i$，另一根為 β

則 $\alpha\beta=\frac{6+2i}{2}\rightarrow(1+i)\beta=3+i$　$\boxed{i^2=-1}$

$$\beta=\frac{3+i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}=\frac{3-3i+i-i^2}{1^2+1^2}=\frac{3-3i+i+1}{2}$$

$$=\frac{4-2i}{2}$$

$$=2-i$$

故 $\alpha+\beta=-\frac{k}{2}\rightarrow(1+i)+(2-i)=-\frac{k}{2}$

$$\rightarrow 3=-\frac{k}{2}$$

$$\rightarrow k=-6$$ #

$f(x)=0 \to$ 虛根成雙

設 $f(x)$ 為實係數三次多項式，若 $f(1)=f(1+i)=0$ 且 $f(0)>0$，則下列何者正確？

(A) $f(-2)<0$　(B) $f(2)>0$　(C) $f(4)<0$　(D) $f(6)=0$　【99C24】

Ans：(C)

$\because f(1+i)=0$

$\therefore f(1-i)=0$

即 $f(x)=0$ 之三根為 $1, 1+i, 1-i$

$x-1$

$\begin{cases}\alpha=1+i\\ \beta=1-i\end{cases} \to \begin{cases}\alpha+\beta=2\\ \alpha\beta=1^2+1^2=2\end{cases} \to x^2-2x+2=0$

設 $f(x)=a(x-1)(x^2-2x+2)$

$\because f(0)=a\times(-1)\times 2>0$

$\therefore a<0$

(A) $f(-2)=\overset{-}{a}\times\overset{-}{(-3)}\times\overset{+}{10}>0$

(B) $f(2)=\overset{-}{a}\times\overset{+}{1}\times\overset{+}{2}<0$

(C) $f(4)=\overset{-}{a}\times\overset{+}{3}\times\overset{+}{14}<0$ ※

(D) $f(6)=\overset{-}{a}\times\overset{+}{5}\times\overset{+}{26}<0$

若 α、β 均為實數，且 $\alpha^3=2+\sqrt{5}$，$\beta^3=2-\sqrt{5}$，則 $\alpha+\beta=$？

(A) -1　(B) 1　(C) 2　(D) 4　【98*C05*】

Ans：(B)

$$\begin{cases}\alpha^3=2+\sqrt{5}\\ \beta^3=2-\sqrt{5}\end{cases} \rightarrow \alpha^3\beta^3=(\alpha\beta)^3=(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})=4-5=-1$$

$$\rightarrow \alpha\beta=-1$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$4=(\alpha+\beta)^3+3(\alpha+\beta)$$

得 $(\alpha+\beta)^3+3(\alpha+\beta)-4=0$

設 $\alpha+\beta=x$

則 $x^3+3x-4=0$

$$(x-1)(x^2+x+4)=0$$

$x^2+x+4=0$ 無實根

而 $\alpha\in R$, $\beta\in R$

$\alpha+\beta$ 為實數

故 $x=1$，即 $\alpha+\beta=1$ ※

設 $p(x)$ 為一元二次多項式。若 $p(1)=1$，$p(2)=\frac{1}{2}$，$p(3)=\frac{1}{3}$，則 $p(4)$ 之值為何？

(A) $-\frac{2}{3}$　(B) $-\frac{1}{2}$　(C) $\frac{1}{2}$　(D) $\frac{2}{3}$　【98*C06*】

Ans：(C)

由 $P(1)=1$ 可設 $P(x)=a(x-1)(x-2)+b(x-1)+1$

再由 $P(2)=\frac{1}{2}$ 得 $b+1=\frac{1}{2} \rightarrow b=-\frac{1}{2}$

此時 $P(x)=a(x-1)(x-2)-\frac{1}{2}(x-1)+1$

再由 $P(3)=\frac{1}{3}$ 得 $a\times2\times1-\frac{1}{2}\times2+1=\frac{1}{3}$

$2a=\frac{1}{3} \rightarrow a=\frac{1}{6}$

得 $P(x)=\frac{1}{6}(x-1)(x-2)-\frac{1}{2}(x-1)+1$

故 $P(4)=\frac{1}{6}\times3\times2-\frac{1}{2}\times3+1$

$=1-\frac{3}{2}+1$

$=\frac{1}{2}$ ※

設 $\dfrac{5x^2+2x-4}{(x-1)(x^2+x-1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+x-1}$，則 $A+B+C=$？

(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 6　【98*C07*】

Ans：(D)

$5x^2+2x-4=A(x^2+x-1)+(Bx+C)(x-1)$

$x=1 \rightarrow 5+2-4=A\times 1 \rightarrow A=3$

$5x^2+2x-4=3x^2+3x-3+(Bx+C)(x-1)$

$(Bx+C)(x-1)=2x^2-x-1$

$=(2x+1)(x-1)$

$B=2,\ C=1$

故 $A+B+C=3+2+1=6$ ※

已知 $i=\sqrt{-1}$，且 a、b 均為實數。若 $1-\sqrt{3}i$ 為方程式 $x^3+3x^2+ax+b=0$ 的一根，則 $a+b=$？

(A) -4　(B) -2　(C) 8　(D) 14　【98*C08*】

虛根成雙

Ans：(D)

$$\begin{cases}\alpha=1-\sqrt{3}i\\ \beta=1+\sqrt{3}i\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=2\\ \alpha\beta=1^2+(\sqrt{3})^2=4\end{cases}$$

得 x^2-2x+4 為 x^3+3x^2+ax+b 之因式

$$\begin{array}{r|l} & 1+5 \\ \hline 1-2+4 & 1+3+a+b \\ & 1-2+4 \\ \hline & 5+(a-4)+b \\ & 5-10+20 \\ \hline & (a+6)+(b-20) \end{array}$$

$$\begin{cases}a+6=0\\ b-20=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=-6\\ b=20\end{cases}$$

故 $a+b=-6+20=14$ ※

***ch05*_直線與圓**

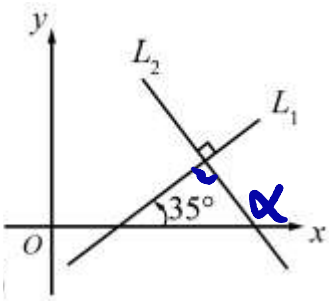
設直線 L_1 的斜角為 35°，已知直線 L_2 與 L_1 相互垂直，如圖所示，則 L_2 的斜角為何？

(A) 35°

(B) 55°

(C) 125°

(D) 155°



【113*C02*】

Ans：(C)

$\alpha = 35^\circ + 90^\circ = 125^\circ$ #

已知一直線 $L: y=x-5$ 與圓 C 相切，且圓 C 的圓心為 $(3,-4)$，則圓 C 的半徑為何？

(A) $\sqrt{2}$　(B) $2\sqrt{2}$　(C) $3\sqrt{2}$　(D) $4\sqrt{2}$　【113*C04*】

Ans：(A)

$L: x-y-5=0$

$O(3,-4)$

$$r=\frac{|3+4-5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$ ※

若坐標平面上四點 $A(1,2)$、$B(2,-3)$、$C(2,7)$、$D(a,-10)$在同一圓上，則 $a=$？

(A) 19 或 9　(B) 20 或 8　(C) 24 或 6　(D) 27 或 3　【112*C16*】

Ans：(A)

$x^2+y^2+dx+ey+f=0$

$(1,2) \to 1+4+d+2e+f=0$

$\to d+2e+f=-5$ —①

$(2,-3) \to 4+9+2d-3e+f=0$

$\to 2d-3e+f=-13$ —②

$(2,7) \to 4+49+2d+7e+f=0$

$\to 2d+7e+f=-53$ —③

$d-5e=-8$

$\boxed{d=-28}$

$10e=-40$

$\boxed{e=-4}$

由①得 $-28-8+f=-5 \to \boxed{f=31}$

圓：$x^2+y^2-28x-4y+31=0$

$(a,-10) \to a^2+100-28a+40+31=0$

$\to a^2-28a+171=0$

$\begin{matrix} 1 & \times & -19 \\ 1 & & -9 \end{matrix}$

$\to (a-19)(a-9)=0 \to a=19$ 或 9 ※

若 $A(1,4)$、$B(6,2)$所連接的線段 $\overline{AB}$ 與直線 $L: x-y+1=0$ 相交於 P 點，則 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=$？

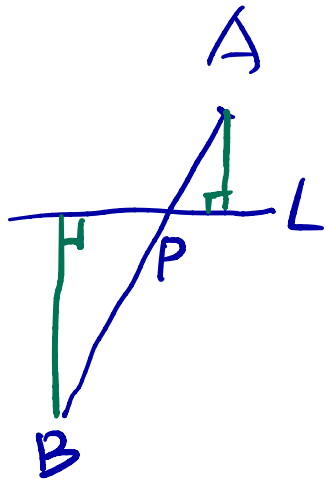
(A) $\dfrac{2}{5}$　(B) $\dfrac{3}{7}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{3}{5}$　【111*C07*】

Ans：(A)

$$\overline{AP}:\overline{BP}=d(A,L):d(B,L)$$

$$=\frac{|1-4+1|}{\cancel{\sqrt{2}}}:\frac{|6-2+1|}{\cancel{\sqrt{2}}}$$

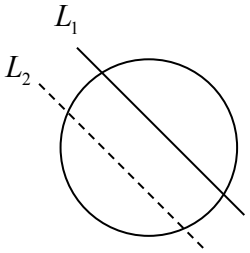
$$=2:5$$



故 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=\dfrac{2}{5}$ #

已知圓 $x^2+y^2+2x+4y-3=0$ 與相異兩直線 $L_1: x+y+1=0$ 及 $L_2: ax+by+10=0$ 分別交於兩點，且 $L_1 // L_2$，如圖所示。若此圓圓心到兩直線 L_1、L_2 的距離相等，則 $a+b=$？

(A) 2　(B) 4　(C) 6　(D) 10　【111*C07*】



Ans：(B)

$O\left(-\frac{2}{2}, -\frac{4}{2}\right) = O(-1,-2)$

如圖，$L // L_1$ 且 L 過 O 點，則

得 $L: x+y=-3$

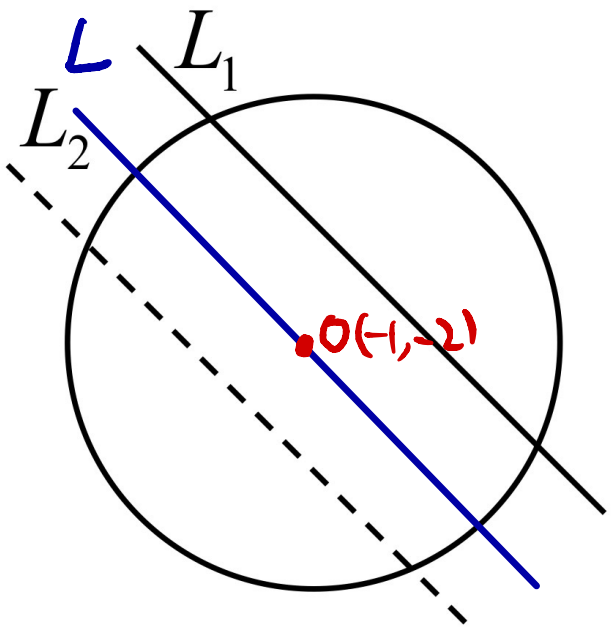
而 $L_1: x+y=-1$

且 L 和 L_1、L_2 等距

故得知 L_2 為 $x+y=-5 \rightarrow 2x+2y=-10$

而已知 L_2 為 $ax+by=-10$

$\therefore a=2, b=2 \rightarrow a+b=4$ ※



若圓 C 與 y 軸相切，且圓心為拋物線 $y=x^2+4x+5$ 之頂點，則下列何者為圓 C 的方程式？

(A) $x^2+y^2+4x-2y+4=0$　(B) $x^2+y^2-4x+2y+1=0$　(C) $x^2+y^2-4x+2y+4=0$

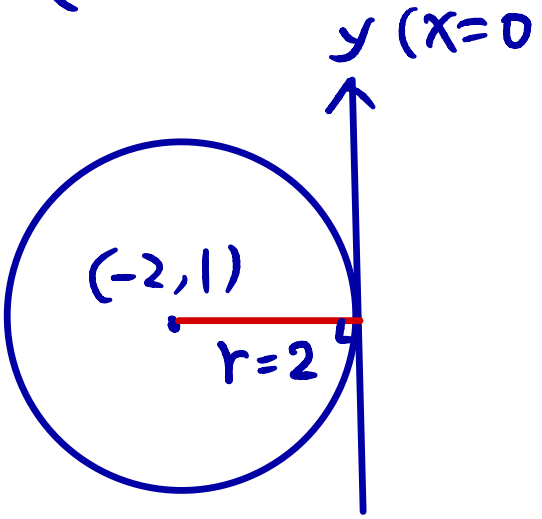
(D) $x^2+y^2+4x-2y+1=0$　【110*C08*】

Ans：(D)

$y=(x^2+4x+4)+1$

$=(x+2)^2+1$

$O(-2,1)$



$C:(x+2)^2+(y-1)^2=2^2$

$\rightarrow x^2+4x+4+y^2-2y+1-4=0$

$\rightarrow x^2+y^2+4x-2y+1=0$

已知 a、b 為實數。若直線 $L_1: y=ax+b$ 與 $L_2: y=bx+a$ 相互垂直，且 $a^2+b^2=50$，則 L_1 與 L_2 的交點與原點的距離為多少？

(A) $4\sqrt{3}$　(B) 7　(C) $5\sqrt{2}$　(D) $2\sqrt{13}$　【110*C13*】

Ans：(B)

$$\begin{cases} y=ax+b & \text{—①} \\ y=bx+a & \text{—②} \end{cases}$$

①−②得 $0=(a-b)x+(b-a) \rightarrow x=1$

$\rightarrow y=a+b$

交點 $(1, a+b)$

兩直線互相垂直

斜率相乘等於 -1

又 $L_1 \perp L_2 \rightarrow ab=-1$

所求 $=\sqrt{1^2+(a+b)^2}$

$=\sqrt{1+a^2+2ab+b^2}$

$=\sqrt{1+50-2}$

$=\sqrt{49}$

$=7$ #

若 k 為實數，且點 $P(1, k)$ 為曲線 $kx^2+y^2+2x-4y+k-1=0$ 上之一點，求曲線之圖形為何？

(A) 圓　(B) 拋物線　(C) 橢圓　(D) 雙曲線　【109*C15*】

Ans：(A)

以 $x=1$，$y=k$ 代入得

$k+k^2+2-4k+k-1=0$

$k^2-2k+1=0$

$(k-1)^2=0$

$k=1$

$\therefore x^2+y^2+2x-4y=0$ 圖形為一圓 #

在人工智慧的分類技術中，用到以直線分類不同物件的概念。設平面上有七個點 $A(1,3)$、$B(3,2)$、$C(-1,4)$、$D(-1,2)$、$E(1,-2)$、$F(-2,-1)$、$G(-3,2)$分屬●、▲二類，其中直線 L：$3x+4y-12=0$ 未能將它們正確分類，如圖所標示。若將 L 平行移動至新的位置成為新直線 L_1 且能達到正確分類目的，則下列何者可為 L_1 的直線方程式？【109*C24*】

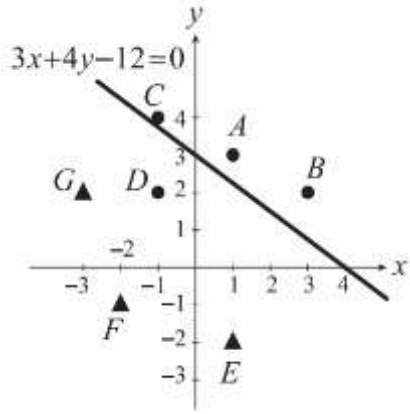
(A) $3x+4y+2=0$

(B) $3x+4y-6=0$

(C) $6x+8y+3=0$

(D) $6x+8y-3=0$

Ans：(D)



L_1過 $D(-1,2) \to L_1: 3x+4y=5$

L_2過 $G(-3,2) \to L_2: 3x+4y=-1$

故 L 為 $3x+4y=k$ 且 L 介於 L_1、L_2 間

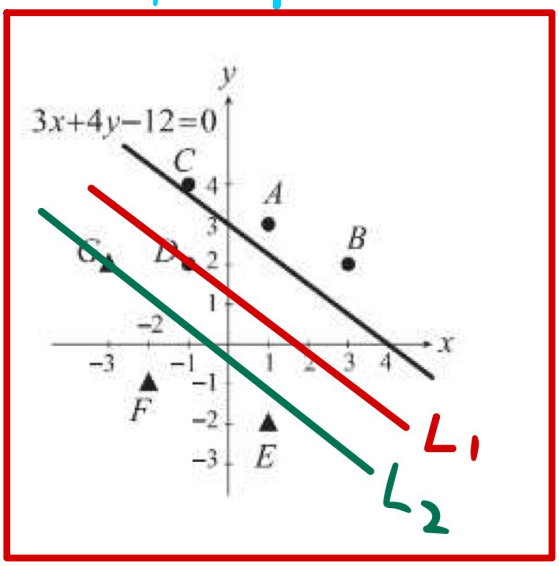
$-1<k<5$

(A) $3x+4y=-2$

(B) $3x+4y=6$

(C) $3x+4y=-\frac{3}{2}$

(D) $3x+4y=\frac{3}{2}$ (合)



已知坐標平面上三直線 $L_1:3x+3y=2$、$L_2:2x-3y=3$、$L_3:x-ay=-2$，且這三直線將平面分成六個區域，則 a **<u>不可以</u>**是下列哪一個值？

(A) $\frac{3}{2}$　(B) 1　(C) -1　(D) -9　【108*C09*】

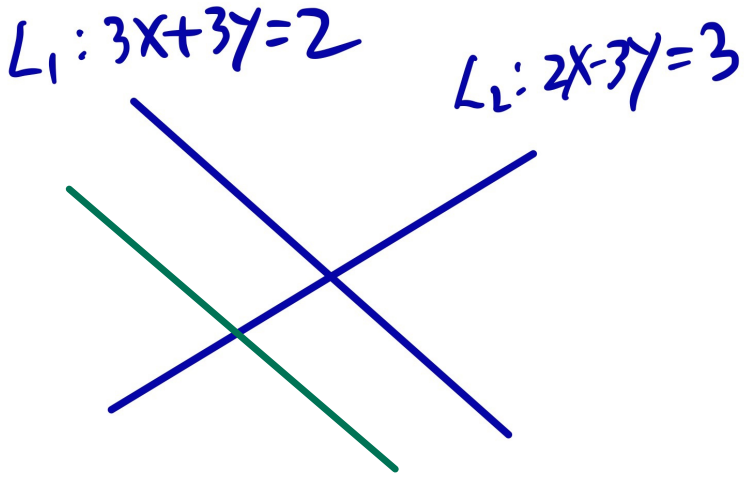
Ans：(B)

(A) $x-\frac{3}{2}y=-2$

$2x-3y=-4$

屬②

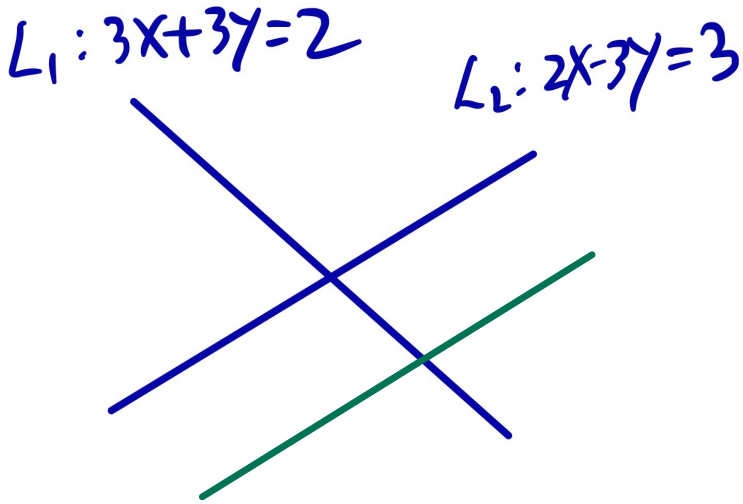
①



(B) $x-y=-2$

不屬①、②、③

②



(C) $x+y=-2$

屬①

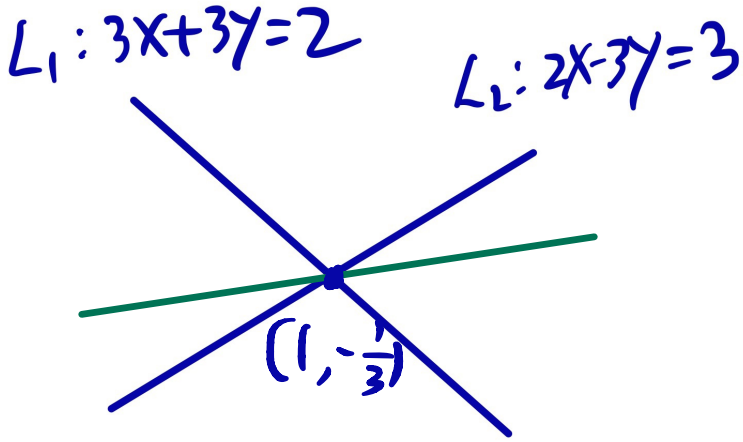
(D) $x+9y=-2$

1　$-\frac{1}{3}$

(合)

屬③

③



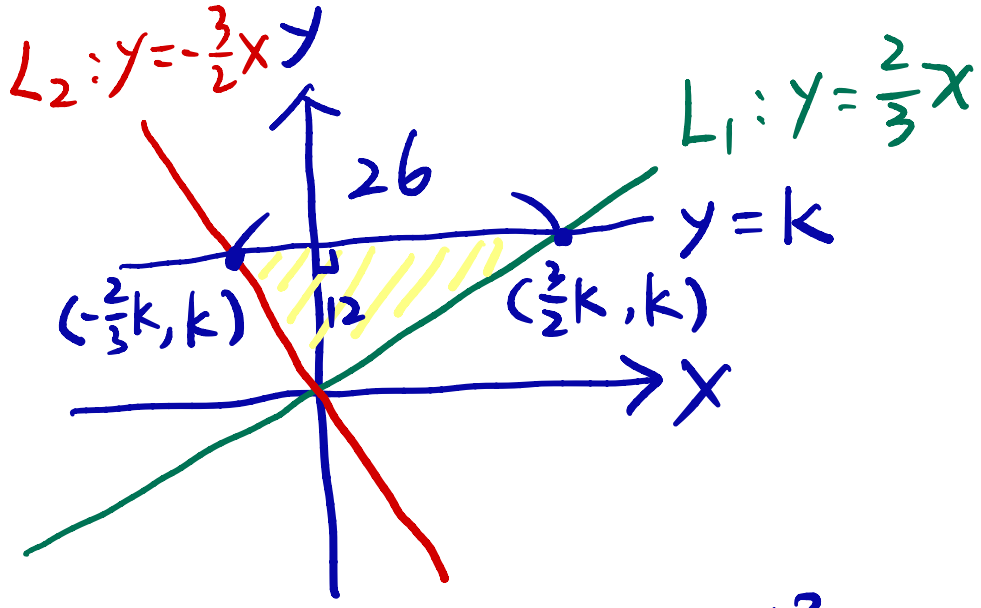
已知坐標平面上三直線 L、L_1 與 L_2，若直線 L 為水平線，L_1 與 L_2 的斜率分別為 $\frac{2}{3}$ 與 $-\frac{3}{2}$，且直線 L 被 L_1 與 L_2 所截出的線段長為 26，則此三角形所圍成的三角形面積為多少平方單位？

(A) 39　(B) 52　(C) 78　(D) 156　【108*C19*】

Ans：(D)

可直接設 $L_1: y=\frac{2}{3}x$，$L_2: y=-\frac{3}{2}x$

則



$\frac{3}{2}k-(-\frac{2}{3}k)=26 \rightarrow \frac{13}{6}k=26 \rightarrow k=12$

$\triangle=\frac{1}{2}\times 26\times 12=156$ ※

已知直線 L_1 通過(2 , 3)、(1 , 5)兩點，且直線 L_2 的 x 截距是 1、y 截距是 4。若 L_1 與 L_2 的斜率分別為 m_1 與 m_2，則下何者正確？

(A) $0 < m_1 < m_2$　(B) $m_1 < 0 < m_2$　(C) $m_2 < 0 < m_1$　(D) $m_2 < m_1 < 0$　【107*C01*】

Ans：(D)

$$m_1 = \frac{3-5}{2-1} = -2$$

$$m_2 = \frac{0-4}{1-0} = -4$$

$$\therefore -4 < -2 < 0 \rightarrow m_2 < m_1 < 0 \ \#$$

若兩直線 $3x+4y=6$ 與 $9x+12y=k$ 的距離為 2，則 k 的值可能為下列何者？

(A) -48　(B) -12　(C) 10　(D) 24　【107*C02*】

Ans：(B)

$3x+4y=6 \rightarrow 9x+12y=18$

$\dfrac{|k-18|}{\sqrt{9^2+12^2}}=2 \rightarrow |k-18|=2\times 15=30$

① $k-18=30 \rightarrow k=48$

② $k-18=-30 \rightarrow k=-12$

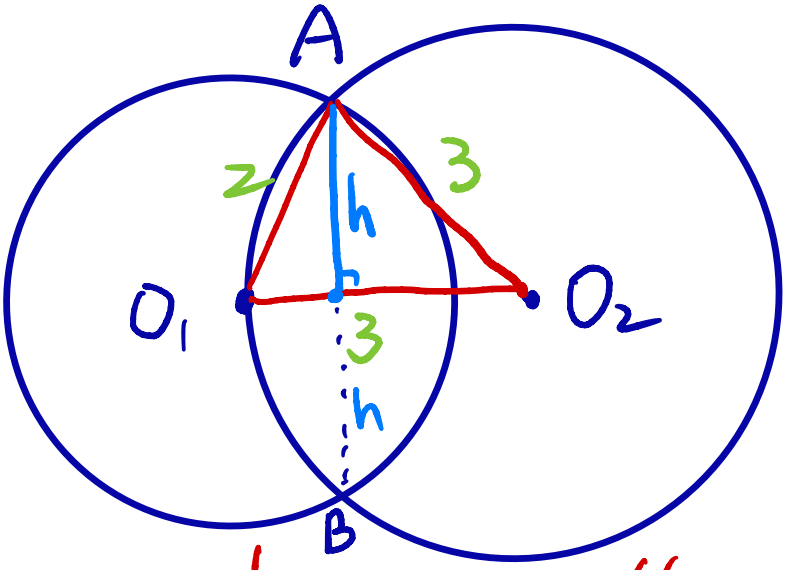
設點 O_1 為圓 $C: x^2+y^2-6x+4y+9=0$ 之圓心。今以另一點 O_2 為圓心、$\overline{O_1O_2}$ 為半徑作一圓，且此圓與圓 C 交於 A、B 兩點。若 $\overline{AO_2}=3$，則 $\overline{AB}=$？

(A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　(B) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$　(C) $2\sqrt{2}$　(D) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$　【107*C15*】

Ans：(D)

$C: (x^2-6x+9)+(y^2+4y+4)=-9+9+4$

$\rightarrow (x-3)^2+(y+2)^2=4 \rightarrow r_1=2$



$S=\frac{1}{2}(2+3+3)=4$

$\triangle AO_2O_3$ 面積 $=\sqrt{4\times2\times1\times1}=2\sqrt{2}$

$\frac{1}{2}\times3\times h=2\sqrt{2} \rightarrow h=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

故 $\overline{AB}=2h=\frac{8\sqrt{2}}{3}$ #

設 $P(x,y)$ 為圓 $x^2+y^2-6x+8y=0$ 上的動點，若 $4x+3y+5$ 的最大值為 M，最小值為 m，則 $M+m=$？

(A) -5　(B) 0　(C) 5　(D) 10　【107*C*25】

Ans：(D)

$$(x^2-6x+9)+(y^2+8y+16)=9+16$$

$$\rightarrow (x-3)^2+(y+4)^2=25$$

$$\begin{cases} x=3+5\cos\theta \\ y=-4+5\sin\theta \end{cases}$$

$$4x+3y+5=\cancel{12}+20\cos\theta-\cancel{12}+15\sin\theta+5$$

$$=15\sin\theta+20\cos\theta+5$$

而 $-\sqrt{15^2+20^2}\le 15\sin\theta+20\cos\theta\le\sqrt{15^2+20^2}$

即 $-25\le 15\sin\theta+20\cos\theta\le 25$

故 $-20\le 15\sin\theta+20\cos\theta+5\le 30$

$M=30$，$m=-20\rightarrow M+m=10$ ※

設直線 $2x+y=11$ 與拋物線 $y=x^2-4$ 在第二象限的交點為 A，在第一象限的交點為 B，若線段 $\overline{AB}$ 上一點 P 滿足 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$，則 P 點坐標為何？

(A) $(\frac{1}{3},\frac{31}{3})$　(B) $(-2,26)$　(C) $(-1,13)$　(D) $(\frac{-7}{3},\frac{47}{3})$　【106*C01*】

Ans：(A)

解 $\begin{cases} y=-2x+11 \\ y=x^2-4 \end{cases} \rightarrow x^2-4=-2x+11$

$x^2+2x-15=0 \rightarrow (x-3)(x+5)=0$

$\begin{matrix} 1 & -3 \\ 1 & +5 \end{matrix}$

$\rightarrow x=3$ 或 $x=-5$

可得 $B(3,5)$　$A(-5,21)$

$2 : 1$

$A(-5,21)$　$P(x,y)$　$B(3,5)$

$x=\frac{-5+6}{3}=\frac{1}{3}$

$y=\frac{21+10}{3}=\frac{31}{3}$

$\rightarrow P(\frac{1}{3},\frac{31}{3})$

設打水漂遊戲中石頭落入水中的漣漪是以圓的形式展現。若某人向河面擲出石頭的方向是沿著直線 $y=x-1$ 行進，下列哪一個圓方程式可為此漣漪的形式？

(A) $x^2-2x+y^2+4y+1=0$　　(B) $x^2-4x+y^2-2y+4=0$

(C) $x^2-2x+y^2-4y+4=0$　　(D) $x^2-4x+y^2-6y+9=0$　　【106*C20*】

Ans：(B)

(A) 圓心 $\left(-\frac{-2}{2},-\frac{4}{2}\right)=(1,-2)$

(B) 〃 $\left(-\frac{-4}{2},-\frac{-2}{2}\right)=(2,1)$

(C) 〃 $\left(-\frac{-2}{2},-\frac{-4}{2}\right)=(1,2)$

(D) 〃 $\left(-\frac{-4}{2},-\frac{-6}{2}\right)=(2,3)$

(B)之圓心 $(2,1)$ 在 $y=x-1$ 上 #

若直線 $3x-2y+6=0$ 的斜率為 a，y 截距為 b，x 截距為 c，且此直線與兩坐標軸所圍成的封閉區域面積為 d，求 $ab-cd$ 之值。

(A) $\frac{3}{2}$　(B) $\frac{9}{2}$　(C) $\frac{15}{2}$　(D) $\frac{21}{2}$　【105*C01*】

Ans：(D)

$3x-2y+6=0 \Rightarrow 2y=3x+6$

$\Rightarrow y=\frac{3}{2}x+3$

$a=\frac{3}{2}$

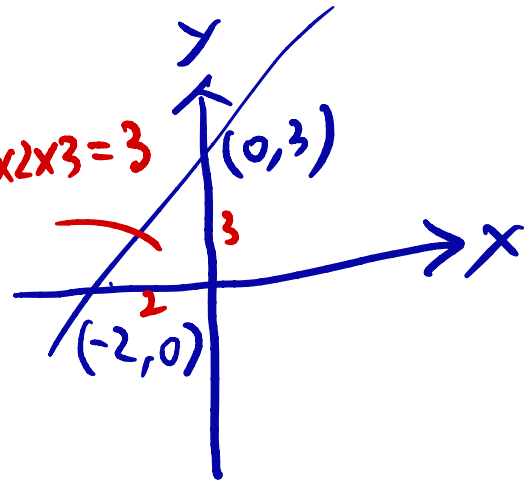
$3x-2y+6=0$

$c=-2$　-2　0

0　3

$b=3$

$d=\frac{1}{2}\times 2\times 3=3$



故 $ab-cd=\frac{3}{2}\times 3-(-2)\times 3$

$=\frac{9}{2}+6$

$=\frac{21}{2}$ #

已知圓的方程式為 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$；直線方程式為 $x+y-1=0$，若圓和直線的交點分別為 A 與 B，圓心為 O，則下列何者正確？

(A) $\overline{AB}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(B) 圓心 O 到直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的距離為 $\dfrac{1}{2}$

(C) 圓心 O 與 A、B 形成的三角形 ΔABO 面積為 $\dfrac{1}{2}$

(D) 交點 A、B 的坐標分別為 $(-1,0)$，$(0,1)$ 【105C20】

Ans：(C)

$(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)=-1+1+1$

$(x-1)^2+(y-1)^2=1 \rightarrow O(1,1), r=1$

$L: x+y-1=0 \rightarrow d(O,L)=\dfrac{|1+1-1|}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

令 $y=1-x$ 代入圓

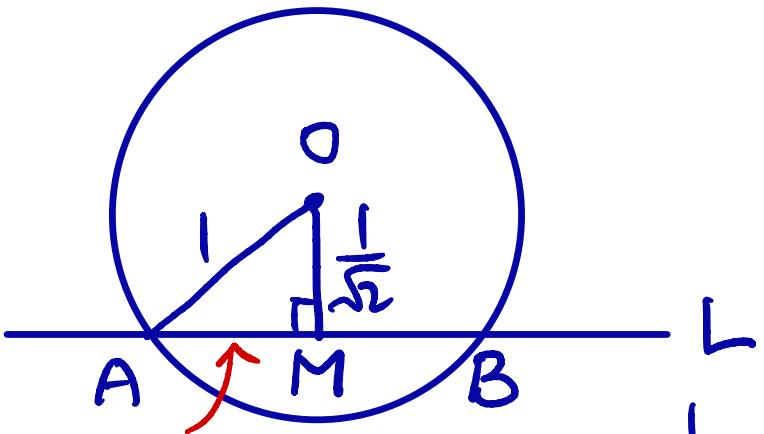
$x^2+(1-x)^2\cancel{-2x}-2\cancel{+2x}+1=0$

$x^2+x^2-2x\cancel{+1}\cancel{-1}=0$

$2x(x-1)=0$

$x=0$ 或 $x=1$

得 $A(0,1)$, $B(1,0)$



$\overline{AM}=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \overline{AB}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times 2=\sqrt{2}$

ΔABO 面積 $=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$ ※

已知 $P(a,1)$、$Q(-1,b)$為平面上兩點。若 P 為直線 $L:3x-4y=2$ 上一點，且直線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 與直線 L 垂直，則 $a+b=$？

(A) 7　(B) 9　(C) 11　(D) 13　【104*C16*】

Ans：(A)

$(a,1) \rightarrow 3a-4=2 \rightarrow a=2 \rightarrow P(2,1)$

$L: 4y=3x-2 \rightarrow y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2} \rightarrow m=\frac{3}{4}$

$m_{\overline{PQ}}=\frac{1-b}{2-(-1)}=\frac{1-b}{3}$

$\because \overleftrightarrow{PQ} \perp L$

$\therefore m_{\overline{PQ}} \times m=-1 \rightarrow \frac{1-b}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{4}=-1$

$\rightarrow 1-b=-4$

$\rightarrow b=5$

故 $a+b=2+5=7$ #

已知 a、b 為實數，若直線 $2x+ay+b=0$ 通過 $10x-2y+5=0$ 與 $6x-y+7=0$ 之交點，且斜率為 2，則 $a+b=$？

(A) -12　(B) -10　(C) 10　(D) 12　【102*C22*】

Ans：(A)

$$\begin{cases} 10x-2y=-5 \\ 6x-y=-7 \end{cases}$$

$12x-2y=-14$

$2x=-9 \rightarrow x=-\frac{9}{2}$

$\rightarrow y=-20$

交點 $(-\frac{9}{2},-20)$

$\therefore 2\times(-\frac{9}{2})+a\times(-20)+b=0$

$-9-20a+b=0$

得 $20a-b=-9$ —①

$2x+ay+b=0 \rightarrow$ 斜率 $=-\frac{2}{a}=2$

$\rightarrow a=-1$

次 $a=-1$ 代回① 得 $b=-11$

故 $a+b=-12$ #

已知 L_1 、 L_2 為與直線 $3x+4y=0$ 平行的二直線。若 L_1 過點(-29 , 23)， L_2 過點(31 , 23)，則此二平行線間的距離為何？

(A) 23　(B) 36　(C) 48　(D) 60　【102*C24*】

Ans：(B)

$L_1: 3x+4y=k_1$

$k_1=3\times(-29)+4\times23=-87+92=5$

得 $L_1: 3x+4y=5$

$L_2: 3x+4y=k_2$

$k_2=3\times31+4\times23=93+92=185$

得 $L_2: 3x+4y=185$

$d(L_1,L_2)=\dfrac{|185-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{180}{5}=36$ ※

設直線 $L: kx+3y+10=0$ 與圓 $C: x^2+y^2=4$ **<u>沒有</u>**交點，則常數 k 的範圍為何？

(A) $-4<k<4$　(B) $-2<k<2$　(C) $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$　(D) $k<-\sqrt{2}$ 或 $k>\sqrt{2}$　【101*C06*】

Ans：(A)

$O(0,0)$，$r=2$

$d(O,L)>r$

$\frac{10}{\sqrt{k^2+9}}>2 \rightarrow \sqrt{k^2+9}<5$

$\rightarrow k^2+9<25$

$\rightarrow k^2-16<0$

$\rightarrow k^2-4^2<0$

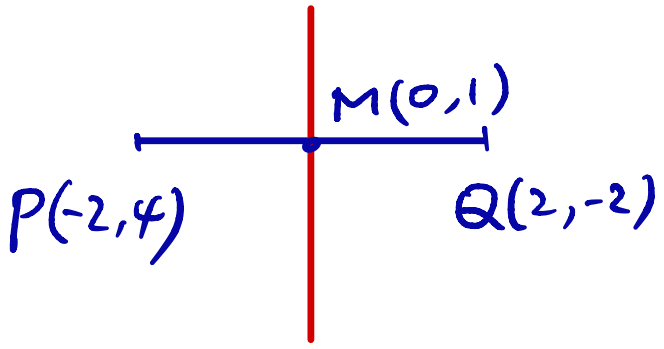
$\rightarrow (k+4)(k-4)<0$

$\rightarrow -4<k<4$ #

設 $P(-2,4)$ 與 $Q(2,-2)$，若直線 $L: ax+3y+b=0$ 為 $\overline{PQ}$ 的垂直平分線，求 $a+b$ 之值為何？

(A) $-\frac{15}{2}$　(B) -5　(C) -1　(D) $\frac{3}{2}$　【101*C15*】

Ans：(B)



$\overrightarrow{MQ}=(2,-3)$

$L: 2(x-0)-3(y-1)=0$

$\rightarrow 2x-3y+3=0$

$\rightarrow -2x+3y-3=0$

$a=-2$　$b=-3$

故 $a+b=(-2)+(-3)=-5$ #

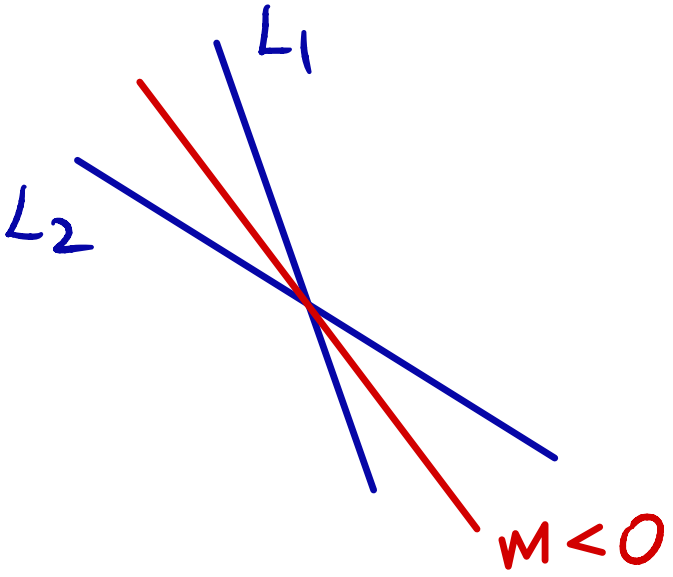
設兩直線 $L_1: 3x+y-4=0$ 與 $L_2: x+3y-4=0$，則 L_1 與 L_2 交角為銳角的角平分線方程式為何？

(A) $x+y-2=0$　(B) $x-y=0$　(C) $2x+y-3=0$　(D) $2x-y=0$　【101*C24*】

Ans：(A)

$L_1: 3x+y-4=0 \rightarrow m_1=-3<0$

$L_2: x+3y-4=0 \rightarrow m_2=-\frac{1}{3}<0$



$$\frac{3x+y-4}{\cancel{\sqrt{3^2+1^2}}}=\pm\frac{x+3y-4}{\cancel{\sqrt{1^2+3^2}}}$$

① $3x+y-4=x+3y-4 \rightarrow x-y=0$

$m=1>0$

② $3x+y-4=-(x+3y-4) \rightarrow x+y-2=0$

$m=-1<0$

故所求為 $x+y-2=0$ ※

已知一圓方程式為 $x^2+y^2+6x-8y=0$。下列敘述何者正確？

(A) 點$(1,0)$落在圓外　　(B) 此圓通過$(-3,4)$

(C) 此圓的半徑為 25　　(D) 此圓的圓心為$(0,0)$　　【100*C06*】

Ans：(A)

(A) $(1,0) \to 1+0+6-0>0 \to$ 在圓外

(B) $(-3,4) \to 9+16-18-32 \neq 0 \to$ 不在圓上

(C)、(D) $(x^2+6x+9)+(y^2-8y+16)=9+16$

$\to (x+3)^2+(y-4)^2=25$

$\to O(-3,4),\ r=5$

設直線 L_1 的斜率為-2 且通過點$(0,-4)$，又直線 L_2 的 x、y 軸截距分別為 1、2，則下列敘述何者正確？

(A) L_1 與 L_2 相交於點$(2,-8)$　　(B) L_1 與 L_2 相交於點$(4,-6)$

(C) L_1 與 L_2 平行且兩線相距 $\frac{2}{\sqrt{5}}$　　(D) L_1 與 L_2 平行且兩線相距 $\frac{6}{\sqrt{5}}$　　【100*C12*】

Ans：(D)

$L_1: y=-2x-4 \rightarrow L_1: 2x+y=-4$

$L_2: \frac{x}{1}+\frac{y}{2}=1 \rightarrow L_2: 2x+y=2$

$L_1 // L_2$

$d(L_1, L_2)=\frac{|-4-2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$ ※

若直線 $24x-7y=53$ 與二直線 $x=0$ 、 $x=7$ 分別交於 A、B 二點，則線段 $\overline{AB}$ 的長度為何？

(A) $\frac{24}{7}$　(B) $\frac{53}{7}$　(C) 25　(D) 53　【100*C15*】

Ans：(C)

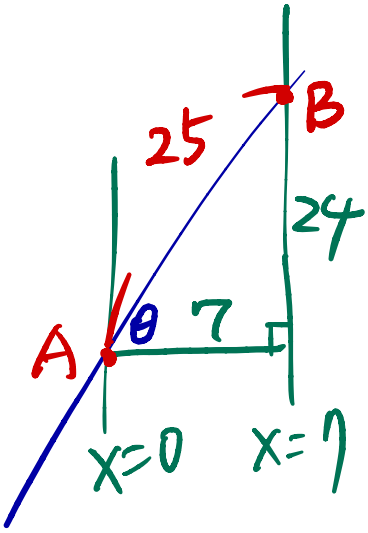
$24x-7y=53$ 之斜率 $m=\frac{24}{7}$

即 $\tan\theta=\frac{24}{7}$

↑

斜角

故



$\overline{AB}=25$

關於直線 $L: x+4y=28$，下列敘述何者正確？

(A) 斜率為7　(B) y截距為7　(C) 通過點（7，7）　(D) x截距為7　【99*C01*】

Ans：(B)

$L: x+4y=28 \rightarrow 4y=-x+28$

$\rightarrow y=-\frac{1}{4}x+7$

斜率　y截距

$y=0$ 時 $x=28 \rightarrow$ x截距為28

設三直線 $L_1: x+3y-2=0$，$L_2: 3x+y+2=0$，$L_3: x-y-2=0$，且 L_1 與 L_2 相交於 A 點，則過 A 點且與 L_3 平行的直線，不通過那一個象限？

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限　【99C05】

Ans：(D)

$$\begin{cases} x+3y=2 \\ 3x+y=-2 \end{cases}$$

$9x+3y=-6$

$8x=-8 \rightarrow x=-1 \rightarrow y=1$

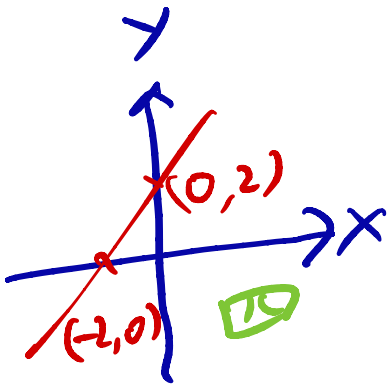
$A(-1,1)$

$L // L_3 \rightarrow$ 設 $L: x-y=k$

以 $(-1,1)$ 代入得 $k=-2$

故 $L: x-y=-2$

-2	0
0	2



已知直線 $L:3x+4y+5=0$ 與圓 $C:x^2+y^2+2x-4y-4=0$ 兩者的交點個數為a，且圓C的圓心到直線L的距離為b，則下列何者為正確？

(A) $a-b=-3$　(B) $a-b=-1$　(C) $a+b=4$　(D) $a+b=5$　【99*C06*】

Ans：(C)

$C:(x^2+2x+1)+(y^2-4y+4)=4+1+4$

$\rightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=9$

$\rightarrow O(-1,2),\ r=3$

$d(O,L)=\dfrac{|-3+8+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{10}{5}=2<r$

故 $a=2,\ b=2 \rightarrow a+b=4$ ※

在坐標平面上，若 ΔABC 之三頂點坐標分別為 $A(2,0)$、$B(4,0)$與$C(4,3)$，則 ΔABC 之三邊上共有多少點與原點的距離恰為整數值？

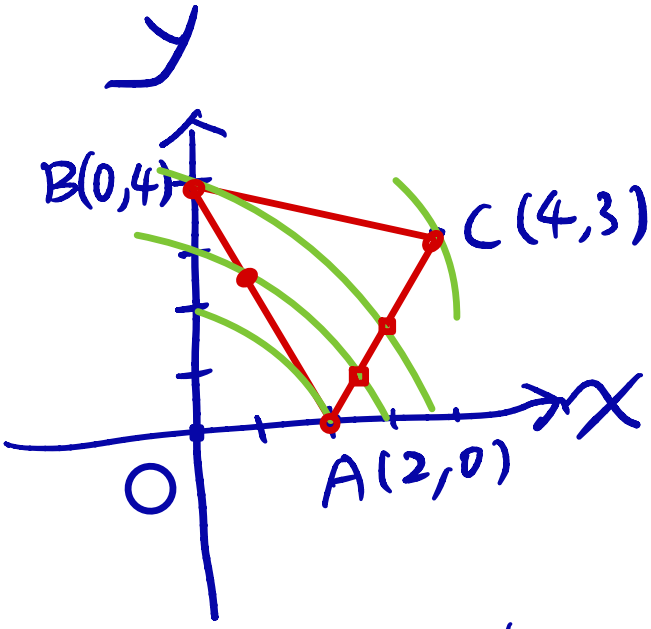
(A) 2個　　(B) 4個　　(C) 6個　　(D) 8個　　【99*C21*】

Ans：(C)

$\overline{OA}=\sqrt{2^2+0^2}=2$

$\overline{OB}=\sqrt{4^2+0^2}=4$

$\overline{OC}=\sqrt{4^2+3^2}=5$



由圖得知共有6個點

下列敘述何者錯誤？

(A) 直線 $L: x+2y=4$ 的斜率為 $-\frac{1}{2}$

(B) 方程式 $x=4$ 的圖形是一條通過點 $(4,5)$，且平行 y 軸的直線

(C) 通過點 $A(1,2)$、$B(-2,3)$ 的直線方程式為 $3x-y-1=0$

(D) 當點 $A(-1,1)$、$B(2,x)$、$C(3,11)$ 的為共線的三點時，則 $x=\frac{17}{2}$ 【98*C15*】

Ans：(C)

(A) $L: 2y=-x+4 \rightarrow y=-\frac{1}{2}x+2$

$m=-\frac{1}{2}$

(B) $x=4$ 為過 $(4,5)$ 之鉛直線

(C) $m=\frac{2-3}{1+2}=\frac{-1}{3}$

$y-2=\frac{-1}{3}(x-1)$

$3y-6=-x+1 \rightarrow x+3y-7=0$

(D) $m_{\overline{AB}}=m_{\overline{AC}} \rightarrow \frac{1-x}{-1-2}=\frac{1-11}{-1-3}$

$\rightarrow \frac{1-x}{-3}=\frac{-10}{-4}$

$\rightarrow 1-x=-\frac{30}{4}$

$\rightarrow x=\frac{34}{4}=\frac{17}{2}$

若圓 C 的方程式為 $x^2+y^2-6x-4y+4=0$，則下列各方程式的圖形，何者與圓 C 相切？

(A) $3x+4y-1=0$　(B) $3x+4y-2=0$　(C) $3x+4y-7=0$　(D) $3x+4y-14=0$

Ans：(B)　【98*C17*】

$C: (x^2-6x+9)+(y^2-4y+4)=-4+9+4$

$\rightarrow (x-3)^2+(y-2)^2=9$

$\rightarrow O(3,2), r=3$

(A) $d(O,L)=\frac{|9+8-11|}{5}\neq 3$

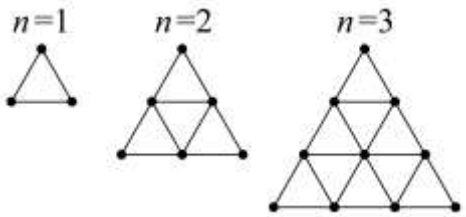
(B) $d(O,L)=\frac{|9+8-21|}{5}=\frac{15}{5}=3$ ※

(C) $d(O,L)=\frac{|9+8-7|}{5}=\frac{10}{5}=2\neq 3$

(D) $d(O,L)=\frac{|9+8-14|}{5}\neq 3$

小美想用火材棒排成一個 n 層正三角形金字塔，例如當 $n=1$、2、3 時，如圖所示。

若依此規則，則排出一個 50 層金字塔恰需要多少根火材棒？



(A) 3675

(B) 3825

(C) 7500

(D) 7803

【113*C20*】

Ans：(B)

$n=1 \rightarrow 3$

$n=2 \rightarrow 3+6=3(1+2)$

$n=3 \rightarrow 3+6+9=3(1+2+3)$

$\vdots$

$n=50 \rightarrow 3(1+2+3+\cdots+50)=3\times\frac{1}{2}\times50\times51$

$=3825$ #

晴晴在 2018 年初以一股 50 元買進某一檔股票，在 2023 年初該股經配股、配息還原後，可以還原股價為一股 60 元。若此股價 60 元可視為以每年固定年利率 r 進行複利計算，則 r 可以從下列哪個算式計算求得？

(A) $50\times r^5=60$　　(B) $50\times(1+r)^5=60$　　(C) $50\times(r+r^2+r^3+r^4+r^5)=60$

(D) $50\times[(1+r)+(1+r)^2+(1+r)^3+(1+r)^4+(1+r)^5]=60$　　【112*C13*】

Ans：(B)

$50(1+r)^5=60$

已知等比數列$\langle a_k \rangle$的首項$a_1 = 2$，公比$r = 3$。若前n項和大於2022，則滿足條件的最小正整數$n = ?$

(A) 5　(B) 7　(C) 9　(D) 11　【111*C02*】

Ans：(B)

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$= \frac{\cancel{2}(3^n - 1)}{\cancel{3 - 1}}$$

$$= 3^n - 1 > 2022$$

$$3^n > 2023$$

$$3^6 = 729 \quad , \quad 3^7 = 2187$$

$\therefore$ 取 $n = 7$ #

若 $a=\sum_{m=1}^{7}\frac{m-2}{2m-1}$、$b=\sum_{k=0}^{6}\frac{k-1}{2k+1}$、$c=\sum_{i=3}^{8}\frac{i-4}{2i-5}$，則下列敘述何者正確？

(A) $b>a>c$　(B) $c>a>b$　(C) $c>a=b$　(D) $a=b>c$　【110*C06*】

Ans：(D)

$$a=\frac{1-2}{2-1}+\frac{2-2}{4-1}+\frac{3-2}{6-1}+\cdots+\frac{7-2}{14-1}$$

$$\boxed{a=b}$$

$$b=\underbrace{\frac{0-1}{0+1}+\frac{1-1}{2+1}+\frac{2-1}{4+1}+\cdots+\frac{6-1}{12+1}}_{7\text{個項}}$$

$$c=\underbrace{\frac{3-4}{6-5}+\frac{4-4}{8-5}+\frac{5-4}{10-5}+\cdots+\frac{8-4}{16-5}}_{6\text{個項}}$$

c比b少這一項

而 $\frac{5}{13}>0$

$\therefore \boxed{b>c}$

故得知 $a=b>c$

某棒球投手自 4 月 1 日開始每天練投，他每日投球數為等差數列。若 4 月 5 日投球數為 41 個，4 月 13 日為 73 個，則他 4 月份有幾天投球數超過 100 個？

(A) 10　(B) 11　(C) 12　(D) 13　【109*C09*】

Ans：(B)

$4/1 \cdots 4/5 \cdots 4/13 \cdots 4/n \cdots 4/30$

$a_1 \quad a_5=41 \quad a_{13}=73 \quad a_n$

公差 $d=\dfrac{a_{13}-a_5}{13-5}=\dfrac{73-41}{13-5}=4$

$a_n=a_{13}+(n-13)\times d$

$=73+4(n-13) \quad >100$

$4(n-13)>27 \rightarrow n-13>6.\cdots$

$\rightarrow n>19.\cdots$

取最小 $n=20$

$\therefore 30-20+1=11$ (天) #

已知$\{a_n\}$為等差數列且滿足$a_1>0$、$a_5=3a_{12}$。則當n為多少時，a_n開始為負數？

(A) 14　(B) 15　(C) 16　(D) 17　【108*C13*】

Ans：(C)

$$a_1+4d=3(a_1+11d)$$

$$a_1+4d=3a_1+33d$$

$$-2a_1=29d \rightarrow d=-\frac{2}{29}a_1$$

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

$$=a_1-\frac{2}{29}(n-1)a_1$$

$$=\left[1-\frac{2}{29}(n-1)\right]\overset{+}{a_1}<0$$

$$\therefore\ 1-\frac{2}{29}(n-1)<0$$

$$\frac{2}{29}(n-1)>1 \rightarrow n-1>\frac{29}{2}=14.5$$

$$\rightarrow n>15.5$$

取 $n=16$ #

$\sum_{n=1}^{10}(2^n+3n+2)=$?

(A) 1268　(B) 1298　(C) 2017　(D) 2231　【107*C13*】

Ans：(D)

$$原式=\sum_{n=1}^{10}2^n+3\sum_{n=1}^{10}n+2\cdot\sum_{n=1}^{10}1$$

$$=\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}+3\cdot\frac{1}{2}\times10\times11+2\times10$$

$$=2046+165+20$$

$$=2231$$

設 a、b、c 三數成等比數列，且滿足 $a+b+c=9$ 及 $a^2+b^2+c^2=189$，則等比中項 $b=$？

(A) -6　(B) -2　(C) $\frac{1}{2}$　(D) 6　【106*C13*】

Ans：(A)

$a+ar+ar^2=9 \rightarrow a(1+r+r^2)=9$ —①

$a^2+a^2r^2+a^2r^4=189 \rightarrow a^2(1+r^2+r^4)=189$ —②

$\frac{②}{①}$ 得 $\frac{a(1+r^2+r^4)}{1+r+r^2}=21$

$$\begin{array}{r} 1-1+1 \\ 1+1+1\overline{)1+0+1+0+1} \\ \underline{1+1+1} \\ -1+0+0 \\ \underline{-1-1-1} \\ 1+1+1 \\ \underline{1+1+1} \\ 0 \end{array}$$

$\frac{a\cancel{(1+r+r^2)}(1-r+r^2)}{\cancel{1+r+r^2}}=21$

$a(1-r+r^2)=21$ —③

$$\begin{cases} a+ar+ar^2=9 & \text{—①} \\ a-ar+ar^2=21 & \text{—③} \end{cases}$$

① − ③ 得 $2ar=-12 \rightarrow ar=-6$

$\rightarrow b=-6$ ※

設 a、b、c、d、e、f 六數成等比數列，且已知 $a+c+e=168$，$b+d+f=84$，則 d 之值為何？

(A) 6　(B) 9　(C) 16　(D) 32　【105*C13*】

Ans：(C)

$a+ar^2+ar^4=168 \rightarrow a(1+r^2+r^4)=168$ —①

$ar+ar^3+ar^5=84 \rightarrow ar(1+r^2+r^4)=84$ —②

$\frac{②}{①}$ 得 $r=\frac{84}{168}=\frac{1}{2}$

代回① 得 $a\times(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16})=168$

$a\times\frac{\cancel{21}}{16}=\overset{8}{\cancel{168}} \rightarrow a=128$

$\therefore d=ar^3=\overset{16}{\cancel{128}}\times\frac{1}{\cancel{8}}=16$ #

已知四個正數 a、b、c、d 為一等比數列，若 $a+b=20$，$a+b+c+d=65$，則 $a=$？

(A) 5　(B) 6　(C) 7　(D) 8　【104*C18*】

Ans：(D)

$a+ar=20$ — ①

$a+ar+ar^2+ar^3=65$ — ②

② − ① 得 $ar^2+ar^3=45$ — ③

$\frac{③}{①}$ 得 $\frac{ar^2(1+r)}{a(1+r)}=\frac{45}{20} \rightarrow r^2=\frac{9}{4} \rightarrow r=\frac{3}{2}$

代回 ① 得 $a+\frac{3}{2}a=20 \rightarrow \frac{5}{2}a=20$

$\rightarrow a=8$ #

設一等比級數的第三項為 4，公比為 $-\frac{1}{3}$，前 n 項和為 $\frac{6560}{243}$，則 n 之值為何？

(A) 7　(B) 8　(C) 9　(D) 10　【103*C04*】

Ans：(B)

$a_1 r^2 = 4$, $r = -\frac{1}{3}$ → $a_1 \times \frac{1}{9} = 4$ → $a_1 = 36$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{36\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = 27\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$$

$$27\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right] = \frac{6560}{243}$$

$$1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{6560}{6561}$$

$\boxed{3^8 = 6561}$

移項得 $\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{6561} = \left(-\frac{1}{3}\right)^8$

$\therefore n = 8$ #

設 a、b、c 三個數均為正實數，且已知 $a+c=36$，若 a、b、12 三數成等差數列，且 2、b、c 三數成等比數列，則下列敘述何者**有誤**？

(A) $b+c=32$　(B) $a+b=12$　(C) $b^2=2c$　(D) $2b=a+12$　【103C22】

Ans：(A)

a、b、12 成等差 → $a+12=2b$

→ $a=2b-12$

2、b、c 成等比 → $b^2=2c$

→ $c=\frac{b^2}{2}$

$a+c=36$ → $2b-12+\frac{b^2}{2}=36$

→ $b^2+4b-96=0$

$\begin{matrix} 1 & -8 \\ 1 & +12 \end{matrix}$

→ $b=8$ or $b=-12$ (不合)

故 $b=8$ → $a=2\times8-12=4$

→ $c=\frac{8^2}{2}=32$

(A) $b+c=8+32=40$ ※

(B) $a+b=4+8=12$

(C) $b^2=2c$

(D) $2\times8=4+12$

求 102 到 2013 之間，個位數字為 7 的正整數共有幾個？

(A) 190　(B) 191　(C) 192　(D) 193　【102*C01*】

Ans：(B)

107, 117, ⋯, 2007

此為 $a_1=107$, $d=10$ 之等差數列

$2007=107+(n-1)\times 10$

$1900=(n-1)\times 10$

$n-1=190$

$n=191$ #

若兩數列 $2, 2a, 18$ 及 $a+4, 2, a+7$ 都是等比數列，則下列何者正確？

(A) $-6<a<-4$　(B) $-4<a<-2$　(C) $2<a<4$　(D) $4<a<6$　【101*C11*】

Ans：(B)

$(2a)^2=2\times18 \rightarrow 4a^2=36 \rightarrow a^2=9$

$\rightarrow a=\pm3$

① $a=3$ 時，$3+4, 2, 3+7$ 非等比

$\quad\quad\quad

設 p、q 為二相異正整數，且 a_n 為一等差數列的第 n 項。若 $a_p = q$，$a_q = p$，則 $a_{p+q} =$？

(A) 0　(B) p　(C) q　(D) $p+q$　【98*C13*】

Ans：(A)

$$公差 d = \frac{a_p - a_q}{p-q} = \frac{q-p}{p-q} = -1$$

$$a_{p+q} = a_p + [(p+q)-p] \times d$$

$$= q + q \times (-1)$$

$$= q - q$$

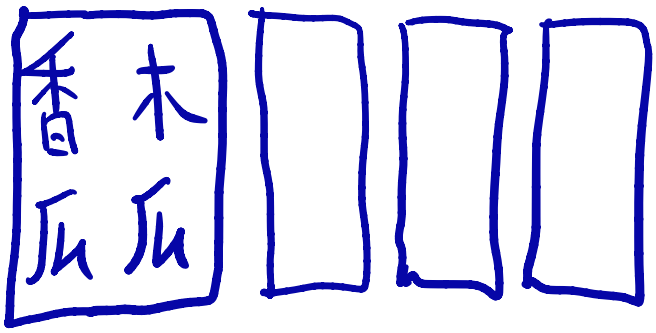
$$= 0$$

***ch07*_排列組合**

小輝從大賣場採買一些要祭拜祖先的水果，計有西瓜、芒果、蘋果、香瓜、橘子及木瓜等六種水果，他從中各取出一顆水果置於供桌準備祭拜，發現供桌大小只能容納其中五顆水果排成一列放置，若其中香瓜及木瓜都被選到，且此兩種水果位置相鄰，則有幾種不同排列方法？

(A) 48　(B) 96　(C) 192　(D) 240　【113*C07*】

Ans：(C)



$C^4_3 \times 4! \times 2! = 4 \times 24 \times 2$

$= 192$ ※

阿軒餐飲店推出均衡套餐，套餐有飯、主菜、湯與飲料 4 樣，其中飯有白飯、紫米飯、五穀飯、炒飯與稀飯 5 種，主菜有牛排、豬排、魚排與雞排 4 種，湯有洋蔥牛肉湯、豬肉貢丸湯、魚丸湯與人蔘雞湯 4 種，飲料有柳橙汁、西瓜汁、咖啡與紅茶 4 種。基於均衡原則，套餐的主菜與湯不能同為紅肉或同為白肉(牛與豬為紅肉，魚與雞為白肉)，若在符合均衡原則下，從飯、主菜、湯與飲品 4 樣中各選 1 種，則均衡套餐共有幾種點餐的方式？

(A) 80　(B) 160　(C) 240　(D) 320　【112*C20*】

Ans：(B)

飯且 主菜與湯 且飲品

$C^5_1 \times (C^2_1 \times C^2_1 + C^2_1 \times C^2_1) \times C^4_1$

$= 5 \times (4+4) \times 4$

$= 5 \times 8 \times 4$

$= 160$ #

某歌手打算在她的演唱會上表演一段由 6 首不同的歌串成的組曲，其中 3 首慢歌、3 首快歌。她的音樂總監建議在歌曲的安排上最多只能 2 首慢歌連在一起唱，因為這樣才會使得整個組曲的節奏比較流暢。若她認同並接受音樂總監的建議，試問這段組曲可以有多少種不同的安排方式？

(A) 576　(B) 648　(C) 696　(D) 720　【111*C15*】

Ans：(A)

$\underbrace{a、b、c}_{慢歌}、\underbrace{d、e、f}_{快歌}$

a、b、c 全相鄰

$6! - 4! \times 3!$

$= 720 - 24 \times 6$

$= 720 - 144$

$= 576$ ※

跆拳道隊友 8 個隊員，教練安排所有隊員每 2 人一組分別在 A、B、C、D 四個不同場地練習，則共有幾種安排的方式？

(A) 105　(B) 2520　(C) 5040　(D) 40320　【110*C12*】

Ans：(B)

2 , 2 , 2 , 2

$$\left(C^8_2 \times C^6_2 \times C^4_2 \times C^2_2 \times \frac{1}{\cancel{4!}}\right) \times \cancel{4!}$$

$$= 28 \times 15 \times 6 \times 1$$

$$= 2520$$

#

一個空的書櫃有上、中、下共三層，若將國文、英文、數學三本課本放入書櫃的任一層，且當課本放在同一層左右順序不同時視為不同排列，則共有幾種**不同**的排法？

(A) 60　(B) 36　(C) 27　(D) 18　【110*C21*】

Ans：(A)

上	中	下	
3	0	0	$\to 3!=6$
0	3	0	$\to 6$
0	0	3	$\to 6$
2	1	0	$\to C^3_2\times 2!\times 1=6$
2	0	1	$\to 6$
1	2	0	$\to 6$
1	0	2	$\to 6$
0	2	1	$\to 6$
0	1	2	$\to 6$
1	1	1	$\to 3!=6$

$\therefore 6\times 3+6\times 6+6=18+36+6$

$=60$ #

在一次立法委員選舉中，每位選民須投區域立委與不分區政黨兩種選票，且每種選票均只能圈選一位(個)，否則視為廢票。已知某甲的戶籍地有 6 位區域立委候選人，而全國共有 14 個政黨可選擇，若某甲決定去投票，且兩種選票均不投廢票，試問某甲有多少種投票組合？

(A)6　(B) 14　(C) 20　(D) 84　【109*C05*】

Ans：(D)

$C^6_1 \times C^{14}_1 = 6 \times 14 = 84$ ※

某次啦啦隊競賽規定，每隊組隊人數 8 人且男、女生均至少 2 人。某班共有 4 名男生與 6 名女生想參加啦啦隊競賽，若由此 10 人中依規定選出 8 人組隊，則共有多少種組隊方式？

(A) 45　(B) 60　(C) 75　(D) 90　【108*C10*】

Ans：(A)

男 → 4人

女 → 6人

$C_4^6 = C_2^6 = 15$

$C_2^4 \times C_6^6 + C_3^4 \times C_5^6 + C_4^4 \times C_4^6$

$= 6 \times 1 + 4 \times 6 + 1 \times 15$

$= 6 + 24 + 15$

$= 45$ ※

若從 11 件相異物中分別取出 5、6、7 件的組合數分別為 A、B、C，而從 12 件相異物中取出 6 件的組合數為 D，則下列何者正確？

(A) $B > A$　　(B) $C > A$　　(C) $D = A + B$　　(D) $D = B + C$　　【107*C14*】

Ans：(C)

$$A = C^{11}_{5} = \frac{11\times10\times9\times8\times7}{5\times4\times3\times2\times1}$$

$$B = C^{11}_{6} = C^{11}_{5} = A$$

$$\because A = C\times\frac{7}{5}$$
$$\therefore A > C$$

$$C = C^{11}_{7} = C^{11}_{4} = \frac{11\times10\times9\times8}{4\times3\times2\times1} < A$$

$$D = C^{12}_{6} = \frac{\overset{2}{\cancel{12}}\times(11\times10\times9\times8\times7)}{\cancel{6}\times(5\times4\times3\times2\times1)} = 2C^{11}_{5}$$

$$= C^{11}_{5} + C^{11}_{5}$$

$$= C^{11}_{5} + C^{11}_{6}$$

$$= A + B$$

同時投擲四個公正骰子，點數 3 出現至多一次的情形共有幾種？

(A) 1125　(B) 1185　(C) 1245　(D) 1365　【107*C24*】

Ans：(A)

① 沒 3 → □□□□

$5\times5\times5\times5=625$

② 1個 3 → $\boxed{3}$□□□

4選1放入3

$C^4_1\times5\times5\times5=500$

故 $625+500=1125$ ※

將繞口令「四十個十四　十四個四十」中的文字全取排成一列，且其中四個「十」須相鄰排在一起，其排法有幾種？

(A) 70　(B) 105　(C) 135　(D) 210　【106*C16*】

Ans：(B)

$\underbrace{\boxed{十十十十}\text{四四四四個個}}$

$$\frac{7!}{4!2!}=\frac{7\times\overset{3}{\cancel{6}}\times5\times\cancel{4!}}{\cancel{4!}\times\cancel{2}}=105$$ #

將 0、1、2、3、5 五個數字全取，排成一列，可得 4 的倍數的五位數共有多少個？

(註：凡是末兩位數是 4 的倍數者即為 4 的倍數)

(A) 18　(B) 20　(C) 24　(D) 36　【103*C12*】

Ans：(A)

□□□□□

① 1 2

② 2 0

③ 3 2

④ 5 2

□排首

① $3!-2!=6-2=4$ → ③、④ 相同

② $3!=6$

故有 $4\times3+6=12+6=18$ (個)

※

由甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛八個人當中選取 5 人組成一個委員會，且甲、乙、丙、丁四人中至少有 2 人為委員，則組成此委員會的方法數共有幾種？

(A) 48　(B) 50　(C) 52　(D) 54　【101*C17*】

Ans：(C)

$\underbrace{甲、乙、丙、丁}\ \underbrace{戊、己、庚、辛}$

$C^4_2 \times C^4_3 + C^4_3 \times C^4_2 + C^4_4 \times C^4_1$

$= 6 \times 4 + 4 \times 6 + 1 \times 4$

$= 24 + 24 + 4$

$= 52$ #

將 0、0、2、2、9、9、9、9 八個數字全取，排成一列，可得幾個**<u>不同</u>**的八位數？

(A) 155　　(B) 210　　(C) 315　　(D) 420　　【101*C25*】

Ans：(C)

$\boxed{0}$. - - . .

$$\frac{8!}{2!2!4!} - \frac{7!}{2!4!} = \frac{\cancel{8}^{2}\times7\times6\times5\times\cancel{4!}}{\cancel{2\times2\times4!}} - \frac{7\times\cancel{6}^{3}\times5\times\cancel{4!}}{\cancel{2\times4!}}$$

$$= 420 - 105$$

$$= 315 \ \#$$

甲、乙、丙、丁、戊、己、庚七人排成一列。若甲、乙、丙、丁四人必排在此列的最前面四位，且甲、乙不相鄰，則此七人共有多少種排法？

(A) 36　(B) 72　(C) 144　(D) 840　【100*C21*】

Ans：(B)

$$\underbrace{\square\square\square\square}_{(4!-3!\times 2)}\ \underbrace{\square\square\square}_{3!}$$

$$=(24-6\times 2)\times 6$$

$$=12\times 6$$

$$=72\ \#$$

設三位數的百位數字為 a、十位數字為 b、個位數字為 c。若 a、c 為偶數，b 為奇數，且 $a > b > c$，則滿足這些條件的三位數共有多少個？

(A) 5　(B) 10　(C) 15　(D) 20　【100*C25*】

Ans：(D)

	a	b	c	
①	8、6、4、2	1	0	$4\times1=4$
②	8、6、4	3	0、2	$3\times2=6$
③	8、6	5	0、2、4	$2\times3=6$
④	8	7	0、2、4、6	$1\times4=4$

∴ 有 $4+6+6+4=20$ (個) ※

有一籃球隊共有12位選手，其前鋒、中鋒、後衛的人數分別為4人、3人、5人，現在要選5位選手上場比賽，一般籃球比賽中，每隊的前鋒、中鋒、後衛人數分別為2人、1人、2人，問共有幾種不同選法？

(A) 120　(B) 154　(C) 180　(D) 225　【99*C08*】

Ans：(C)

$C^4_2 \times C^3_1 \times C^5_2$

$= 6 \times 3 \times 10$

$= 180$ #

下列各問題中，何者的解答是 C_6^{10}(其中 $C_k^n=\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$)？

(A) 10 位學生中任意挑選 6 位同學排成一列，共有幾種情形？

(B) 10 個不同的顏色的球任意挑選 4 個出來，共有幾種情形？

(C) 10 張椅子排成一列，6 位同學各自任意挑選 1 張椅子坐下，共有幾種情形？

(D) 10 個相同的白色球任意挑選 4 個出來，共有幾種情形？ 【98*C19*】

Ans：(B)

(A) $P_6^{10}=C_6^{10}\times 6!$

(B) $C_4^{10}=C_6^{10}$

(C) $C_6^{10}\times 6!$

(D) 1

若 θ 為一標準位置角，$i=\sqrt{-1}$。已知 $\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 與 $\frac{-1}{2}+(\sin\theta)i$ 為共軛複數，則 $\sin 2\theta=$？

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$　(C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$　(D) $\frac{-\sqrt{3}}{4}$　【113*C18*】

Ans：(B)

$$\begin{cases}\cos\theta=\frac{-1}{2}\\ \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\rightarrow \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$

$$=\cancel{2}\times\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\times\left(\frac{-1}{2}\right)$$

$$=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

已知 $x=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$、$y=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$、$z=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$，其中 $i=\sqrt{-1}$，試求 $\frac{x^2y^4}{z^3}=$？ 【112*C08*】

(A) $2^2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$ (B) $2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ (C) $2^2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ (D) $2(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})$

Ans：(A)

r的部分 → $\frac{(\sqrt{2})^2\times 2^4}{2^3}=2^2$

θ的部分 → $\frac{\pi}{4}\times 2+\frac{\pi}{6}\times 4-\frac{\pi}{3}\times 3$

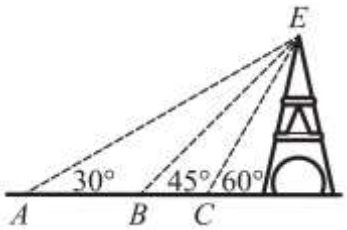
$=\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}-\pi$

$=\frac{\pi}{6}$

$\therefore \frac{x^2y^4}{z^3}=2^2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$ #

某人由 A 處測量高塔塔頂 E 的仰角為 $30°$，朝高塔方向前進 a 公尺至 B 處時測量塔頂 E 的仰角為 $45°$，繼續朝高塔方向前進 b 公尺至 C 處時測量塔頂 E 的仰角為 $60°$，如圖所示，則 $\frac{a}{b}=?$

(A) $\sqrt{3}$　(B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　(D) $\frac{\sqrt{3}}{6}$



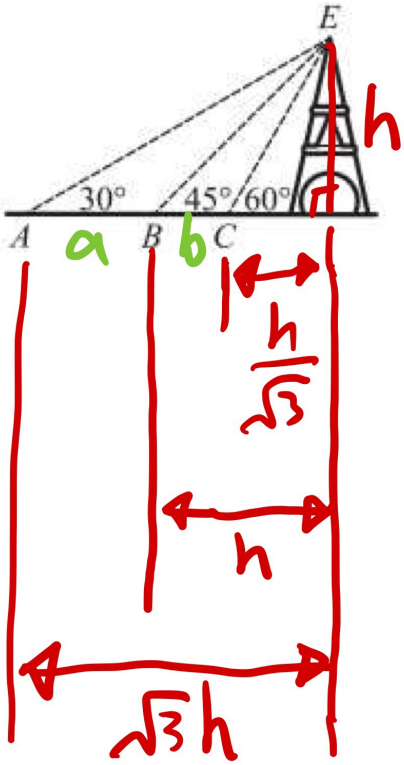
【111*C12*】

Ans：(A)

$$a=\sqrt{3}h-h=(\sqrt{3}-1)h$$

$$b=h-\frac{h}{\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}}h$$

$$\therefore \frac{a}{b}=\frac{\cancel{(\sqrt{3}-1)}\cancel{h}}{\frac{\cancel{(\sqrt{3}-1)}}{\sqrt{3}}\cancel{h}}=\sqrt{3}$$



$\sin 10^\circ \cos 10^\circ \cos 50^\circ - \sin 25^\circ \cos 25^\circ \cos 20^\circ = ?$

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $-\frac{1}{4}$ (D) $-\frac{1}{2}$ 【110*C03*】

Ans：(C)

原式 $= \frac{1}{2}(2\sin 10^\circ \cos 10^\circ)\cos 50^\circ - \frac{1}{2}(2\sin 25^\circ \cos 25^\circ)\cos 20^\circ$

$= \frac{1}{2}\sin 20^\circ \cos 50^\circ - \frac{1}{2}\sin 50^\circ \cos 20^\circ$

$= -\frac{1}{2}(\sin 50^\circ \cos 20^\circ - \cos 50^\circ \sin 20^\circ)$

$= -\frac{1}{2}\sin(50^\circ - 20^\circ)$

$= -\frac{1}{2}\sin 30^\circ$

$= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$= -\frac{1}{4}$ ※

下列敘述何者正確？

(A) $y=\tan\frac{\theta}{3}$ 的週期為 $\frac{\pi}{3}$　　(B) $\tan^2\theta-\sec^2\theta=1$　　(C) $-\sqrt{2}\le\sin\theta+\cos\theta\le\sqrt{2}$

(D)若 $\cos\theta=\sin\theta$，則 $\theta=\frac{\pi}{4}+2n\pi$，其中 n 為整數　　【110*C18*】

Ans：(C)

(A) $T=\frac{\pi}{\frac{1}{3}}=3\pi$

(B) $\tan^2\theta-\sec^2\theta=-1$

(C) $-\sqrt{1^2+1^2}\le\sin\theta+\cos\theta\le\sqrt{1^2+1^2}$

$\rightarrow\ -\sqrt{2}\le\sin\theta+\cos\theta\le\sqrt{2}$

(D) $\cos\theta=\sin\theta\rightarrow\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=1\rightarrow\tan\theta=1$

θ在第一、三象限 $\rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}+n\pi,\ n\in Z$

已知 $i=\sqrt{-1}$，$(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i})^2+(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i})^2=a+bi$，則 $a+b=$？

(A) $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$　(B) -1　(C) $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$　(D) 1　【110*C19*】

Ans：(B)

$$z=\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}=\frac{\cos 330^\circ+i\sin 330^\circ}{\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ}=\cos 300^\circ+i\sin 300^\circ$$

$$z^2=\cos 600^\circ+i\sin 600^\circ=\cos 240^\circ+i\sin 240^\circ=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

而 $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^2=\left(\frac{1}{z}\right)^2=\bar{z}^2=\overline{z^2}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\boxed{\begin{array}{l} z\bar{z}=|z|^2=1 \\ \frac{1}{z}=\bar{z} \end{array}}$$

故 $a+bi=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-1+0i$

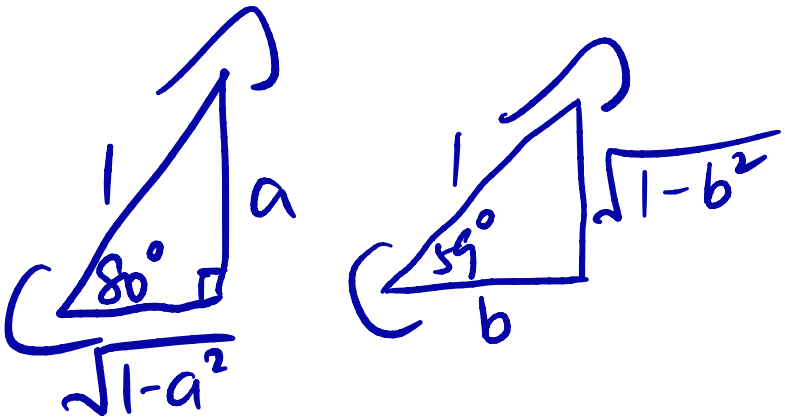
得 $a=-1$，$b=0$ $\rightarrow$ $a+b=-1$ #

若 $\sin 80° = a$ ， $\cos 59° = b$ ，則 $\cos 21° =$ ？

(A) $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}$　　(B) $a\sqrt{1-b^2}-b\sqrt{1-a^2}$　　(C) $ab-\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$

(D) $ab+\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$　　【109*C06*】

Ans：(A)



$$\cos 21° = \cos(80° - 59°)$$
$$= \cos 80° \cos 59° + \sin 80° \sin 59°$$
$$= \sqrt{1-a^2} \cdot b + a \cdot \sqrt{1-b^2}$$
$$= a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} \quad \#$$

設 $(\sqrt{3}+i)z=-2\sqrt{3}+2i$，其中 $i=\sqrt{-1}$，則 z 之主幅角為何？

(A) $\frac{\pi}{3}$　(B) $\frac{2\pi}{3}$　(C) $\frac{5\pi}{6}$　(D) $\frac{7\pi}{6}$　【109*C08*】

Ans：(B)

$$z=\frac{-2\sqrt{3}+2i}{\sqrt{3}+i}=\frac{4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}=2\cdot\frac{\cos150^\circ+i\sin150^\circ}{\cos30^\circ+i\sin30^\circ}$$

$$=2\left(\cos120^\circ+i\sin120^\circ\right)$$

故 $\mathrm{Arg}(z)=120^\circ=\frac{2\pi}{3}$ #

在 ΔABC 中，若 $\dfrac{\cos B+i\sin B}{(\cos A+i\sin A)(\cos C+i\sin C)}$ 為實數，其中 $i=\sqrt{-1}$，則 ΔABC 必為何種三角形？

(A) 等腰三角形　(B) 銳角三角形　(C) 直角三角形　(D) 鈍角三角形　【108*C17*】

Ans：(C)

原式 $=\cos(B-A-C)+i\sin(B-A-C)$

$\because$ 原式為實數

$\therefore \sin(B-A-C)=0$

$B-A-C=0 \rightarrow B=A+C$

又 $A+B+C=180^\circ \rightarrow A+C=180^\circ-B$

故得 $B=180^\circ-B \rightarrow 2B=180^\circ \rightarrow B=90^\circ$

ΔABC 必為直角△

已知 $O(0,0)$、$P(-3,4)$與 $Q(x,y)$為坐標平面上三點。若以 O 為圓心，$\overline{OP}$ 為半徑，逆時針方向轉動 $30°$ 後，P 點與 Q 點重疊，則下列何者正確？

(A) $x=\dfrac{-3\sqrt{3}-4}{2}$　(B) $x=\dfrac{-3\sqrt{3}+4}{2}$　(C) $y=\dfrac{4\sqrt{3}-3}{10}$　(D) $y=\dfrac{4\sqrt{3}+3}{2}$　【108*C24*】

Ans：(A)

設 $P=-3+4i$　複數相乘→角度相加(逆時針)

則 $Q=(-3+4i)(\cos 30°+i\sin 30°)$

$=(-3+4i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

$=\frac{-3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i+\frac{4\sqrt{3}}{2}i-\frac{4}{2}$　$\boxed{i^2=-1}$

$=\left(\frac{-3\sqrt{3}-4}{2}\right)+\left(\frac{4\sqrt{3}-3}{2}\right)i$

$\therefore x=\frac{-3\sqrt{3}-4}{2}$, $y=\frac{4\sqrt{3}-3}{2}$

已知 $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，且 $\bar{z}$ 為其共軛複數。若 $\frac{1+z}{1+\bar{z}}=a+bi$，其中 a、b 為實數，則點 (a,b) 在第幾象限？

(A) 一　(B) 二　(C) 三　(D) 四　【107*C11*】

Ans：(D)

$$z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad , \quad \bar{z}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$a+bi=\frac{1+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{1+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\frac{\cancel{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)}{\cancel{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}$$

$+ \quad -$

$+ \quad +$

$$=\frac{\cos 330^\circ+i\sin 330^\circ}{\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ}$$

$$=\underset{+}{\cos 300^\circ}+i\underset{-}{\sin 300^\circ}$$

故 $a>0$，$b<0$

$(a,b)\rightarrow(+,-)$ 在第四象限

※

若 $\tan 19° = a$ ，則 $\sin 2018° =$ ？

(A) $\dfrac{-2}{1+a^2}$　(B) $\dfrac{-2a}{1+a^2}$　(C) $\dfrac{a}{1+a^2}$　(D) $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$　【107*C21*】

Ans：(B)

$$\begin{array}{r} 2018 \\ -1800 \\ \hline 218 \end{array}$$

$$\sin 2018 = \sin 218°$$

$$= \sin(180° + 38°)$$

$$= -\sin 38°$$

$$= -2\sin 19° \cos 19°$$

$$= -2 \cdot \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$= \frac{-2a}{1+a^2}$$

設 $f(x)=4\sin x+\cos(2x)+7$ 的最小值為 m，最大值為 M，則 $m+M=$？

(A) -7　(B) 1　(C) 12　(D) 21　【107*C22*】

Ans：(C)

$$f(x)=4\sin x+1-2\sin^2 x+7$$

$$=-2\sin^2 x+4x+8$$

$$=-2(\sin^2 x-2x+1)+8+2$$

$$=-2(\sin x-1)^2+10$$

$$-1\le \sin x\le 1$$

① $\sin x=1$ 時得 $M=10$

② $\sin x=-1$ 時得 $m=(-2)\times 4+10=2$

故 $m+M=2+10=12$ ※

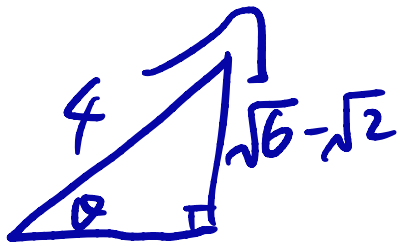
若 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，則 $\tan 2\theta=$？

(A) $2-\sqrt{3}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(D) $\sqrt{3}$　【106*C04*】

Ans：(C)

$\because \sin\theta=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ 且 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore$



$\sqrt{4^2-(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{\underset{6+2}{8}+2\underset{6\times 2}{\sqrt{12}}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

$\tan=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{4}=\dfrac{8-2\sqrt{3}}{4}=2-\sqrt{3}$

故 $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2(2-\sqrt{3})}{1-(2-\sqrt{3})^2}$

$=\dfrac{2(2-\sqrt{3})}{4\sqrt{3}-6}=\dfrac{\cancel{2}\cancel{(2-\sqrt{3})}}{\cancel{2}\sqrt{3}\cancel{(2-\sqrt{3})}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ※

※其實 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ 且 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，即知 $\theta=15^\circ$

故 $\tan 2\theta=\tan 30^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ※

設 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，則 $\dfrac{\omega^{107}}{\omega+1}=$？

(A) -1　(B) $-\omega$　(C) ω^2　(D) 1　【106*C11*】

Ans：(A)

$$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ$$

$$\omega^3=(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)^3=\cos 360^\circ+i\sin 360^\circ=1$$

$$\boxed{\omega^3=1}\rightarrow \omega^3-1=0\rightarrow(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$$

$$\because \omega\neq 1\quad \therefore \omega^2+\omega+1=0\rightarrow\boxed{\omega^2+\omega=-1}$$

$$\frac{\omega^{107}}{\omega+1}=\frac{\omega^2\cdot(\omega^3)^{35}}{\omega+1}=\frac{\omega^2}{\omega+1}\times\frac{\omega}{\omega}=\frac{\omega^3}{\omega^2+\omega}=\frac{1}{-1}=-1\ \#$$

若 $f(x)=\sec^2\frac{x}{2}+\csc^2\frac{x}{2}$ 的週期為 P，求 P 之值。

(A) $\frac{\pi}{2}$　(B) π　(C) 2π　(D) π^2　【105*C02*】

Ans：(B)

$$f(x)=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\times\frac{4}{4}$$

$$=\frac{4}{\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{4}{\sin^2 x}$$

$$=4\csc^2 x \longrightarrow T=\frac{2\pi}{2}=\pi \ \#$$

設 $a=\cos 40^\circ \cos 80^\circ \cos 160^\circ$，$b=\sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$，則 $a+b$ 之值為何？

(A) $-\frac{1}{4}$　(B) 0　(C) $\frac{1}{4}$　(D) $\frac{1}{2}$　【105*C05*】

Ans：(B)

$$a+b=\cos 40^\circ \cos 80^\circ \cos 160^\circ + \sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$$

$$=\cos 40^\circ(\cos 80^\circ \cos 160^\circ + \sin 10^\circ \cos 20^\circ)$$

$$=\cos 40^\circ \cdot [\cancel{\sin 10^\circ \cdot (-\cos 20^\circ)} + \cancel{\sin 10^\circ \cos 20^\circ}]$$

$$=0$$

已知 $z_1=\sqrt{3}+i$，$z_2=1+i$，其中 $i=\sqrt{-1}$，則 $z_1^2 z_2^4$ 可表示為下列哪一個？

(A) $16(\cos 240°+i\sin 240°)$

(B) $16(\cos 300°+i\sin 300°)$

(C) $16(\cos 60°+i\sin 60°)$

(D) $16(\cos 120°+i\sin 120°)$ 【105*C11*】

Ans：(A)

$$z_1=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2(\cos 30°+i\sin 30°)$$

$$z_1^2=4(\cos 60°+i\sin 60°)$$

$$z_2=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}(\cos 45°+i\sin 45°)$$

$$z_2^4=4(\cos 180°+i\sin 180°)$$

$$z_1^2 z_2^4=16(\cos 240°+i\sin 240°)$$ ※

若 $\sin\theta=\frac{1}{3}$，則 $\sqrt{2-2\cos 2\theta}=$？

(A) $\frac{1}{3}$　(B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$　(C) $\frac{2}{3}$　(D) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　【104*C07*】

Ans：(C)

$$\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta = 1-2\times\frac{1}{9} = 1-\frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

$$原式 = \sqrt{2-2\times\frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{18}{9}-\frac{14}{9}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

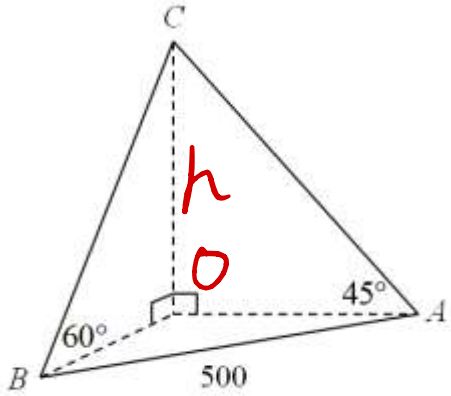
今有人預測一山的高度，當此人在此山的正東方一點 A，測得山頂 C 的仰角為 $45°$，又當他在山的南 $60°$ 西方向一點 B，測得山頂 C 的仰角為 $60°$，如圖(一)所示。若 A、B 兩點相距 500 公尺，則此山高 h 為多少公尺？

(A) $\frac{500}{3}\sqrt{3}$　　(B) $\frac{500}{7}\sqrt{21}$

(C) $\frac{500}{3}\sqrt{21}$　　(D) $500\sqrt{3}$

【104*C15*】

Ans：(B)



圖(一)

依題意得知 $\angle AOB = 90° + 60° = 150°$

$\boxed{\begin{aligned}&\cos 150° \\ &= -\cos 30° \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}}$

而 $\overline{OA} = h$，$\overline{OB} = \frac{h}{\sqrt{3}}$

故 $500^2 = h^2 + \left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2 - \cancel{2} \times h \times \frac{h}{\cancel{\sqrt{3}}} \times \left(-\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{2}}\right)$

$= h^2 + \frac{1}{3}h^2 + h^2$

$= \frac{7}{3}h^2$

$h^2 = \frac{3}{7} \times 500^2 \rightarrow h = \sqrt{\frac{3}{7}} \times 500 = \frac{500}{7}\sqrt{21}$ #

設 $\sin(-45°)\cdot\sin 15° = k - \cos 45°\cdot\cos(-15°)$，則 k 之值為何？

(A) 0　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　【103*C08*】

Ans：(B)

$$k = \sin(-45°)\sin 15° + \cos 45° \cos(-15°)$$

$$= -\sin 45° \sin 15° + \cos 45° \cos 15°$$

$$= \cos 45° \cos 15° - \sin 45° \sin 15°$$

$$= \cos(45° + 15°)$$

$$= \cos 60°$$

$$= \frac{1}{2}$$

#

設 $z=\dfrac{(5-12i)(3+4i)}{(4-3i)(12-5i)}$，$i=\sqrt{-1}$，則 $|z|$ 之值為何？

(A) 1　(B) $\sqrt{2}$　(C) 2　(D) 13　【103*C16*】

Ans：(A)

$|5-12i|=13$, $|3+4i|=5$

$|4-3i|=5$, $|12-5i|=13$

$|z|=\dfrac{13\times5}{5\times13}=1$ ※

設 $z_1=\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)^4$，$z_2=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^2$，則 $\frac{z_1}{z_2}$ 之值為何？

(A) -1　(B) i　(C) 0　(D) 1　【103*C17*】

Ans：(D)

$$z_1=\cos\frac{20\pi}{3}+i\sin\frac{20\pi}{3}$$

$$z_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\cos\left(\frac{20\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{20\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=\cos 6\pi+i\sin 6\pi$$

$$=1+0i$$

$$=1$$

已知 a、b 為實數，$i=\sqrt{-1}$。若 $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^8=a+bi$，則 $a^2+b^2=$？

(A) 16　(B) 64　(C) 256　(D) 1024　【102*C17*】

Ans：(C)

$$\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}=\frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)}=\frac{2(\cos 300^\circ+i\sin 300^\circ)}{\sqrt{2}(\cos 315^\circ+i\sin 315^\circ)}$$

$$=\sqrt{2}[\cos(-15^\circ)+i\sin(-15^\circ)]$$

$$a+bi=\{\sqrt{2}[\cos(-15^\circ)+i\sin(-15^\circ)]\}^8$$

$$=16[\cos(-120^\circ)+i\sin(-120^\circ)]$$

$$=16\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=-8-8\sqrt{3}i$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos(-120^\circ)=\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}\\ \sin(-120^\circ)=-\sin 120^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}}$$

$a=-8$，$b=-8\sqrt{3}$ $\rightarrow$ $a^2+b^2=64+192$

$=256$ ※

若 $2+3\cos 2\theta=0$，則 $\sin^4\theta-\cos^4\theta=$？

(A) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$　(B) $-\frac{2}{3}$　(C) $\frac{2}{3}$　(D) $\frac{\sqrt{5}}{3}$　【102*C18*】

Ans：(C)

$2+3\cos 2\theta=0 \rightarrow \cos\theta=-\frac{2}{3}$

原式 $=(\sin^2\theta)^2-(\cos^2\theta)^2$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^2\theta-\cos^2\theta)$

$=\sin^2\theta-\cos^2\theta$

$=-(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

$=-\cos 2\theta$

$=\frac{2}{3}$ ※

已知 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，$\cos\theta=-\frac{3}{5}$，則下列大小關係何者正確？

(A) $\cos\theta<\sin 2\theta<\cos 2\theta<\sin\theta$　　(B) $\sin 2\theta<\cos 2\theta<\cos\theta<\sin\theta$

(C) $\sin 2\theta<\cos\theta<\cos 2\theta<\sin\theta$　　(D) $\cos\theta<\cos 2\theta<\sin 2\theta<\sin\theta$　　【101*C23*】

Ans：(C)

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$

$\cos\theta=-\frac{3}{5}=\frac{-3}{5}$ →

→ $\sin\theta=\frac{4}{5}$

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{4}{5}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{24}{25}$

$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\frac{9}{25}-\frac{16}{25}=-\frac{7}{25}$

$\because -\frac{24}{25}<-\frac{3}{5}=-\frac{15}{25}<-\frac{7}{25}<\frac{4}{5}$

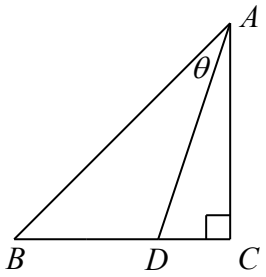
$\therefore \sin 2\theta<\cos\theta<\cos 2\theta<\sin\theta$ ※

已知 ΔABC 中，$\angle C=90°$，D 在 $\overline{BC}$ 線段上，且線段長 $\overline{BD}=2$，$\overline{DC}=1$，$\overline{AC}=3$，如圖所示。令 $\angle BAD=\theta$，求 $\cos\theta=$？

(A) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (C) $\frac{2}{\sqrt{10}}$ (D) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

【100C13】

Ans：(D)



$\overline{AC}=\overline{BD}+\overline{DC} \rightarrow \Delta ABC$ 為等腰直角△

$\rightarrow \theta+\angle DAC=45°$

$\theta=45°-\angle DAC$

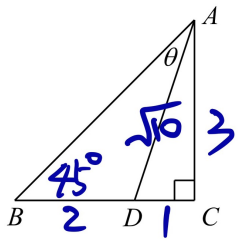
$\cos\theta=\cos(45°-\angle DAC)$

$=\cos45°\cos\angle DAC+\sin45°\sin\angle DAC$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{10}}$

$=\frac{4}{2\sqrt{5}}$

$=\frac{2}{\sqrt{5}}$ #



$\rightarrow \begin{cases} \sin\angle DAC=\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \cos\angle DAC=\frac{3}{\sqrt{10}} \end{cases}$

判斷下列各數值中，何者小於 0？(參考公式：$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$)

(A) $\cos 100^\circ-\sin 2011^\circ$　　(B) $\cos^2 100^\circ-\sin^2 100^\circ$

(C) $\cos^2 2011^\circ-\sin^2 2011^\circ$　　(D) $\cos 100^\circ\cos 2011^\circ-\sin 100^\circ\sin 2011^\circ$　　【100*C14*】

Ans：(B)

$$\boxed{\begin{array}{r}2011^\circ\\ -1800^\circ\\ \hline 211^\circ\end{array}}$$

(A) $\cos 100^\circ-\sin 211^\circ$

$=\cos(90^\circ+10^\circ)-\sin(180^\circ+31^\circ)$

$=-\sin 10^\circ+\sin 31^\circ>0$ $(\because \sin 31^\circ>\sin 10^\circ)$

(B) $\cos^2 100^\circ-\sin^2 100^\circ=\cos 200^\circ=-\cos 20^\circ<0$

(C) $\cos^2 2011^\circ-\sin^2 2011^\circ$

$=\cos^2 211^\circ-\sin^2 211^\circ$

$=\cos 422^\circ$

$=\cos 62^\circ>0$

$$\boxed{\begin{array}{r}2111^\circ\\ -1800^\circ\\ \hline 311^\circ\end{array}}$$

(D) 原式 $=\cos(100^\circ+2011^\circ)$

$=\cos 2111^\circ$

$=\cos 311^\circ>0$

已知 $i=\sqrt{-1}$。若 $z=\cos 78^\circ+i\sin 78^\circ$，則 $z^{15}=$？

(A) $-i$　(B) -1　(C) i　(D) 1　【100*C22*】

Ans：(C)

$$z=(\cos 78^\circ+i\sin 78^\circ)^{15}$$

$$=\cos 1170^\circ+i\sin 1170^\circ$$

$$=\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ$$

$$=0+1i$$

$$=i \quad \#$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 78 \\ \hline 120 \\ 105 \\ \hline 1170 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1170 \\ -1080 \\ \hline 90 \end{array}$$

求函數 $f(x)=(\cos x+3\sin x)(\cos x-\sin x)$ 之最小值為何？

(A) $-2\sqrt{5}$　(B) -4　(C) $-\frac{7}{2}$　(D) $-\sqrt{5}-1$　【99C25】

Ans：(D)

$$f(x)=\cos^2 x-\sin x\cos x+3\sin x\cos x-3\sin^2 x$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x+\sin 2x-3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)$$

$$=\sin 2x+2\cos 2x-1$$

$$\because\ -\sqrt{5}\le \sin 2x+2\cos 2x\le \sqrt{5}$$

$$\therefore\ -\sqrt{5}-1\le \sin 2x+2\cos 2x-1\le \sqrt{5}-1$$

設 $ABCD$ 為一矩形，且 $\overline{BC}=3\overline{AB}$ 。令 P 點與 Q 點為 $\overline{BC}$ 上之點，且 $\overline{BP}=\overline{PQ}=\overline{QC}$ ，如圖。

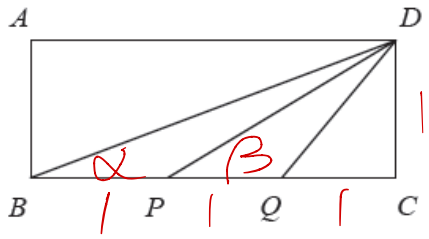
若 $\angle DBC=\alpha$ ，且 $\angle DPC=\beta$ ，則 $\tan(\alpha+\beta)$ 之值為何？

(A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(B) $2-\sqrt{3}$

(C) 1

(D) $2+\sqrt{3}$



【98*C02*】

Ans：(C)

$\tan\alpha=\frac{1}{3}$, $\tan\beta=\frac{1}{2}$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2+3}{6-1}$$

$$=\frac{5}{5}$$

$$=1 \ \#$$

已知 $i=\sqrt{-1}$，化簡 $(\cos\frac{\pi}{7}-i\sin\frac{\pi}{7})(\cos\frac{10\pi}{21}+i\sin\frac{10\pi}{21})=$？

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$　(B) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$　(C) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$　(D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$　【98*C09*】

Ans：(B)

$$\cos\frac{\pi}{7}-i\sin\frac{\pi}{7}=\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)$$

$$\text{原式}=\left[\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right]\left(\cos\frac{10\pi}{21}+i\sin\frac{10\pi}{21}\right)$$

$$=\cos\left(\frac{10\pi}{21}-\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{10\pi}{21}-\frac{\pi}{7}\right)$$

$$=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

若 $\log x=-2.24$，$\log y=9.28$，則 x^2y 落在下列哪個區間？

(A) $(10^3, 10^4)$　(B) $(10^4, 10^5)$　(C) $(10^5, 10^6)$　(D) $(10^6, 10^7)$　【113*C16*】

Ans：(B)

$\log x=-2.24 \rightarrow x=10^{-2.24}$

$\rightarrow x^2=(10^{-2.24})^2=10^{-4.48}$

$\log y=9.28 \rightarrow y=10^{9.28}$

$x^2y=10^{-4.48}\times 10^{9.28}$

$=10^{9.28-4.48}$

$=10^{4.8} \rightarrow 10^4<10^{4.8}<10^5$

即 x^2y 落在區間 $(10^4, 10^5)$ #

根據建築物之耐震規範，某類鋼構造建築物之基本振動週期 T(單位為秒)之經驗公式為 $T=0.085h^{\frac{3}{4}}$，其中 h 為地面到屋頂之高度(單位為公尺)。若 A、B 為兩棟屬於這類的鋼構造建築物，已知 A 的基本振動週期為 B 的兩倍，且 B 的高度為 100 公尺，則 A 的高度約多少公尺？ $(\sqrt[3]{2}\approx 1.260)$

(A) 159　(B) 168　(C) 252　(D) 283　【113*C22*】

Ans：(C)

$$T_A = 2T_B$$

$$\cancel{0.085}\left(h_A^{\frac{3}{4}}\right) = \left(2\times\cancel{0.085}\times 100^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{3}}$$

$$h = 2^{\frac{4}{3}}\times 100$$

$$= 2\sqrt[3]{2}\times 100$$

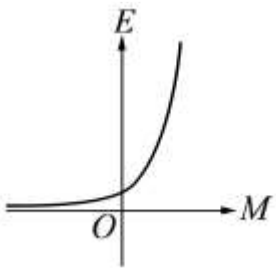
$$\approx 2\times 1.260\times 100$$

$$= 252\ (\text{公尺})\ ※$$

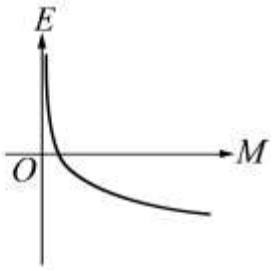
※試卷有給！

目前國際上使用芮氏規模來表示地震的強度，設 E(單位：爾格)為地震芮氏規模 M 時所釋放出來的能量，其中 M 與 E 的關係如下：$\log E = 11.8 + 1.5M$，則芮氏規模 M 與所釋放出來的能量 E 的關係圖為何？ 【112*C19*】

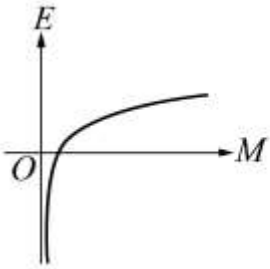
(A)



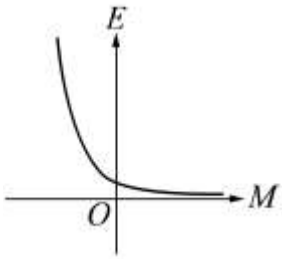
(B)



(C)



(D)



Ans：(A)

$E = 10^{11.8+1.5M} = 10^{11.8} \times 10^{1.5M}$ → 選(A)

若 $x=\log_3 7$，則下列何者正確？

(A) $7^x=3$　(B) $3^x=7$　(C) $x^7=3$　(D) $x^3=7$　【111*C01*】

Ans：(B)

$x=\log_3 7 \rightarrow 3^x=7$

為了響應節能減碳政策，某公司基於成本考量決定在六年後將公司該年二氧化碳排放量降為目前排放量的 50%。公司希望每年依固定的比率 r (當年和前一年排放量的比)逐年降低二氧化碳的排放量。若要達到這項目標，則下列敘述何者正確？($\log 0.5 \approx -0.3010$ 、 $\log 8.91 \approx 0.950$)

(A) $0.91 < r < 0.93$　(B) $0.88 < r < 0.91$　(C) $0.85 < r < 0.88$　(D) $0.82 < r < 0.85$　【111*C21*】

Ans：(B)

$$\cancel{A} \cdot r^6 \approx \cancel{A} \cdot 50\%$$

$$r^6 \approx \frac{1}{2}$$

$$\log r^6 \approx \log \frac{1}{2} = \log 0.5 \approx -0.301$$

$$6 \log r \approx -0.301$$

$$\log r \approx -\frac{0.301}{6} \approx -0.05 = \underline{0.95 - 1}$$

即 $\log r \approx \underline{\log 8.91 - \log 10} = \log \frac{8.91}{10} = \log 0.891$

$$r \approx 0.891 \longrightarrow 0.88 < r < 0.91 \quad \#$$

設 $I(t)$ 為 A 城市某種傳染病在時間 t 的感染率，且 $I(t)=\dfrac{1}{1+49(7^{\frac{-t}{3}})}$，$t\geq 0$。若 a、b、c 分別表示 $t=0$、$t=3$、$t=6$ 時的感染率，則下列何者正確？

(A) $b=6a$　(B) $c=20a$　(C) $c=4b$　(D) $b=7a$　【110*C07*】

Ans：(C)

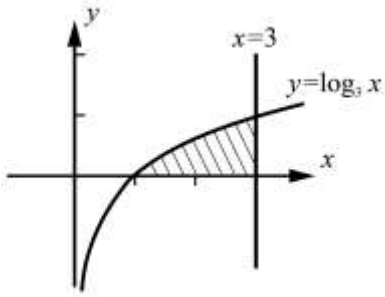
$$a=\frac{1}{1+49}=\frac{1}{50}$$

$$b=\frac{1}{1+49\times 7^{-1}}=\frac{1}{1+7}=\frac{1}{8}$$

$$c=\frac{1}{1+49\times 7^{-2}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$c=4b$ #

假設 A 表函數 $y=\log_3 x$ 圖形與直線 $y=0$、$x=3$ 所圍區域面積，如圖。若以幾何圖形的觀念來判斷 A 的大小範圍，則下列何者正確？

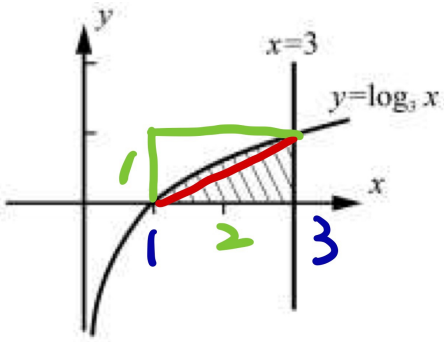


(A) $0 \le A < \frac{1}{2}$　(B) $\frac{1}{2} \le A < 1$　(C) $1 \le A < 2$　(D) $A \ge 2$　【110*C25*】

Ans：(C)

$\frac{1}{2} \times 2 \times 1 \le A \le 2 \times 1$

$1 \le A \le 2$ #



保險公司推出躉繳型保單(即於一開始存入一固定本金)，且宣告年利率為 3%的複利，每年計算一次。若某人於 20 歲時，花 10 萬元購買此保單，則當保單價值達 20 萬元時，某人約幾歲？($\log_{10}1.03\approx0.0128$ ， $\log_{10}1.3\approx0.1139$ ， $\log_{10}2\approx0.3010$ ， $\log_{10}3\approx0.4771$)

(A) 24　(B) 34　(C) 44　(D) 54　【109*C12*】

Ans：(C)

$$100000\times(1+3\%)^n\geq200000$$

$$(1.03)^n\geq2$$

$$n\log1.03\geq\log2$$

$$n\geq\frac{0.301}{0.0128}\approx23.5$$

取 $n=24$

故 $20+24=44$ (歲) #

滿足 $\log_{10-x^2}(x^2+3x+2)$ 有意義的整數 x 共有多少個？

(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 7　【109*C16*】

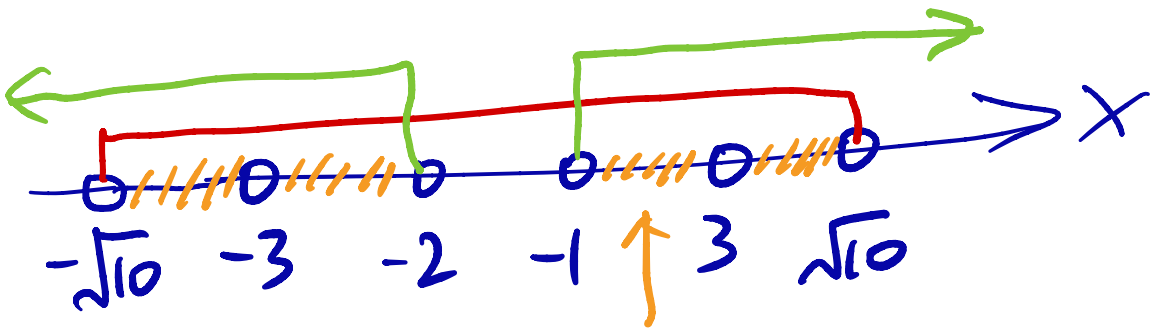
Ans：(A)

① $10-x^2>0 \rightarrow x^2-10<0 \rightarrow -\sqrt{10}<x<\sqrt{10}$

② $10-x^2\neq 1 \rightarrow x^2\neq 9 \rightarrow x\neq \pm 3$

③ $x^2+3x+2>0 \rightarrow (x+1)(x+2)>0$

$\begin{matrix} 1 & +1 \\ 1 & +2 \end{matrix}$ $\rightarrow x<-2$ 或 $x>-1$



0, 1, 2

共3個

若 $3<\log_{0.5}(2x+1)<4$，則 x 的範圍為何？

(A) $-\frac{3}{8}<x<-\frac{1}{4}$　(B) $-\frac{7}{16}<x<-\frac{3}{8}$　(C) $-\frac{15}{32}<x<-\frac{7}{16}$　(D) $-\frac{31}{64}<x<-\frac{15}{32}$　【108*C02*】

Ans：(C)

$2x+1>0 \rightarrow x>-\frac{1}{2}$ —①

$\log_{0.5}(0.5)^3<\log_{0.5}(2x+1)<\log_{0.5}(0.5)^4$

$\because 0<0.5<1$

$\therefore (0.5)^3>(2x+1)>(0.5)^4$

$\frac{1}{8}>2x+1>\frac{1}{16}$

$\rightarrow \frac{1}{16}<2x+1<\frac{1}{8}$

$\rightarrow -\frac{15}{16}<2x<-\frac{7}{8}$

$\rightarrow -\frac{15}{32}<x<-\frac{7}{16}$ —②

由①,②得 $-\frac{15}{32}<x<-\frac{7}{16}$ ※

若 $x=\dfrac{\log_{10}7}{\log_{10}9}$，則 $81^x=$？

(A) 3　(B) 7　(C) 25　(D) 49　【107*C12*】

Ans：(D)

$x=\log_9 7 \rightarrow 9^x=7$

$81^x=(9^2)^x=(9^x)^2=7^2=49$

設 $a=\log_{0.3}0.5$ 、 $b=\log_3 5$ 、 $c=\log_{30}50$ ，則 a、b、c 大小順序為何？

(A) $c>b>a$　(B) $b>a>c$　(C) $b>c>a$　(D) $a>b>c$　【107*C23*】

Ans：(C)

$$a=\frac{\log 0.5}{\log 0.3}=\frac{\log 5-\log 10}{\log 3-\log 10}=\frac{\log 5-1}{\log 3-1}$$

$$=\frac{0.699-1}{0.4771-1}=\frac{-0.301}{-0.5229}=\frac{3010}{5229}\doteqdot 0.57$$

$$b=\frac{\log 5}{\log 3}=\frac{0.699}{0.4771}=\frac{6990}{4771}\doteqdot 1.46\cdots$$

$$c=\frac{\log 50}{\log 30}=\frac{\log 5+\log 10}{\log 3+\log 10}=\frac{\log 5+1}{\log 3+1}$$

$$=\frac{0.6990+1}{0.4771+1}=\frac{1.6990}{1.4771}=\frac{16990}{14771}$$

$$\doteqdot 1.17$$

故 $b>c>a$ #

設 $a=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$，$b=(\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}$，$c=(\frac{1}{6})^{\frac{1}{6}}$，則 a、b、c 的大小順序為何？

(A) $a>c>b$　(B) $a>b>c$　(C) $c>a>b$　(D) $b>c>a$　【106*C14*】

Ans：(C)

$$a^{12}=\left(\frac{1}{2}\right)^{6}=\frac{1}{64}$$

$$b^{12}=\left(\frac{1}{3}\right)^{4}=\frac{1}{81}$$

$$c^{12}=\left(\frac{1}{6}\right)^{2}=\frac{1}{36}$$

$$\because c^{12}>a^{12}>b^{12}$$

$$\therefore c>a>b \#$$

已知 $\log_{10}3=0.4771$ 且 $x=(\frac{1}{3})^{20}$，其中 $\log_{10}x$ 的首數為 m，而尾數的小數點後第一位數字為 n，則 $m+n=$？

(A) –9　(B) –7　(C) –6　(D) –5　【106*C15*】

Ans：(C)

$x=3^{-20} \rightarrow \log x=-20\log 3$

$=(-20)\times 0.4771$

$=-9.542$

$=-10+0.\underline{4}58$

$m=-10$，$n=\underline{4}$

題目問的是這個數字！

故 $m+n=(-10)+4$

$=-6$ ※

已知 $\log_{10}2=p$，$\log_{10}3=q$，求 $\log_{\sqrt{6}}36-\log_{\frac{1}{6}}6+\log_6\sqrt{12}$ 之值。

(A) $5+\dfrac{2p+q}{2p+2q}$　(B) $3+\dfrac{2p+q}{2p+2q}$　(C) $3+\dfrac{2p+q}{2p-2q}$　(D) $5+\dfrac{2p+q}{2p-2q}$　【105*C14*】

Ans：(A)

$$\log_{\sqrt{6}}36=\log_{6^{\frac{1}{2}}}6^2=\frac{2}{\frac{1}{2}}\log_6 6=4$$

$$\log_{\frac{1}{6}}6=\log_{6^{-1}}6=\frac{1}{-1}\log_6 6=-1$$

$$\log_6\sqrt{12}=\frac{\log 12^{\frac{1}{2}}}{\log 6}=\frac{\frac{1}{2}[\log(2^2\times 3)]}{\log(2\times 3)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(2\log 2+\log 3)}{\log 2+\log 3}=\frac{2p+q}{2p+2q}$$

$$原式=4-(-1)+\frac{2p+q}{2p+2q}$$

$$=5+\frac{2p+q}{2p+2q}\ \#$$

設 $a=(0.1)^{\frac{1}{4}}$，$b=(0.2)^{\frac{1}{4}}$，$c=(0.2)^{\frac{1}{5}}$，則下列何者正確？

(A) $a<b<c$　　(B) $c<a<b$　　(C) $b<a<c$　　(D) $b<c<a$　　【105*C15*】

Ans：(A)

$a^4=0.1$

$b^4=0.2$

$\Rightarrow a^4<b^4 \rightarrow a<b$

$b^{20}=(0.2)^5=(0.2)^4\times\underbrace{0.2}_{0.2小於1}<(0.2)^4$

$c^{20}=(0.2)^4$

$\Rightarrow b^4<c^4$

$\rightarrow b<c$

故 $a<b<c$ #

已知 m、n 為整數，若 $m\log_{500}5+n\log_{500}\sqrt{2}=1$，則 $m+n=$？

(A) 7　(B) 8　(C) 9　(D) 10　【104*C14*】

Ans：(A)

$$\log_{500}5^m+\log_{500}(\sqrt{2})^n=\log_{500}500$$

$$\log_{500}\left(5^m\times 2^{\frac{n}{2}}\right)=\log_{500}500=\log_{500}(5^3\times 2^2)$$

$$5^m\times 2^{\frac{n}{2}}=5^3\times 2^2$$

故 $\begin{cases} m=3 \\ \frac{n}{2}=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m=3 \\ n=4 \end{cases}$

$m+n=3+4=7$ ※

已知 a、b 為實數，且 $3^a=5$，$5^b=9$，則 $ab=$？

(A) $\log_{15}45$　(B) $\log_3 5$　(C) 2　(D) 3　【104*C23*】

Ans：(C)

$$3^a=5 \rightarrow \log_3 5=a$$

$$5^b=9 \rightarrow \log_5 9=b$$

$$ab=\log_3 5\times\log_5 9=\log_3 9=2$$ ※

設$\left(\frac{1}{2}\right)^a=\frac{1}{70}$，$\left(\frac{1}{4}\right)^b=\frac{1}{2500}$，$\left(\frac{1}{8}\right)^c=\frac{1}{216000}$，則 a、b、c 三個數的大小關係為何？

(A) $b<c<a$　(B) $c<b<a$　(C) $c<a<b$　(D) $a<b<c$　【103*C11*】

Ans：(A)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^a=\frac{1}{70}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^b=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^b=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^b\right]^2=\frac{1}{2500}=\left(\frac{1}{50}\right)^2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^b=\frac{1}{50}$$

$$\left(\frac{1}{8}\right)^c=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^c=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^c\right]^3=\frac{1}{216000}=\left(\frac{1}{60}\right)^3$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^c=\frac{1}{60}$$

$$\because \frac{1}{50}>\frac{1}{60}>\frac{1}{70}\rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^b>\left(\frac{1}{2}\right)^c>\left(\frac{1}{2}\right)^a$$

而 $0<\frac{1}{2}<1$

$\therefore b<c<a$ #

化簡 $\dfrac{2+\log_{10}4-\frac{1}{3}\log_{10}216+\frac{1}{4}\log_{10}625+\frac{1}{5}\log_{10}243}{1+\log_2\frac{5}{3}+\log_2\frac{6}{5}+\log_2\frac{7}{6}+3\log_8\frac{8}{7}+2\log_4\frac{9}{8}-\log_4 9}$ 得其值為何？

(A) 1　(B) $\frac{3}{2}$　(C) 2　(D) 3　【103*C23*】

Ans：(D)

$216=6^3$　$625=5^4$　$243=3^5$

$216^{\frac{1}{3}}=6$　$625^{\frac{1}{4}}=5$　$243^{\frac{1}{5}}=3$

$$分子=\log_{10}100+\log_{10}4-\log_{10}6+\log_{10}5+\log_3 3$$

$$=\log_{10}\frac{100\times\cancel{4}^{2}\times5\times\cancel{3}}{\cancel{6}}=\log_{10}1000=3$$

$8^{\frac{1}{3}}=2$　$4^{\frac{1}{2}}=2$

$$分母=\log_2 2+\log_2\frac{5}{3}+\log_2\frac{6}{5}+\log_2\frac{7}{6}+\log_2\frac{8}{7}+\log_2\frac{9}{8}-\log_2 3$$

$$=\log_2\left(2\times\cancel{\frac{5}{3}}\times\cancel{\frac{6}{5}}\times\cancel{\frac{7}{6}}\times\cancel{\frac{8}{7}}\times\cancel{\frac{9}{8}}\times\cancel{\frac{1}{3}}\right)$$

$-\log_2 3=+\log_2\frac{1}{3}$

$$=\log_2 2$$

$$=1$$

故原式 $=\frac{3}{1}=3$ #

若 $3^{x+2}=3^{x}+24\sqrt{3}$，則 $x=$？

(A) $-\frac{1}{2}$　(B) 1　(C) $\frac{3}{2}$　(D) 2　【102*C03*】

Ans：(C)

$$3^{x+2}=3^{2}\times 3^{x}=9\times 3^{x}$$

$$9\times 3^{x}=3^{x}+24\sqrt{3}$$

$$\cancel{8}\times 3^{x}=\overset{3}{\cancel{24}}\sqrt{3}$$

$$3^{x}=3^{1}\times 3^{\frac{1}{2}}=3^{1+\frac{1}{2}}=3^{\frac{3}{2}}\rightarrow x=\frac{3}{2}$$

#

已知 $a>0$，$b>0$，$a\neq 1$。若 $a^5=b^3$，則 $\log_a b=$？

(A) $-\frac{5}{3}$　(B) $-\frac{3}{5}$　(C) $\frac{3}{5}$　(D) $\frac{5}{3}$　【102*C04*】

Ans：(D)

$$a^5=b^3 \rightarrow \log_a a^5=\log_a b^3$$

$$\rightarrow 5=3\log_a b$$

$$\rightarrow \log_a b=\frac{5}{3}$$

下列何者與 $\log 1+\log 2+\log 3+\log 4+\log 5-\log 6$ 的值最為接近？

(已知 $\log 2$ 的值約為 0.301，而 $\log 3$ 的值約為 0.4771)

(A) 0.1　(B) 1.5　(C) 5.3　(D) 6.2　【101*C05*】

Ans：(B)

$$原式=\log\frac{1\times\cancel{2\times3}\times4\times5}{\cancel{6}}$$

$$=\log 20$$

$$=\log 10+\log 2$$

$$\doteqdot 1+0.301=1.301\rightarrow(B)$$

已知 $y=2^x$ 的圖形通過圓 $C: x^2+y^2-2ay=0$ 之圓心。若圓 C 與直線 $L: y=\dfrac{3x+k}{4}$ 相切，求 $\log_2 a+\log_5(k-4)^2$ 之值為何？

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4　【101*C20*】

Ans：(B)

$C: x^2+(y^2-2ay+a^2)=a^2$

$\rightarrow x^2+(y-a)^2=a^2$

$\rightarrow O(0,a)$，$r=\underline{a}$ ($\because \log_2 a$ $\therefore a>0$)

$y=2^x$ 通過 $O(0,a) \rightarrow a=2^0=1 \rightarrow r=1$

$\log_2 a=\log_2 1=0$

$L: 4y=3x+k \rightarrow 3x-4y+k=0$

$d(O,L)=\dfrac{|0-4+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1 \rightarrow |k-4|=5$

$\log_5(k-4)^2=\log_5 25=2$

故所求 $=0+2=2$ ※

若 $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{8\cdot\sqrt[5]{64}}=4^a$，則 $a=$？

(A) $\frac{19}{20}$　(B) $\frac{29}{30}$　(C) $\frac{19}{10}$　(D) $\frac{29}{15}$　【100*C01*】

Ans：(A)

$$4^a=(2^2)^a=2^{2a}$$

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{8\sqrt[5]{64}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot\left(2^3\cdot 2^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot\left(2^{\frac{21}{5}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$=2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{7}{5}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{7}{5}}=2^{\frac{19}{10}}$$

$$2^{2a}=2^{\frac{19}{10}}\rightarrow 2a=\frac{19}{10}\rightarrow a=\frac{19}{20}$$ ※

求 $\log_{\sqrt{2}}\frac{3}{2}-\log_2\frac{27}{160\sqrt{2}}+\log_4\frac{36}{25}=$?

(A) $\frac{5}{2}$ (B) $\frac{7}{2}$ (C) $\frac{9}{2}$ (D) $\frac{11}{2}$ 【100*C24*】

Ans：(C)

$$\log_{(\sqrt{2})^2}\left(\frac{3}{2}\right)^2=\log_2\frac{9}{4}$$

$$\log_4\frac{36}{25}=\log_{2^{\cancel{2}}}\left(\frac{6}{5}\right)^{\cancel{2}}=\log_2\frac{6}{5}$$

$$原式=\log_2\frac{9}{4}-\log_2\frac{27}{160\sqrt{2}}+\log_2\frac{6}{5}$$

$$=\log_2\left(\frac{\cancel{9}}{\cancel{4}}\times\frac{\overset{8}{\cancel{160}}\sqrt{2}}{\cancel{27}}\times\frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{\cancel{5}}\right)$$

$$=\log_2 16\sqrt{2}$$

$$=\log_2\left(2^4\times2^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\log_2 2^{\frac{9}{2}}=\frac{9}{2}\ ※$$

設 p 與 q 為方程式 $\log_9(10x^2-6x+5)-\log_3 x-1=0$ 的兩根，則 $\dfrac{1}{p+q}=$？

(A) $\dfrac{1}{6}$　(B) $\dfrac{1}{5}$　(C) $\dfrac{2}{3}$　(D) $\dfrac{5}{7}$　【99C07】

Ans：(A)

$$\log_9(10x^2-6x+5)-\log_{3^2} x^2-\log_9 9=0$$

$$\log_9\left(\frac{10x^2-6x+5}{9x}\right)=0$$

$$\frac{10x^2-6x+5}{9x}=1 \rightarrow 10x^2-6x+5=9x$$

$$x^2-6x+5=0 \rightarrow (x-1)(x-5)=0$$

$$\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & -5 \end{matrix} \rightarrow x=1 \text{ 或 } x=5$$

兩根和 $p+q=1+5=6$

$$\therefore \frac{1}{p+q}=\frac{1}{6}$$

設 r 為有理數，且 $5^r = 4(\sqrt[3]{40} + \frac{\sqrt[3]{5}}{2})^2$，則 $r = ?$

(A) $\frac{8}{3}$　(B) $\frac{10}{3}$　(C) 8　(D) 10　【99*C20*】

Ans：(A)

$$5^r = 4\left(2\sqrt[3]{5} + \frac{\sqrt[3]{5}}{2}\right)^2$$

$$= 4 \times \left(\frac{5\sqrt[3]{5}}{2}\right)^2$$

$$= \cancel{4} \times \frac{25(\sqrt[3]{5})^2}{\cancel{4}}$$

$$= 5^2 \times 5^{\frac{2}{3}}$$

$$= 5^{2+\frac{2}{3}}$$

$$= 5^{\frac{8}{3}}$$

$$\therefore r = \frac{8}{3} \quad \#$$

設 x、y 為正實數，若 $2\log(x-2y)=\log x+\log y$，則 $\frac{x}{y}$ 之值為何？

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4　【98*C10*】

Ans：(D)

$\log(x-2y)^2=\log xy$

$(x-2y)^2=xy$

$x^2-4xy+4y^2=xy$

$x^2-5xy+4y^2=0$

$\begin{matrix}1 & & -1\\ 1 & \times & -4\end{matrix}$

$(x-y)(x-4y)=0$

$x=y$ 或 $x=4y$

但 $x=y$ 會使真數 $x-2y<0$，不合

故 $x=4y \rightarrow \frac{x}{y}=4$ #

設 3^{α} 、3^{β} 為方程式 $x^2-x+\frac{1}{81}=0$ 的兩根，則 $\alpha+\beta=$？

(A) -4　(B) -2　(C) 2　(D) 4　【98*C11*】

Ans：(A)

兩根積 $3^{\alpha}\cdot 3^{\beta}=\frac{1}{81}$

$$3^{\alpha+\beta}=\frac{1}{3^4}=3^{-4}$$

$$\alpha+\beta=-4$$

空間中三點的坐標分別為 $A(0,6,-1)$、$B(3,3,-1)$、$C(4,1,1)$，則 $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上的正射影為何？

(A) $(4,-4,2)$　(B) $(4,-2,4)$　(C) $(2,-4,4)$　(D) $(2,4,4)$　【113*C19*】

Ans：(C)

$\overrightarrow{AC}=(4,-5,2)$

$\overrightarrow{BC}=(1,-2,2)$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=4+10+4=18$

$|\overrightarrow{BC}|^2=1+4+4=9$

$\vec{u}=\left(\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|^2}\right)\overrightarrow{BC}=\dfrac{\cancel{18}^{\,2}}{\cancel{9}}(1,-2,2)$

$=(2,-4,4)$ #

空間中兩點 $A(1,3,4)$ 與 $B(3,2,4)$，若 xy 平面上 P 點到 A 與 B 兩點的距離和最小，則 P 點的坐標為何？

(A) $(2,\frac{5}{2},0)$　(B) $(2,2,0)$　(C) $(2,\frac{3}{2},0)$　(D) $(3,1,0)$　【113*C24*】

Ans：(A)

A 對 xy 平面 (z=0) 之對稱點

$A'(1,3,-4)$

P 為 $\overline{A'B}$ 之中點

$P\left(\frac{1+3}{2},\frac{3+2}{2},\frac{-4+4}{2}\right)=P(2,\frac{5}{2},0)$ #

若通過 $A(1,2,3)$、$B(2,4,6)$、$C(3,5,4)$三點之平面 E_1，與另一平面 $E_2: x+ky-2z=1$ 互相垂直，則 $k=$？

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4　【112*C09*】

Ans：(A)

$\overrightarrow{AB}=(1,2,3)$

$\overrightarrow{AC}=(2,3,1)$

$$\begin{matrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{matrix}$$

$(-7)\quad 5\quad (-1)$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-7,5,-1) \rightarrow$ 取 $\vec{n_1}=(7,-5,1)$

E_1的法向量

而 $\vec{n_2}=(1,k,-2)$

E_2的法向量

$E_1 \perp E_2 \rightarrow \vec{n_1}\perp\vec{n_2} \rightarrow \vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$

$7\times1+(-5)\times k+1\times(-2)=0$

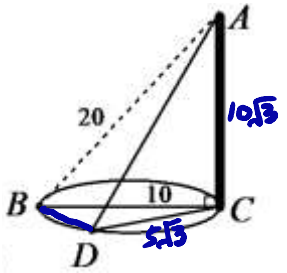
$7-5k-2=0 \rightarrow 5k=5 \rightarrow k=1$ #

有一露營活動，大家想要在地面上立一垂直桿子，並以繩索固定，如圖所示，其中 $\overline{AC}$ 為垂直於地面的桿子、$\overline{AD}$ 為繩索。已知 B、C 兩點相距 10 公尺，而 D 點是位於以 $\overline{BC}$ 為直徑的圓上，且 $\angle BCD = 30°$。若從桿頂 A 到 B 點的距離為 20 公尺，則 $\overline{AD} =$？

(A) $14\sqrt{2}$ 公尺　　(B) $8\sqrt{6}$ 公尺

(C) $5\sqrt{15}$ 公尺　　(D) $11\sqrt{3}$ 公尺　　【112C22】

Ans：(C)



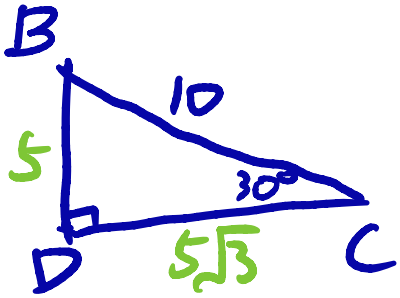
連接 $\overline{BD}$

$\because$ $\overline{BC}$ 為直徑　$\therefore \angle BDC = 90°$

(半圓的圓周角是直角)

直角△ABC → $\overline{AC} = \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$

△BCD中，$\angle BCD = 30°$ →



$\therefore \overline{CD} = 5\sqrt{3}$

直角△ACD → $\sqrt{(10\sqrt{3})^2 + (5\sqrt{3})^2} = \sqrt{375}$

$= 5\sqrt{15}$ (m)

※

正四面體(四個面皆為正三角形)$ABCD$ 的四個頂點坐標為 $A(0,0,0)$、$B(2,0,0)$、$C(1,\sqrt{3},0)$、$D(x,y,z)$，其中 $z>0$，則 $z=$？

(A) $\sqrt{3}$　(B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　(C) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$　(D) $\frac{\sqrt{3}}{6}$　【111C13】

Ans：(C)

$\overline{AB}=2$

$\because$ A、B、C之z均為0

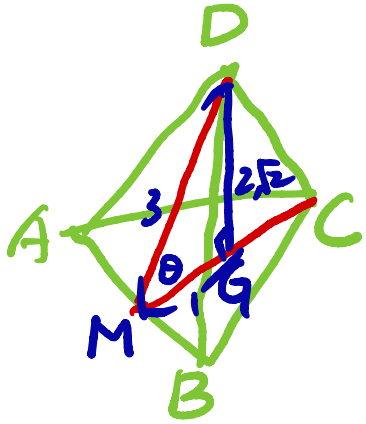
$\therefore$ A、B、C在z=0之平面

此時D點的z坐標

就是正四面體的高

故 $z=\frac{\sqrt{6}}{3}\times 2=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ※

※正四面體



$\overline{DM}:\overline{MG}:\overline{DG}$

$=3:1:2\sqrt{2}$

① $\cos\theta=\frac{1}{3}$

② 若 $\overline{AD}=a$

則 $\overline{DM}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

高 $\overline{DG}$ 為

$\overline{DM}\times\sin\theta$

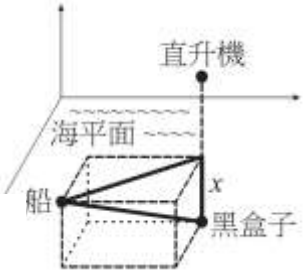
$=\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$

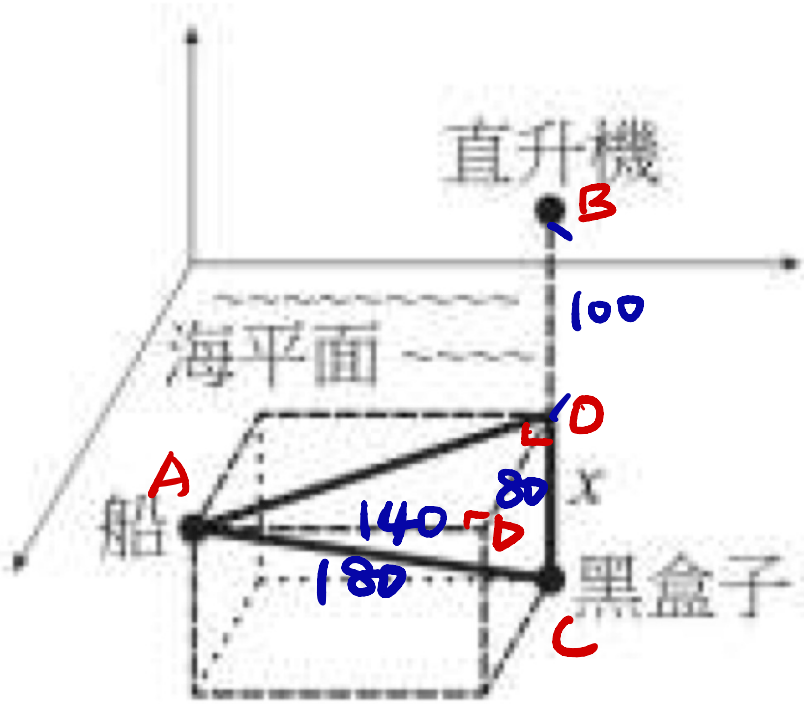
$=\frac{\sqrt{6}}{3}a$

今有一飛機失事落海，救難直升機於失事地點附近偵測到黑盒子（飛行記錄器的俗稱），其所發出的訊號恰好位於直升機的正下方，但無法確定深度，直升機將位置訊息告知水上工作船，經船上人員推算，直升機位於工作船東方 140 公尺、北方 80 公尺的海平面上方 100 公尺處，並且偵測到該黑盒子與水上工作船的直線距離為 180 公尺，如圖所示。根據上述訊息，若黑盒子在海平面下深度為 x 公尺，則 $x=$？

(A) 60　(B) 70　(C) 80　(D) 90

Ans：(C)





$$\begin{array}{r} 12800 \\ -\ 6400 \\ \hline 6400 \end{array}$$

直角△OAD → $\overline{OA}^2 = 140^2 + 80^2$

直角△OAC → $x^2 = 180^2 - \overline{AO}^2$

$= 180^2 - 140^2 - 80^2$

$= 320 \times 40 - 6400$

$= 12800 - 6400$

$= 6400$

故 $x = \sqrt{6400} = 80$ #

已知二元一次方程組的增廣矩陣為$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{array}\right]$，則下列何者為此矩陣經過列運算操作後的增增廣矩陣？

(A) $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{array}\right]$ (B) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 5 \end{array}\right]$ (C) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 7 \end{array}\right]$ (D) $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{array}\right]$ 【113*C05*】

Ans：(C)

解 $\begin{cases} x-y=4 \\ 2x+3y=3 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$

代入檢驗得知

(C) $\begin{cases} x-y=4 \\ 3x+2y=7 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 3-(-1)=4 \\ 3\times3+2\times(-1)=7 \end{cases}$ (合)

故選(C) ※

在工程領域中，矩陣運算可用來描述系統的輸入與輸出之關聯性。已知$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$分別表示系統輸入與輸出的變量，且彼此滿足下列關係：$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 5x_2 \\ y_1 = 3x_1 + 8x_2 \end{cases}$。若此關係可用矩陣運算$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$表示，其中 A 為二階方陣。若 A 的反方陣為 $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，則 $a+b+c+d=$？

(A) 2　(B) 1　(C) −1　(D) −2　【113*C09*】

Ans：(A)

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = y_1 \\ 3x_1 + 8x_2 = y_2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}}\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$\therefore a=8, b=-5, c=-3, d=2$

故 $a+b+c+d = 8+(-5)+(-3)+2$

$= 2$ #

已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$，矩陣 $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$。若矩陣 $C=AB$，且 $C^2=\begin{bmatrix}d_{11} & d_{12}\\ d_{21} & d_{22}\end{bmatrix}$，則 $d_{12}=$？

(A) -2　(B) -3　(C) -4　(D) -5　【112*C07*】

Ans：(A)

$$C=AB=\underbrace{\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}_{2\times3}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}_{3\times2}}=\underbrace{\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}}_{2\times2}$$

$C_{11}=(-1)\times0+1\times1+0\times1=1$

$C_{12}=(-1)\times1+1\times0+0\times1=-1$

$C_{21}=1\times0+0\times1+0\times1=0$

$C_{22}=1\times1+0\times0+0\times1=1$

$\therefore C=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$$C^2=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_{11} & d_{12}\\ d_{21} & d_{22}\end{bmatrix}$$

$d_{12}=1\times(-1)+(-1)\times1=-2$ ※

已知 a、b、c 為實數。若方程組 $\begin{cases} ax+by+cz=-2 \\ bx+cy+az=-4 \\ cx+ay+bz=6 \end{cases}$ 的解為 $x=1$、$y=1$、$z=-1$，則下列何者為正確？

(A) $ab=6$　(B) $bc=3$　(C) $ac=2$　(D) $abc=6$　【112*C10*】

Ans：(C)

$$\begin{cases} a+b-c=-2 \\ b+c-a=-4 \\ c+a-b=6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+b-c=-2 & -① \\ -a+b+c=-4 & -② \\ a-b+c=6 & -③ \end{cases}$$

①+②得 $2b=-6 \rightarrow \boxed{b=-3}$

③−②得 $2a-2b=10 \rightarrow 2a+6=10 \rightarrow \boxed{a=2}$

由①得 $2-3-c=-2 \rightarrow \boxed{c=1}$

(A) $ab=-6$

(B) $bc=-3$

(C) $ac=2$ ※

(D) $abc=-6$

在一個園遊會的攤位遊戲中，遊戲規則如下：在一個桶子裡有三種球，抽中紅球可得 x 點，抽中黃球可得 y 點，但抽中黑球則必須扣掉 z 點。每個人抽 10 次，每次抽一個球，最後依照得到的點數來兌換獎品。已知小華抽中 3 個紅球、3 個黃球、4 個黑球，共得 10 點；小明抽中 4 個紅球、3 個黃球、3 個黑球，共得 21 點；小玲抽中 2 個紅球、6 個黃球、2 個黑球，共得 26 點。若小蘭抽中 3 個紅球、5 個黃球、2 個黑球，則小蘭得到的點數為何？

(A) 28　(B) 30　(C) 32　(D) 39　【111*C11*】

Ans：(A)

$$\begin{cases} 3x+3y-4z=10 \\ 4x+3y-3z=21 \\ 2x+6y-2z=26 \end{cases}$$

$2x+2z=22$

$x+z=11$

$3x-2z=8$

$5x=30$

$x=6$

$z=5$

$x+3y-z=13$

$6+3y-5=13 \rightarrow 3y=12 \rightarrow y=4$

小蘭：$3x+5y-2z=18+20-10=28$ ※

若矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix} 2 & c \\ b & d \end{bmatrix}$，且 $AB=A+B$，則 $c=$？

(A) -1　(B) $\frac{-1}{2}$　(C) $\frac{1}{2}$　(D) 1　【111*C17*】

Ans：(C)

$$AB=\begin{bmatrix} a & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2a-b & ac-d \\ 4+3b & 2c+3d \end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} a & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & c \\ b & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+2 & -1+c \\ 2+b & 3+d \end{bmatrix}$$

$$AB=A+B \rightarrow \begin{cases} 2a-b=a+2 & \text{—①} \\ ac-d=-1+c & \text{—②} \\ 4+3b=2+b & \text{—③} \\ 2c+3d=3+d & \text{—④} \end{cases}$$

由③得 $\boxed{b=-1}$ $\xrightarrow{\text{代入①}}$ $2a+1=a+2 \rightarrow \boxed{a=1}$

② $\rightarrow c-d=-1+c \rightarrow \boxed{d=1}$ $\xrightarrow{\text{代入④}}$ $2c+3=4$

$\rightarrow \boxed{c=\frac{1}{2}}$

※

若 k 為實數，且二元一次聯立方程組 $\begin{cases} kx+3y+k+1=0 \\ x+4(k+1)y+8k^2+1=0 \end{cases}$ 有無限多組解，則 k 可為下列何值？

(A) $-\frac{3}{2}$　(B) $-\frac{1}{2}$　(C) $\frac{1}{2}$　(D) $\frac{3}{2}$　【110*C10*】

Ans：(C)

無限多組解 $\rightarrow \frac{k}{1}=\frac{3}{4(k+1)}=\frac{k+1}{8k^2+1}$

$4k(k+1)=3 \rightarrow 4k^2+4k-3=0$

$\begin{matrix} 2 & & -1 \\ 2 & \times & +3 \end{matrix}$

$\rightarrow (2k-1)(2k+3)=0$

$\rightarrow k=\frac{1}{2}$ or $k=-\frac{3}{2}$

① $k=\frac{1}{2}$ 時 $\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{\frac{1}{2}+1}{8\times\frac{1}{4}+1}=\frac{\frac{3}{2}}{3}=\frac{1}{2}$

② $k=-\frac{3}{2}$ 時 $\frac{-\frac{3}{2}}{1}\neq\frac{-\frac{3}{2}+1}{8\times\frac{9}{4}+1}=\frac{-\frac{1}{2}}{19}$

故 $k=\frac{1}{2}$ ※

若 x、y、z 為相異實數，則三階行列式 $\begin{vmatrix} x+y & x-y & x \\ y+z & y-z & y \\ z+x & z-x & z \end{vmatrix} = ?$ 【110*C11*】

(A) 0　(B) $(x-y)(y-z)(z-x)$　(C) $(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)$　(D) $(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2$

Ans：(A)

$$\begin{vmatrix} x+y & x-y & x \\ y+z & y-z & y \\ z+x & z-x & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & -y & x \\ z & -z & y \\ x & -x & z \end{vmatrix} = 0 \ \#$$

$\times(-1)$

成比例

某家口罩工廠擁有 5 台 A 型機器和 3 台 B 型機器來製造口罩，平時每日總產量為 11070 個口罩。今因應肺炎疫情日趨嚴重，緊急添購 3 台 A 型機器和 9 台 B 型機器，並提高所有機器的每日產能至原先的 150%，使得該工廠每日總產量增為 42120 個口罩，試問一台 A 型機器原先的每日產能為多少個？

(A) 1350　(B) 1380　(C) 1410　(D) 1440　【109*C19*】

Ans：(A)

設A原產能 x (個/台)

B 〃 y (個/日)

則 $\begin{cases} 5x+3y=11070 \\ (8x+12y)\times 150\% = 42120 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} 5x+3y=11070 & -① \\ 2x+3y=7020 & -② \end{cases}$

① − ② 得 $3x=4050 \rightarrow x=1350$ #

已知三階行列式 $\begin{vmatrix} a_1-2b_1-3c_1 & a_1-2c_1 & a_1 \\ a_2-2b_2-3c_2 & a_2-2c_2 & a_2 \\ a_3-2b_3-3c_3 & a_3-2c_3 & a_3 \end{vmatrix}=8$，則 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_3 \\ a_2 & b & c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=$？

(A) -4　(B) -2　(C) 2　(D) 4　【109*C20*】

Ans：(C)

$$\begin{vmatrix} a_1-2b_1-3c_1 & a_1-2c_1 & a_1 \\ a_2-2b_2-3c_2 & a_2-2c_2 & a_2 \\ a_3-2b_3-3c_3 & a_3-2c_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$\times(-1)$

$$=\begin{vmatrix} -2b_1-3c_1 & -2c_1 & a_1 \\ -2b_2-3c_2 & -2c_2 & a_2 \\ -2b_3-3c_3 & -2c_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$\times(-\frac{3}{2})$

$$=\begin{vmatrix} -2b_1 & -2c_1 & a_1 \\ -2b_2 & -2c_2 & a_2 \\ -2b_3 & -2c_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$=4\times\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}=4\times\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=8$$

① ②

換2次不變號

$$\therefore \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=2 \ \#$$

已知下列兩個聯立方程組有相同的解(x, y, z)，試問 a 的值為何？

$\begin{cases} 3x-4y+z=4 \\ 5x+2y-2z=3 \end{cases}$、$\begin{cases} 2x+3y-2z=a \\ 4x+5y-3z=1 \end{cases}$

(A) -1　(B) 0　(C) 1　(D) 2　【108*C04*】

Ans：(B)

$$\begin{cases} 3x-4y+z=4 & \text{—①} \\ 5x+2y-2z=3 & \text{—②} \\ 4x+5y-3z=1 & \text{—③} \end{cases}$$

①×2+② 得 $11x-6y=11$

①×3+③ 得 $13x-6y=13$

$\rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

代回①得 $3-0+z=4 \rightarrow z=1$

以 $x=1, y=0, z=1$ 代入 $2x+3y-2z=a$

得 $a=2+0-2=0$ ※

設 b_1、b_2、b_3、c_1、c_2 及 c_3 均為實數，若二階行列式 $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 13$、$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 7$、$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 2$，

則三階行列式 $\begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 2 & b_2 & c_2 \\ 3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = ?$

(A) 5　(B) 13　(C) 25　(D) 33　【107*C03*】

Ans：(A)

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 2 & b_2 & c_2 \\ 3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - 2\times\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + 3\times\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= 1\times 13 - 2\times 7 + 3\times 2$$

$$= 13 - 14 + 6$$

$$= 5 \ \#$$

設 $\begin{cases} 3x+5y+z=15 \\ 2x+4y+z=12 \\ 5x+y+2z=3 \end{cases}$，則 $y=$？

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5　【107*C10*】

Ans：(B)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 24+2+25-20-3-20=8$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 15 & 1 \\ 2 & 12 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad \times(-1) \quad \times(-2)$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 15 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -1 & -27 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -27 \end{vmatrix}$$

$$= 27-3$$

$$= 24$$

故 $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{24}{8} = 3$ #

設 x、y、z 為整數，且 $2|x+y|+3|x-y-4|+5|2x+3y-z|=4$，則 z 可為下列何者？

(A) 0　(B) 3　(C) 5　(D) 11　【106*C08*】

Ans：(B)

$\because$ $x \cdot y \cdot z$ 為整數

$\therefore$ $2x+3y-z=0$

$2|x+y|+3|x-y-4|=4$

此時必 $\begin{cases} |x+y|=2 \rightarrow x+y=\pm 2 \\ |x-y-4|=0 \rightarrow x-y-4=0 \end{cases}$

① $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases} \rightarrow 6-3-z=0 \rightarrow \boxed{z=3}$

② $\begin{cases} x+y=-2 \\ x-y=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases} \rightarrow 2-9-z=0 \rightarrow \boxed{z=-7}$

故 z 可為 3 ※

設 t 為實數，且三元一次聯立方程式 $\begin{cases}(t+1)x+(t-1)z=1\\(t+1)y+z=3\\(t+1)y+tz=5\end{cases}$ 無解，則 t 可為下列何者？

(A) -2　(B) 0　(C) 1　(D) 2　【106*C09*】

Ans：(C)

(A) $t=-2 \rightarrow \begin{cases}-x-3z=1\\-y+z=3\\-y-2z=5\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x=1\\y=-\frac{11}{3}\\z=-\frac{2}{3}\end{cases}$

(B) $t=0 \rightarrow \begin{cases}x-z=1\\y+z=3\\y=5\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x=-1\\y=5\\z=-2\end{cases}$

(C) $t=1 \rightarrow \begin{cases}2x=1\\2y+z=3\\2y+z=5\end{cases}$ > 無解

(D) $t=2 \rightarrow \begin{cases}3x+z=1\\3y+z=3\\3y+2z=5\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x=-\frac{1}{3}\\y=\frac{1}{3}\\z=2\end{cases}$

求三階行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & 10 & 121 \end{vmatrix} = 0$ 所有解的和為何？

(A) 11　(B) $\frac{34}{3}$　(C) 12　(D) $\frac{40}{3}$　【106*C10*】

Ans：(D)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & 10 & 121 \end{vmatrix} \times(-1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & x^2-1 \\ 0 & 9 & 120 \end{vmatrix}$$

$$= 120(x-1) - 9(x^2-1)$$

$$= -9x^2 + 120x - 111$$

$$= 0$$

$$9x^2 - 120x + 111 = 0$$

$$\alpha + \beta = -\frac{-120}{9} = \frac{40}{3} \quad \#$$

若三元一次聯立方程式 $\begin{cases} ax-ay=5 \\ ax-y+(1-a)z=3 \\ (1-a)y+(2a-3)z=1 \end{cases}$ 恰有一解，則 a 可能為下列何值？

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3　【105*C09*】

Ans：(D)

(A) $a=0 \rightarrow \begin{cases} 0=5 \rightarrow \text{無解} \\ \cdots \\ \cdots \end{cases}$

(B) $a=1 \rightarrow \begin{cases} x-y=5 \\ x-y=3 \\ \cdots \end{cases} \rightarrow \text{無解}$

(C) $a=2 \rightarrow \begin{cases} 2x-2y=5 \\ 2x-y-z=3 \\ -x+z=1 \\ -2x+2z=2 \end{cases}$ $\begin{matrix} y-z=-2 \\ -y+z=5 \\ y-z=5 \end{matrix}$ 無解

(D) $a=3 \rightarrow \begin{cases} 3x-3y+0z=5 \\ 3x-y-2z=3 \\ 0x-2y+3z=1 \end{cases}$

$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}=-9-12+27=6\neq 0 \rightarrow$ 恰一解

設 a、b、c 均為實數，若 $(a-b)(b-c)(c-a)=-2$，則 $\begin{vmatrix} 2a & b & b \\ 6c & 3c & 3b \\ 2c-2a & c-a & c-a \end{vmatrix}$ 之值為何？

(A) -12　(B) -6　(C) 6　(D) 12　【105*C10*】

Ans：(D)

$$\begin{vmatrix} 2a & b & b \\ 6c & 3c & 3b \\ 2c-2a & c-a & c-a \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{提出}3} \xrightarrow{\text{提出}c-a}$$

$\downarrow$ 提出 2

$$=6(c-a)\begin{vmatrix} a & b & b \\ c & c & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$\times(-1)$

$$=6(c-a)\begin{vmatrix} a & b-a & 0 \\ c & 0 & b-c \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=6(c-a)(b-a)(b-c)$$

$$=-6(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$=(-6)\times(-2)$$

$$=12 \text{※}$$

若二元一次方程組 $\begin{cases} 2x+3y=-4 \\ 3x-4y=5 \end{cases}$ 的解為 $x=a$ 、 $y=b$ ，則 $a+b=$ ？

(A) $-\frac{23}{17}$　(B) $-\frac{21}{17}$　(C) $\frac{21}{17}$　(D) $\frac{23}{17}$　【104*C04*】

Ans：(A)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

設 $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=-17$

則 $A^{-1}=\frac{1}{-17}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

故 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{1}{-17}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$=\frac{1}{-17}\begin{bmatrix} 16-15 \\ 12+10 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{-17}\begin{bmatrix} 1 \\ 22 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{17} \\ -\frac{22}{17} \end{bmatrix}$$

$a=-\frac{1}{17}$, $b=-\frac{22}{17} \rightarrow a+b=-\frac{23}{17}$ ※

若行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2$，則 $\begin{vmatrix} a_1 & c_1+a_1 & b_1-2c_1 \\ a_2 & c_2+a_2 & b_2-2c_2 \\ a_3 & c_3+a_3 & b_3-2c_3 \end{vmatrix} = ?$

(A) -4　(B) -2　(C) 2　(D) 4　【104*C22*】

Ans：(B)

$\times 2$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1+a_1 & b_1-2c_1 \\ a_2 & c_2+a_2 & b_2-2c_2 \\ a_3 & c_3+a_3 & b_3-2c_3 \end{vmatrix}$$

$\times(-1)$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

換1次，要變號

$$= -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= -2$$

設 x、y、k 均為實數，若 $|x+1|+|2x-y+4|+|x+3y+k|=0$，則 k 之值為何？

(A) 3　(B) 1　(C) –4　(D) –5　【103*C06*】

Ans：(D)

$x+1=0$ 且 $2x-y+4=0$ 且 $x+3y+k=0$

$x+1=0 \rightarrow x=-1$

$-2-y+4=0 \rightarrow y=2$

$-1+6+k=0 \rightarrow k=-5$ ※

三階行列式 $\begin{vmatrix} 101 & 102 & 103 \\ 201 & 202 & 203 \\ 301 & 302 & 304 \end{vmatrix}$ 之值為何？

(A) –202　(B) –201　(C) –101　(D) –100　【103*C15*】

Ans：(D)

$$\begin{vmatrix} 101 & 102 & 103 \\ 201 & 202 & 203 \\ 301 & 302 & 304 \end{vmatrix}$$

$\times(-1)$

$$= \begin{vmatrix} 101 & 1 & 2 \\ 201 & 1 & 2 \\ 301 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$\times(-2)$

$$= \begin{vmatrix} 101 & 1 & 0 \\ 201 & 1 & 0 \\ 301 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 101 & 1 \\ 201 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 101 - 201$$

$$= -100 \ \#$$

已知 $a>0$，且方程式 $\begin{cases}-x+3y=ax\\3x+y=ay\end{cases}$ 有無限多組解，則 $a=$？

(A) 1　(B) $\sqrt{2}$　(C) $\sqrt{5}$　(D) $\sqrt{10}$　【102*C11*】

Ans：(D)

$$\begin{cases}-x+3y=ax\\3x+y=ay\end{cases} \rightarrow \begin{cases}(a+1)x-3y=0\\-3x+(a-1)y=0\end{cases}$$

$$\frac{a+1}{-3}=\frac{-3}{a-1}$$

$$a^2-1=9$$

$$a^2=10$$

$$a=\pm\sqrt{10}$$

$$\because a>0$$

$$\therefore a=\sqrt{10}$$

若三階行列式 $\begin{vmatrix} x & 13 & 16 \\ 11 & 14 & 17 \\ 12 & 15 & 18 \end{vmatrix}$ 之值為 3，則三階行列式 $\begin{vmatrix} x+2 & 13 & 16 \\ 11 & 14 & 17 \\ 12 & 15 & 18 \end{vmatrix}$ 之值為何？

(A) –9　　(B) –3　　(C) 3　　(D) 9　　【102*C20*】

Ans：(B)

$$\begin{vmatrix} x+2 & 13 & 16 \\ 11+0 & 14 & 17 \\ 12+0 & 15 & 18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 13 & 16 \\ 11 & 14 & 17 \\ 12 & 15 & 18 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 13 & 16 \\ 0 & 14 & 17 \\ 0 & 15 & 18 \end{vmatrix}$$

$$= 3 + 2 \times \begin{vmatrix} 14 & 17 \\ 15 & 18 \end{vmatrix}$$

$\times(-1)$

$$= 3 + 2 \times \begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 15 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3 + 2 \times (-3)$$

$$= 3 + (-6)$$

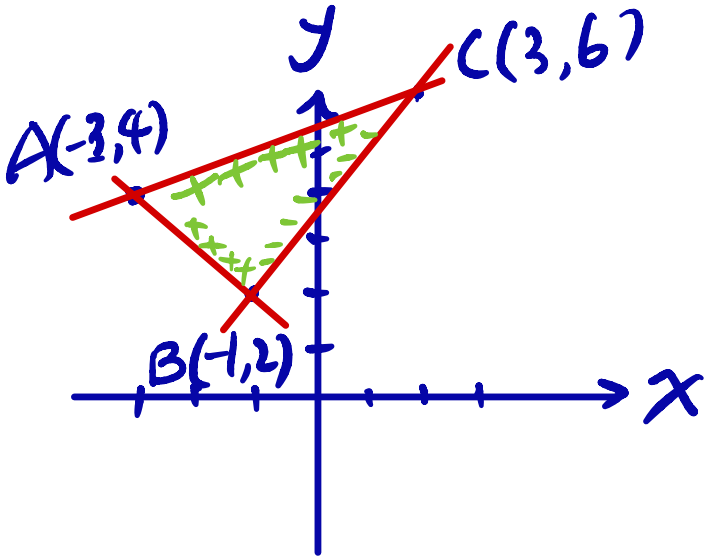
$$= -3 \ \#$$

ch12_二元一次不等式與線性規劃

在坐標平面上，若 ΔABC 的三頂點坐標分別為 $A(-3,4)$、$B(-1,2)$與 $C(3,6)$，則 ΔABC 與其內部區域可由下列哪一組不等式表示？

(A) $\begin{cases} x-y+3\le 0 \\ x+y-1\ge 0 \\ x-3y+15\ge 0 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x-y+3\ge 0 \\ x+y-1\ge 0 \\ x-3y+15\ge 0 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x-y+3\ge 0 \\ x+y-1\le 0 \\ x-3y+15\ge 0 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x-y+3\le 0 \\ x+y-1\le 0 \\ x-3y+15\le 0 \end{cases}$ 【113C21】

Ans：(A)



$$\begin{cases} m_{\overline{AB}}=-1 \\ m_{\overline{BC}}=1 \\ m_{\overline{AC}}=\frac{1}{3} \end{cases} \xrightarrow{\text{由斜率得知}} \begin{cases} \overleftrightarrow{BC}: x-y+3=0 \\ \overleftrightarrow{AB}: x+y-1=0 \\ \overleftrightarrow{AC}: x-3y+15=0 \end{cases}$$

由圖得知 $\begin{cases} x-y+3\le 0 \\ x+y-1\ge 0 \\ x-3y+15\ge 0 \end{cases}$ → 選(A) ※

二元一次聯立不等式 $\begin{cases} x+3y \geq 6 \\ 2x+y \leq -4 \end{cases}$ 的圖解區域屬於哪一象限？

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限　【112*C05*】

Ans：(B)

$x+3y=6$

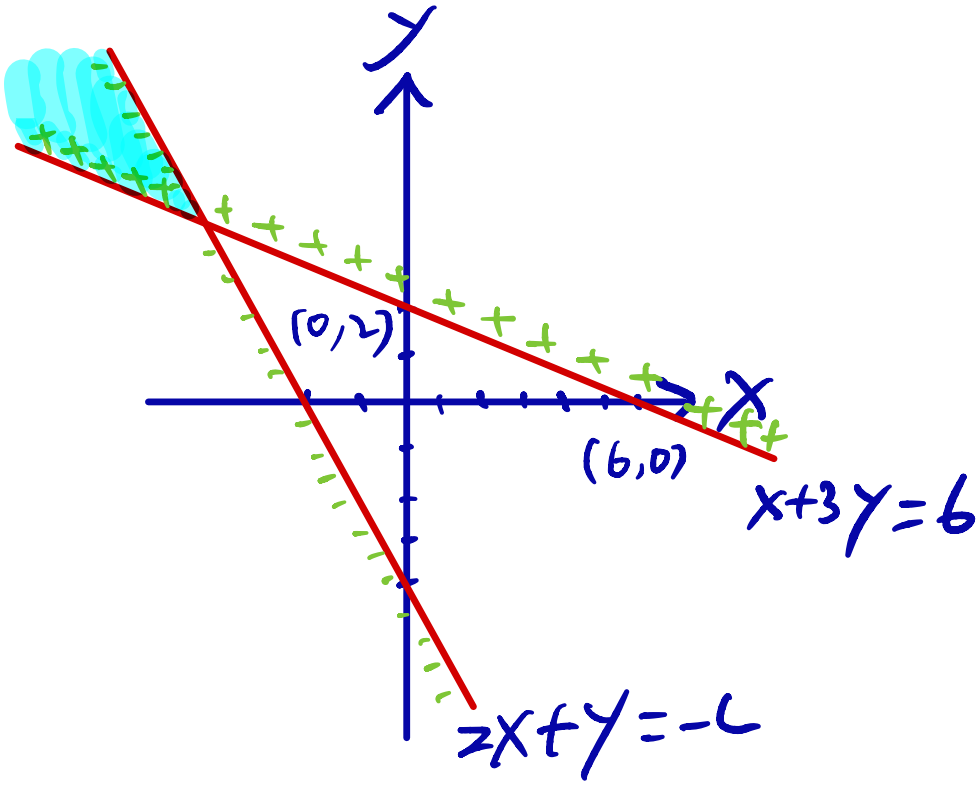
6　0

0　2

$2x+y=-4$

-2　0

0　-4



如圖 → 第二象限 ※

坐標平面上，若點 $A(a,-6)$ 在直線 L：$2x-y+12=0$ 之右半平面，則下列何者為 a 的可能值？

(A) -15　(B) -12　(C) -10　(D) -7　【111*C06*】

Ans：(D)

$2x-y+12=0$ 之右半平面 $\rightarrow 2x-y+12\geq 0$

$A(a,-6)$ 代入得 $2a+6+12\geq 0$

$2a\geq -18$

$a\geq -9 \rightarrow -7>-9$

$\rightarrow$ 選(D) ※

在 $\begin{cases} x+2y-6\geq 0 \\ x+y-10\leq 0 \\ 2\leq x\leq 9 \end{cases}$ 的條件下，求其可行解區域的面積(平方單位)為何？

(A) $\frac{119}{4}$　(B) $\frac{59}{2}$　(C) $\frac{117}{4}$　(D) $\frac{55}{2}$　【109*C10*】

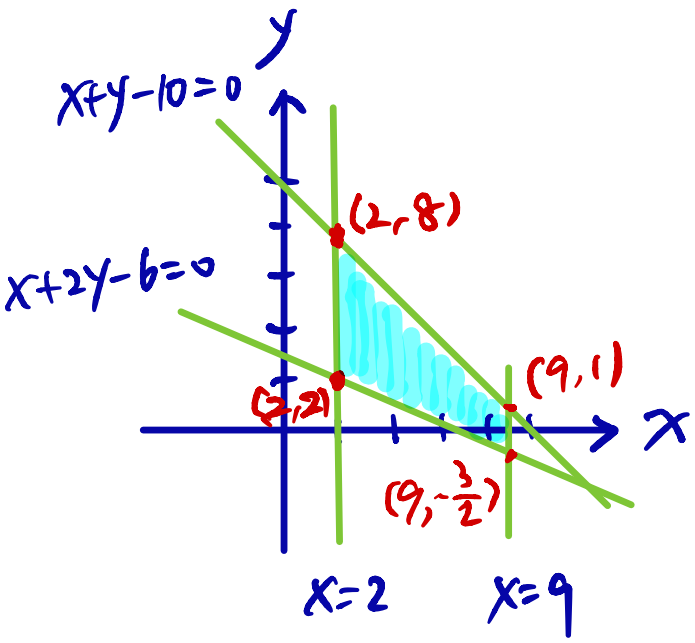
Ans：(A)

$x+2y-6=0$

6	0
0	3

$x+y-10=0$

10	0
0	10



$x=2$、$x=9$ 為鉛直線

如圖，可行解區域為梯形

上底 $=1-(-\frac{3}{2})=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

下底 $=8-2=6$

高 $=9-2=7$

$\therefore$ 面積 $=\frac{1}{2}\times(\frac{5}{2}+6)\times 7=\frac{119}{4}$ #

在人工智慧的分類技術中，用到以直線分類不同物件的概念。設平面上有七個點 $A(1,3)$、$B(3,2)$、$C(-1,4)$、$D(-1,2)$、$E(1,-2)$、$F(-2,-1)$、$G(-3,2)$分屬●、▲二類，其中直線 L：$3x+4y-12=0$ 未能將它們正確分類，如圖所標示。若將 L 平行移動至新的位置成為新直線 L_1 且能達到正確分類目的，則下列何者可為 L_1 的直線方程式？ 【109*C24*】

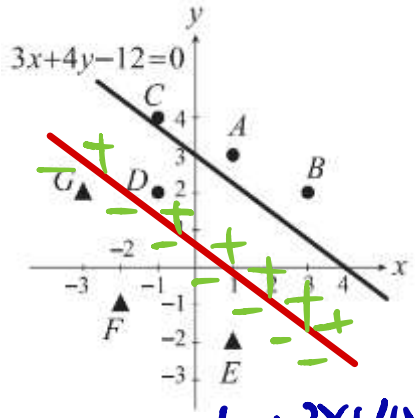
(A) $3x+4y+2=0$

(B) $3x+4y-6=0$

(C) $6x+8y+3=0$

(D) $6x+8y-3=0$

Ans：(D)



$L_1: 3x+4y+k=0$

如圖

$3x+4y+k$ 需滿足 $\begin{cases} D \to -3+8+k>0 \\ G \to -9+8+k<0 \end{cases}$

即 $-5<k<1$

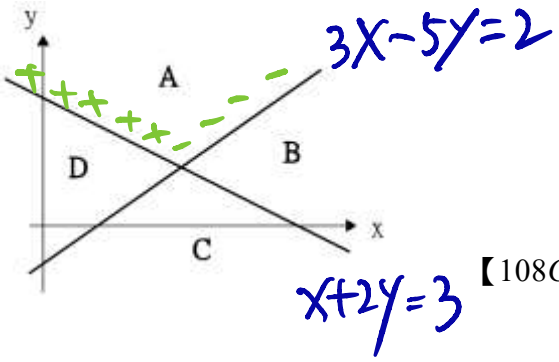
(A) $k=2$ (不合)

(B) $k=-6$ (不合)

(C) $3x+4y+\frac{3}{2}=0 \to k=\frac{3}{2}$ (不合)

(D) $3x+4y-\frac{3}{2}=0 \to k=-\frac{3}{2}$ (合) #

有兩條直線 L_1：$3x-5y=2$、L_2：$x+2y=3$ 將平面分成四個區域，如圖所示，試問區域 A 可用哪一組不等式表示？



(A) $\begin{cases} 3x-5y\ge 2 \\ x+2y\ge 3 \end{cases}$　(B) $\begin{cases} 3x-5y\le 2 \\ x+2y\ge 3 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 3x-5y\ge 2 \\ x+2y\le 3 \end{cases}$　(D) $\begin{cases} 3x-5y\le 2 \\ x+2y\le 3 \end{cases}$

【108*C03*】

Ans：(B)

如圖，A區 → $\begin{cases} 3x-5y\le 2 \\ x+2y\ge 3 \end{cases}$ → 選(B) ※

坐標平面上滿足不等式 $\begin{cases} 2x+y\le 10 \\ x+2y\le 8 \\ x\ge 0,\ y\ge 0 \end{cases}$ 的區域面積為何？

(A) 12　(B) 13　(C) 15　(D) 16　【107*C05*】

Ans：(B)

$2x+y=10$

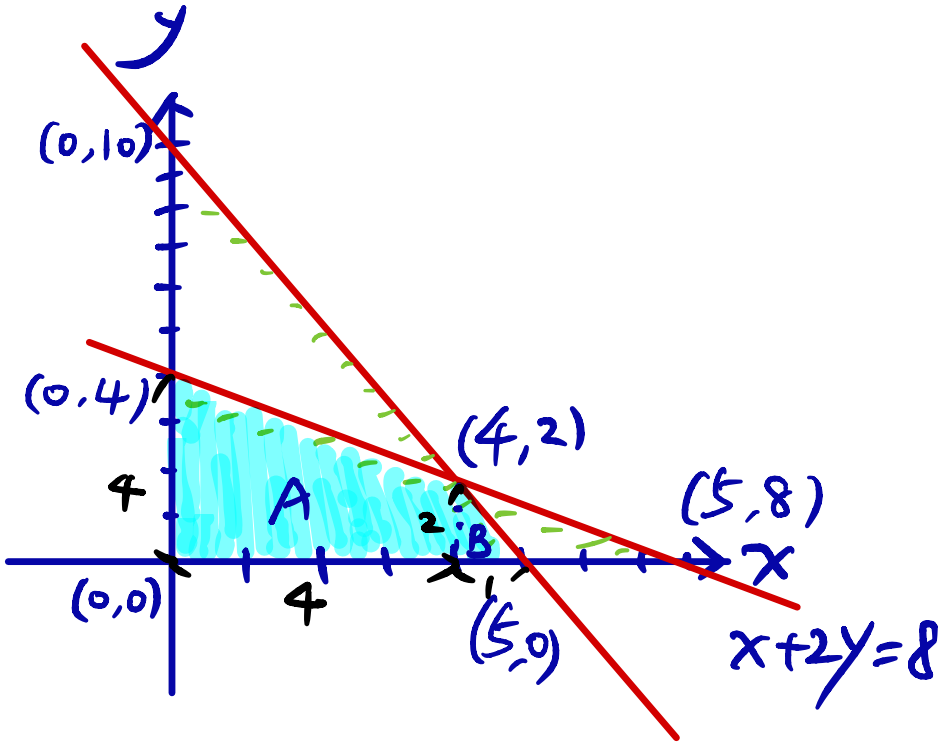
5　0

0　10

$x+2y=8$

8　0

0　4



$\begin{cases} 2x+y=10 \\ x+2y=8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$

過 (4,2) 作垂線(如圖)

所求 $= A+B = \frac{1}{2}\times(2+4)\times 4+\frac{1}{2}\times 1\times 2$

$=12+1$

$=13$ #

滿足二元一次聯立不等式 $\begin{cases} x+y\le 4 \\ 3x-y\le 6 \\ 5x+2y\ge 10 \end{cases}$ 的整數解(x,y)共有幾個？

(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 6　【105*C12*】

Ans：(B)

$x+y=4$

4　0

0　4

$3x-y=6$

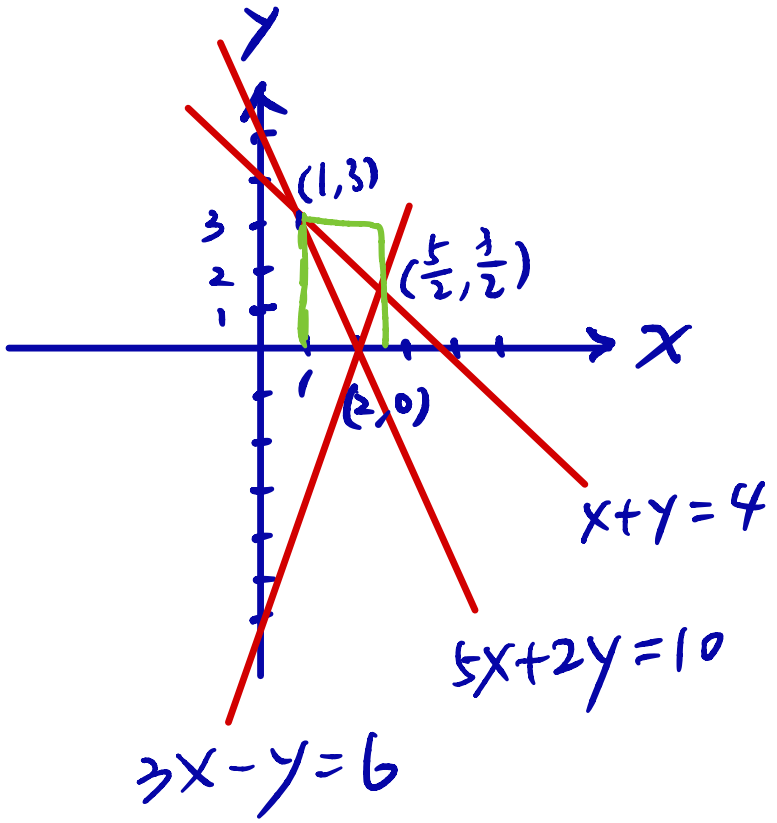
2　0

0　-6

$5x+2y=10$

2　0

0　5



由圖可知，$1\le x\le \frac{5}{2}$，$0\le y\le 3$

此時檢驗 (1,3)、(2,0)、(2,1)、(2,2) 即可

$\begin{cases} 1+3\le 4 \\ 3-3\le 6 \\ 5+6\ge 10 \end{cases}$ (合)、$\begin{cases} 2+0\le 4 \\ 6-0\le 6 \\ 10+0\ge 10 \end{cases}$ (合)、$\begin{cases} 2+1\le 4 \\ 6-1\le 6 \\ 10+2\ge 10 \end{cases}$ (合)

$\begin{cases} 2+2\le 4 \\ 6-2\le 6 \\ 10+4\ge 10 \end{cases}$ (合)

故 (x,y) 有 4 個 ※

若在聯立不等式$\begin{cases} 2x-y\ge 0 \\ x+3y\le 7 \\ x-4y\le 0 \end{cases}$的條件下，目標函數$f(x,y)=2x-3y-2$的最大值為$M$，最小值為$m$，則$M+m=$？

(A) –5　(B) –3　(C) 3　(D) 5　【104*C11*】

Ans：(B)

$\begin{cases} 2x-y=0 \\ x+3y=7 \end{cases} \rightarrow (1,2)$

$\begin{cases} 2x-y=0 \\ x-4y=0 \end{cases} \rightarrow (0,0)$

$\begin{cases} x+3y=7 \\ x-4y=0 \end{cases} \rightarrow (4,1)$

(x,y)	$(1,2)$	$(0,0)$	$(4,1)$
$2x-3y-2$	-6	-2	3

$\therefore M=3,\ m=-6$

故 $M+m=3+(-6)=-3$ ※

在聯立不等式組 $x\geq 0$，$y\geq 0$，$2x+y-6\leq 0$，$x+2y-6\leq 0$ 的可行解區域中，x、y 均為整數解的點坐標 (x,y) 共有多少個？

(A) 8　(B) 9　(C) 11　(D) 無限多個　【103*C19*】

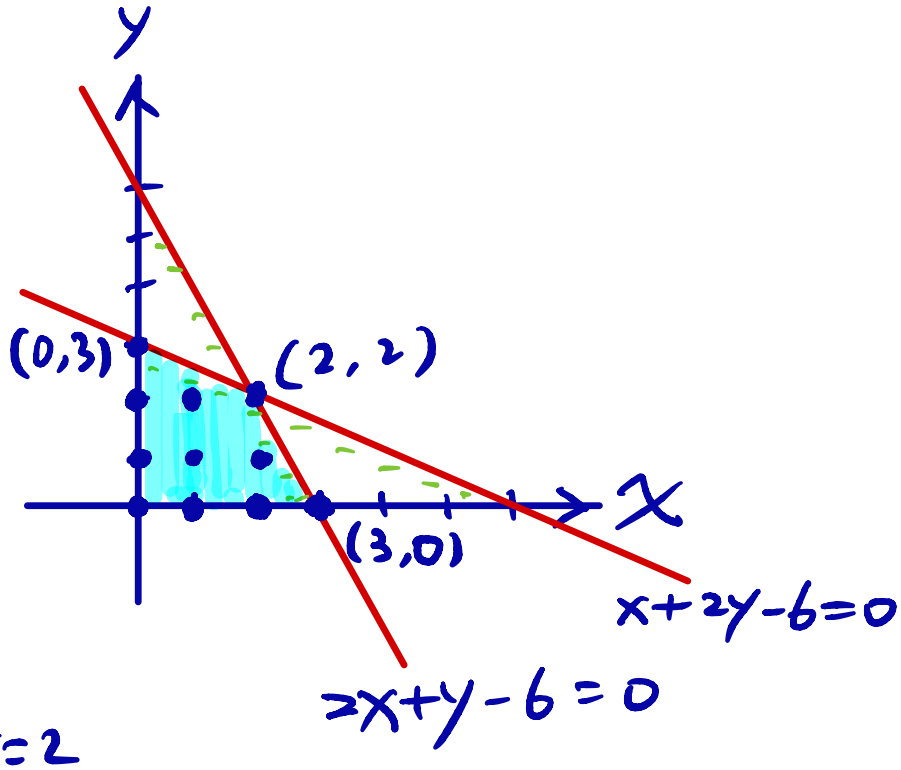
Ans：(C)

$2x+y-6=0$

3	0
0	6

$x+2y-6=0$

6	0
0	3



$$\begin{cases} 2x+y=6 \\ x+2y=6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

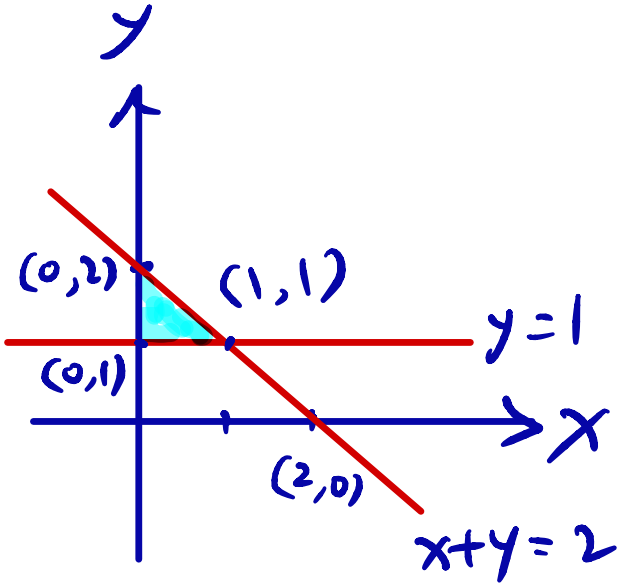
由圖可知滿足的 (x,y) 共有11個

※

在 $x \geq 0$ ， $y \geq 1$ ， $x+y \leq 2$ 的條件下， $2x-y$ 的最大值為何？

(A) -2　　(B) -1　　(C) 1　　(D) 2　　【101*C02*】

Ans：(C)



如圖，

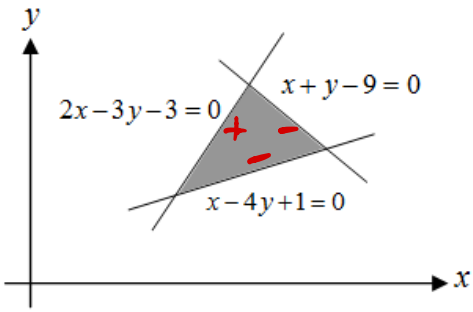
(x, y)	(0,1)	(1,1)	(0,2)
2x-y	-1	1	-2

最大值為 1 ※

下列二元一次聯立不等式中，何者代表圖(一)所示之三角區域？

(A) $\begin{cases} x-4y+1\le 0 \\ 2x-3y-3\ge 0 \\ x+y-9\le 0 \end{cases}$　(B) $\begin{cases} x-4y+1\le 0 \\ 2x-3y-3\le 0 \\ x+y-9\le 0 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x-4y+1\ge 0 \\ 2x-3y-3\ge 0 \\ x+y-9\ge 0 \end{cases}$　(D) $\begin{cases} x-4y+1\ge 0 \\ 2x-3y-3\le 0 \\ x+y-9\le 0 \end{cases}$



圖(一)

【100*C02*】

Ans：(A)

$$\begin{cases} x-4y+1\le 0 \\ 2x-3y-3\ge 0 \\ x+y-9\le 0 \end{cases} \rightarrow \text{選(A)}$$

聯立不等式$\begin{cases} x+y\geq 10 \\ x-y\leq 1 \end{cases}$的可行解區域是圖(一)的哪一個部分？

(A) A

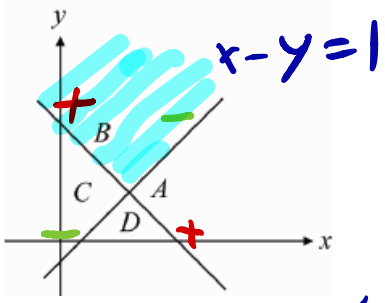
(B) B

(C) C

(D) D

【99C11】

Ans：(B)



圖(一)

由斜率可判斷得如圖

故$\begin{cases} x+y\geq 10 \\ x-y\leq 1 \end{cases}$為B區 #

在坐標平面上，滿足不等式方程組 $\begin{cases} 2x+y-6\le 0 \\ 3x-y+3\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$ 的區域，其面積為何？

(A) $\frac{22}{5}$ (B) $\frac{32}{5}$ (C) $\frac{42}{5}$ (D) $\frac{48}{5}$ 【98*C16*】

Ans：(D)

$2x+y-6=0$

3 0

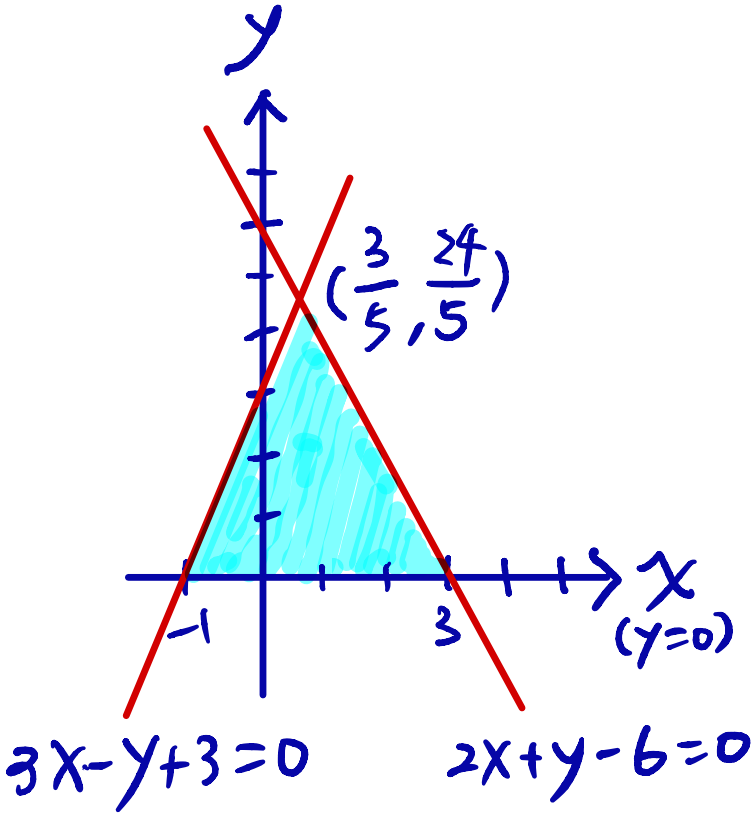
0 6

$3x-y+3=0$

-1 0

0 3

$y=0 \rightarrow x$ 軸



$\begin{cases} 2x+y=6 \\ 3x-y=-3 \end{cases} \rightarrow (\frac{3}{5},\frac{24}{5})$

△之底長為 $3-(-1)=3+1=4$，高為 $\frac{24}{5}$

$\triangle=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{24}{5}=\frac{48}{5}$ #

已知 $a>0$，拋物線 $y=ax^2$ 的正焦弦 $\overline{F_1F_2}$ 長度為 8，且其頂點為 V，則 ΔVF_1F_2 的面積為何？

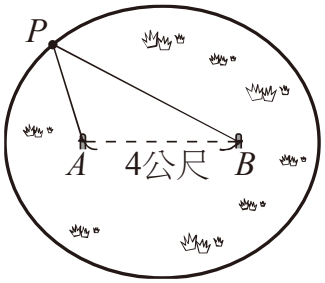
(A) 8　(B) 16　(C) 24　(D) 32　【113*C13*】

Ans：(A)

$4c=8 \rightarrow c=2$

$\Delta VF_1F_2=\frac{1}{2}\times 2\times 8=8$ #

農夫將一隻牛的項圈串上一條長 8 公尺的繩子，並將繩子的兩端分別套在相距 4 公尺的兩根木樁上。假設牛在草地上移動的最大範圍為一橢圓形區域，如圖所示，其中 A、B 為木樁位置，而 P 為牛的位置，且 $\overline{PA}+\overline{PB}\le 8$(公尺)，則牛離兩根木樁連線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的最遠距離約為多少公尺？

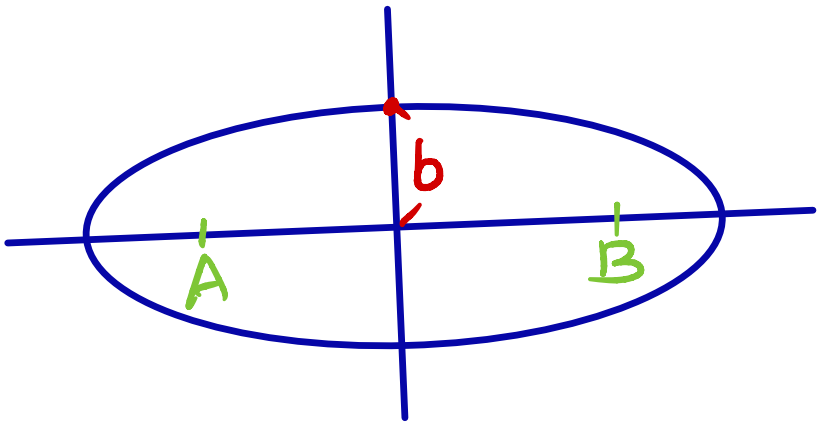


(A) $\sqrt{3}$　(B) $2\sqrt{3}$　(C) $4\sqrt{3}$　(D) 12　【112*C21*】

Ans：(B)

$$\begin{cases}\overline{PA}+\overline{PB}=2a=8\\ \overline{AB}=2c=4\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=4\\ c=2\end{cases}$$

$$b^2=a^2-c^2=16-4=12\rightarrow b=\sqrt{12}=2\sqrt{3}\ ※$$



若 $P(x,y)$ 為橢圓 $4x^2+6y^2-12y-6=0$ 上任意一點，則 $x+3y$ 的最大值為何？

(A) $3+7\sqrt{3}$　(B) $3+5\sqrt{3}$　(C) $3+3\sqrt{5}$　(D) $3+\sqrt{21}$　【111*C24*】

Ans：(D)

$$4x^2+6\underline{(y^2-2y+1)}=6+6$$

$$4x^2+6(y-1)^2=12$$

$$\frac{x^2}{3}+\frac{(y-1)^2}{2}=1 \rightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{y-1}{\sqrt{2}}\right)^2=1$$

$$\begin{cases}\frac{x}{\sqrt{3}}=\cos\theta\\ \frac{y-1}{\sqrt{2}}=\sin\theta\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\theta\\ y=\sqrt{2}\sin\theta+1\end{cases}$$

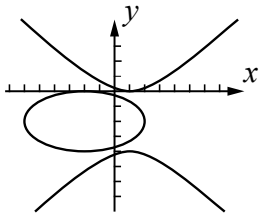
$$x+3y=\sqrt{3}\cos\theta+3\sqrt{2}\sin\theta+3$$

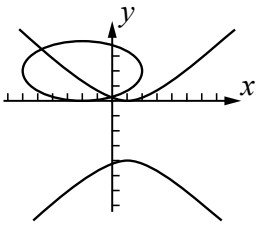
而 $-\sqrt{(\sqrt{3})^2+(3\sqrt{2})^2}\le\sqrt{3}\cos\theta+3\sqrt{2}\sin\theta\le\sqrt{(\sqrt{3})^2+(3\sqrt{2})^2}$

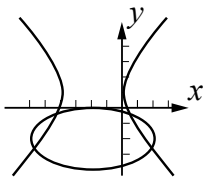
即 $-\sqrt{21}\le\sqrt{3}\cos\theta+3\sqrt{2}\sin\theta\le\sqrt{21}$

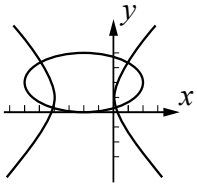
$$3-\sqrt{21}\le\sqrt{3}\cos\theta+3\sqrt{2}\sin\theta+3\le\underline{3+\sqrt{21}}$$ ※

若有兩個二次曲線方程式，分別為 $x^2+4y^2+4x-16y+4=0$ 與 $\frac{(x+2)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{5}=1$，則下列何者為此兩曲線的圖形組合？

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

Ans：(D) 【110*C09*】

$(x^2+4x+4)+4(y^2-4y+4)=-4+4+16$

$(x+2)^2+4(y-2)^2=16$

$\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{4}=1 \rightarrow$ 中心 $(-2,2)$

$\rightarrow$ 排除(A)、(C)

$\frac{(x+2)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{5}=1 \rightarrow$ 左右型且中心 $(-2,1)$

$\rightarrow$ 排除(A)、(B)

故選(D)※

若給定一橢圓標準式 $\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{144}=1$，則下列何者正確？

(A) (4 , –2)為其中一焦點　　(B) (9 , –2)為其中一長軸頂點

(C) (4 , 10)為其中一短軸頂點　　(D) 正焦弦長為 $\frac{25}{6}$　　【109*C07*】

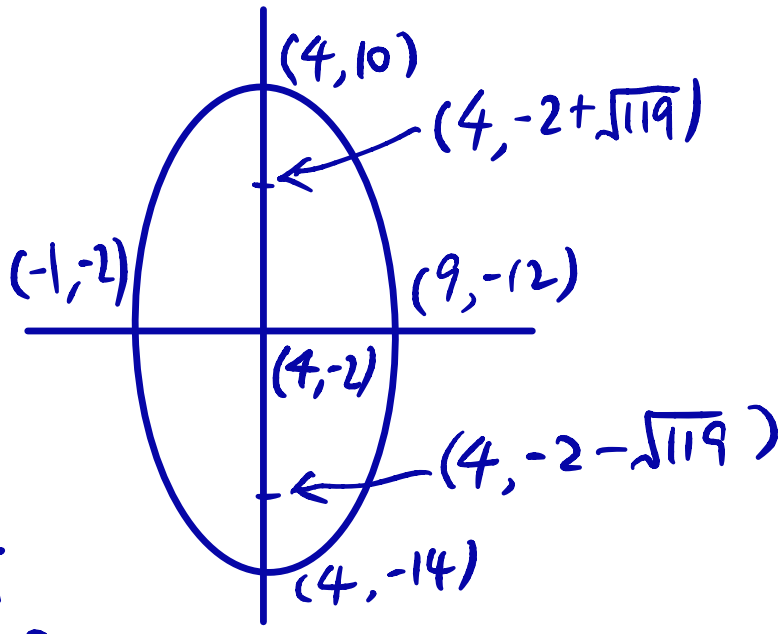
Ans：(D)

$$\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{144}=1$$

① 上下型

② 中心 $(4,-2)$

③ $\begin{cases} a^2=144 \to a=12 \\ b^2=25 \to b=5 \\ c^2=119 \to c=\sqrt{119} \end{cases}$

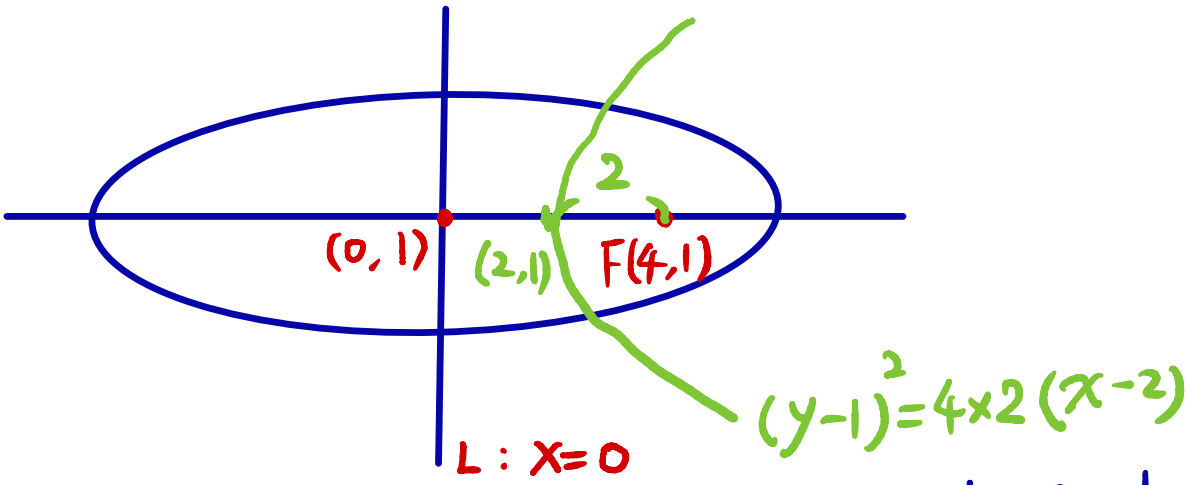


④ 正焦弦長 $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times 25}{12}=\frac{25}{6}$ ※

已知點 F 及直線 L 分別為橢圓 $\frac{x^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$ 的焦點及短軸。若以直線 L 為準線及點 F 為焦點所作出拋物線的方程式為 $4c(x-h)=(y-k)^2$，則 $|chk|=$？

(A) 12　(B) 8　(C) 6　(D) 4　【108*C22*】

Ans：(D)



$(y-1)^2=4\times2(x-2)$

$c=2,\ h=2,\ k=1$

$|chk|=|2\times2\times1|=4$ ※

$\frac{x^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$

① 左右型

② 中心 $(0,1)$

③ $\begin{cases} a^2=25 \\ b^2=9 \\ c^2=16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=3 \\ c=4 \end{cases} \rightarrow$ 取 $F(4,1)$

已知 F_1、F_2 為橢圓 $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$ 的焦點，且 F_3、F_4 為雙曲線 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的焦點。若 P 點為上述橢圓與雙曲線之交點，則下列何者正確？

(A) $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=24$　(B) $\overline{PF_3}+\overline{PF_4}=26$　(C) $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=6$　(D) $\left|\overline{PF_3}-\overline{PF_4}\right|=6$　【108*C23*】

Ans：(B)

$$\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1 \quad \left(\begin{array}{l} a^2=169 \to a=13 \\ b^2=144 \\ c^2=25 \to c=5 \end{array}\right)$$

$F_1(-5,0)$，$F_2(5,0)$，$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2\times13=26$

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1 \quad \left(\begin{array}{l} A^2=16 \to A=4 \\ B^2=9 \\ C^2=25 \to C=5 \end{array}\right)$$

$F_3(-5,0)$，$F_4(5,0)$，$\left|\overline{PF_3}-\overline{PF_4}\right|=2\times4=8$

$\because F_1=F_3$ 且 $F_2=F_4$

$\therefore \underline{\overline{PF_3}+\overline{PF_4}=26}$ 且 $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=8$ ※

若雙曲線 $4x^2-16y^2+4x+16y+1=0$ 的貫軸長及正焦弦長分別為 i、j，則 $i+j=$？

(A) $\frac{3}{2}$　(B) 2　(C) $\frac{5}{2}$　(D) 5　【106*C21*】

Ans：(D)

$$4(x^2+x+\frac{1}{4})-16(y^2-y+\frac{1}{4})=-1+1-4$$

$$4(x+\frac{1}{2})^2-16(y-\frac{1}{2})^2=-4$$

$$4(y-\frac{1}{2})^2-(x+\frac{1}{2})^2=1$$

$$\frac{(y-\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{4}}-\frac{(x+\frac{1}{2})^2}{1}=1$$

$$a^2=\frac{1}{4}\rightarrow a=\frac{1}{2}\rightarrow 2a=1\rightarrow i=1$$

$$b^2=1$$

$$\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times 1}{\frac{1}{2}}=4\rightarrow j=4$$

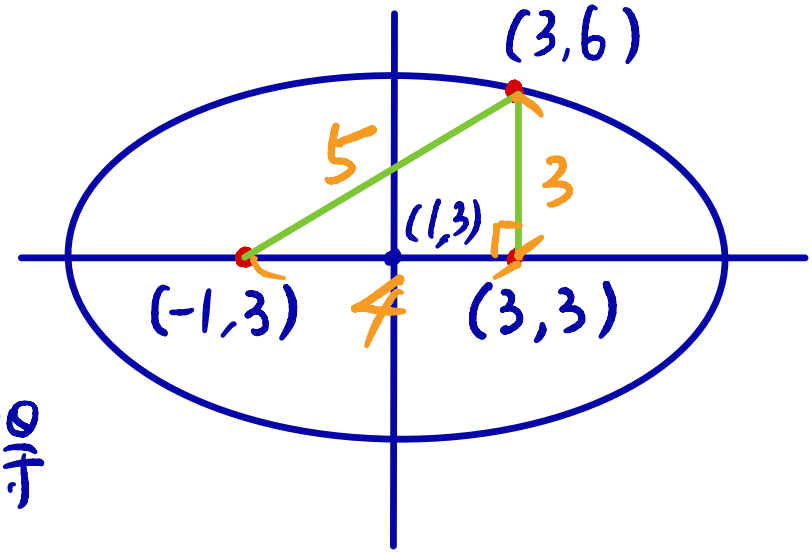
故 $i+j=1+4=5$ ※

已知一橢圓之焦點分別為(3 , 3)及(−1 , 3)，且過點(3 , 6)，則下列何者為橢圓上的點？

(A) (−1 , 0)　(B) (1 , 2)　(C) (2 , 3)　(D) (4 , 5)　【105*C21*】

Ans：(A)

依題意可作如圖



$\Gamma: \frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{12}=1$

(A) 將(-1,0)代入得

$\frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{16}_{4}}+\frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{12}_{4}}=1$ (合)

(-1,0)在Γ上 ※

$2a=5+3=8 \to a=4$

$\to a^2=16$

$2c=4 \to c=2 \to c^2=4$

$b^2=a^2-c^2=16-4=12$

橢圓 $25x^2+16y^2-100x+32y-284=0$ 之兩焦點在哪兩個象限？

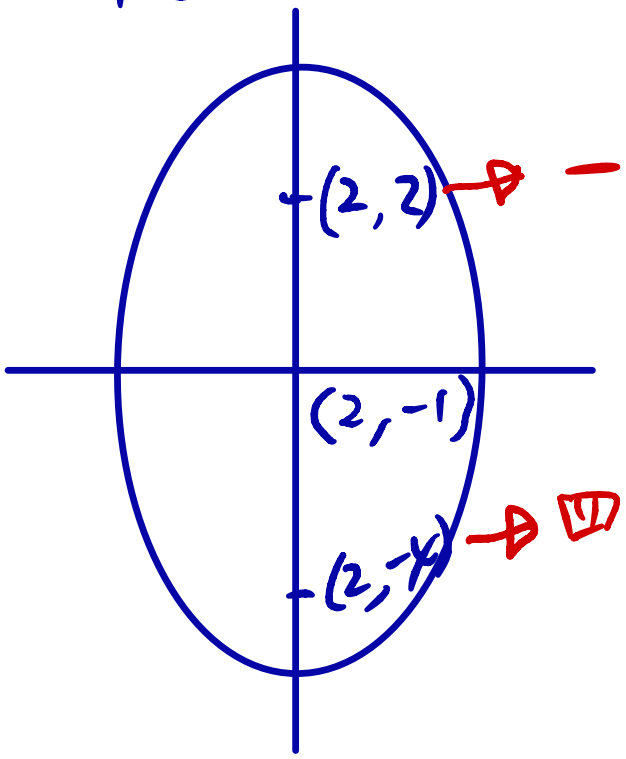
(A) 一、二　(B) 二、三　(C) 三、四　(D) 一、四　【104*C19*】

Ans：(D)

$$25(x^2-4x+4)+16(y^2+2y+1)=284+100+16$$

$$25(x-2)^2+16(y+1)^2=400$$

$$\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{25}=1 \quad \left(\begin{array}{l} a^2=25 \\ b^2=16 \\ c^2=9 \rightarrow c=3 \end{array}\right)$$



設 F、F' 為橢圓 $25x^2+9y^2=225$ 的兩焦點，點 $P(-3,0)$ 為橢圓上一點，則 $\overline{PF}+\overline{PF'}$ 之值為何？

(A) 6　(B) 8　(C) 10　(D) 15　【103*C02*】

Ans：(C)

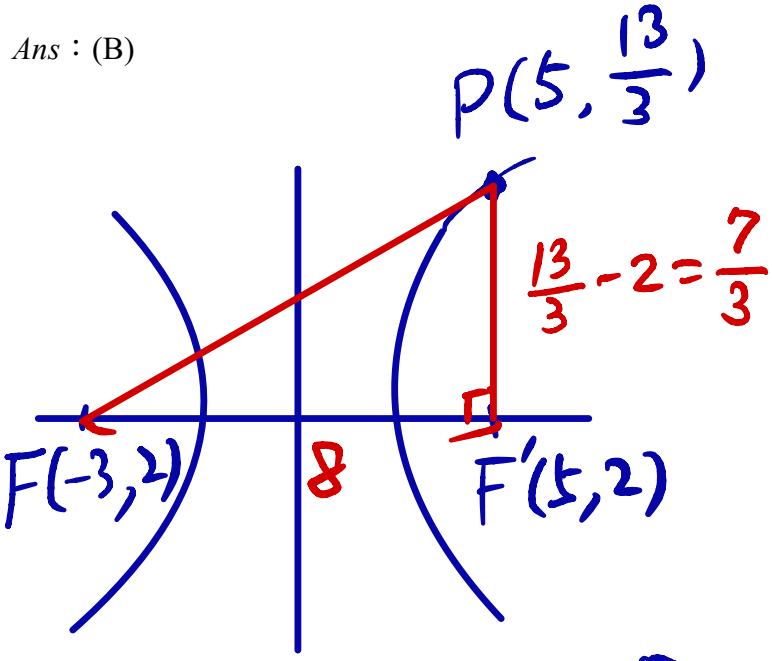
$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1 \quad \left(\begin{array}{l} a^2=25 \rightarrow a=5 \\ b^2=9 \\ c^2=16 \end{array}\right)$$

$$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a=2\times5=10 \ \#$$

設雙曲線的兩焦點分別為 $F(-3,2)$、$F'(5,2)$，且此雙曲線過 $P(5,\frac{13}{3})$，則此雙曲線的貫軸長為何？

(A) 3　(B) 6　(C) 7　(D) 14　【102*C08*】

Ans：(B)



$\because \overline{PF'} : \overline{FF'} = \frac{7}{3} : 8 = 7 : 24$

$\therefore \overline{PF'} : \overline{FF'} : \overline{PF} = 7 : 24 : 25$

$= \frac{7}{3} : 8 : \frac{25}{3}$

$\overline{PF} = \frac{25}{3}$

而 $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 2a \rightarrow 2a = \frac{25}{3} - \frac{7}{3}$

$= \frac{18}{3}$

$= 6$ #

已知點 $P(x,6)$ 為拋物線 $y^2=8x$ 上一點，F 為此拋物線的焦點，L 為過 P 且與 x 軸垂直的直線，如圖(二)。求由 $\overline{PF}$、L 與 x 軸所圍成的三角形面積為何？

(A) $\frac{15}{2}$

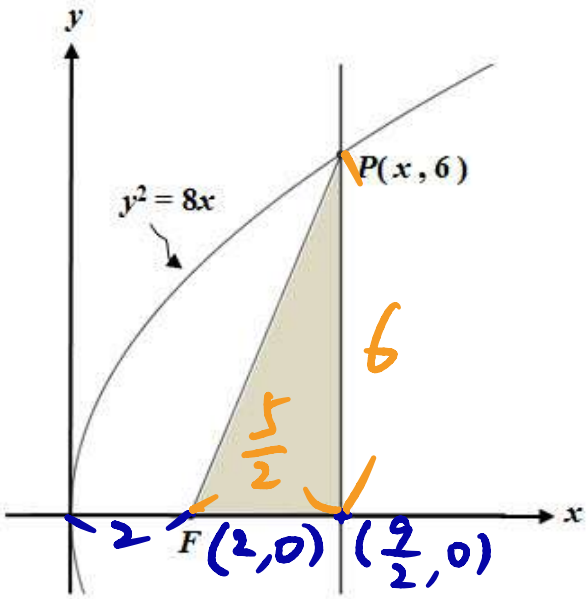
(B) 8

(C) $\frac{17}{2}$

(D) 9

Ans：(A)

【102*C*15】



圖(二)

$6^2=8x \rightarrow x=\frac{9}{2} \rightarrow P(\frac{9}{2},6)$

$y^2=8x \rightarrow 4c=8 \rightarrow c=2 \rightarrow F(2,0)$

$\frac{9}{2}-2=\frac{5}{2}$

$\triangle=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times 6=\frac{15}{2}$ #

設拋物線 $x^2-2x-4y+1=0$ 之頂點為 V 且與直線 $L: y=1$ 相交於 A、B 兩點，則 ΔABV 之面積為何？

(A) 1　(B) 2　(C) 4　(D) 8　【101*C03*】

Ans：(B)

$(x^2-2x+1)=4y$

$(x-1)^2=4y \rightarrow V(1,0)$

$y=1 \rightarrow x^2-2x-4+1=0$

$\rightarrow x^2-2x-3=0$

$\begin{matrix} 1 & +1 \\ 1 & -3 \end{matrix}$

$\rightarrow (x+1)(x-3)=0$

$\rightarrow x=-1$ 或 $x=3$

取 $A(-1,1)$，$B(3,1)$

$\overrightarrow{VA}=(-2,1)$

$\overrightarrow{VB}=(2,1)$

$\Delta ABV=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\times 4=2$ #

已知一橢圓方程式為 $\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$。若點 $P(x,y)$ 為此橢圓上任一點，則

$\sqrt{(x+5)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=$？

(A) 5　(B) 6　(C) 8　(D) 10　【100*C04*】

Ans：(D)

$P(x,y)$, $F_1(-5,1)$, $F_2(3,1)$

$\sqrt{(x+5)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=\overline{PF_1}+\overline{PF_2}$

$=2a$

而 $a^2=25 \rightarrow a=5$

故所求 $=2a=2\times5=10$ ※

設拋物線的對稱軸平行 x 軸，且過$(8,-3)$、$(8,1)$、$(2,-2)$三點，則此拋物線之頂點坐標為何？

(A) $(-1,0)$　(B) $(-1,1)$　(C) $(0,-1)$　(D) $(1,-1)$　【100*C18*】

Ans：(C)

對稱軸平行x軸 → 左右型

設 $x=ay^2+by+c$

則可得

$$\begin{cases} 9a-3b+c=8 \\ a+b+c=8 \\ 4a-2b+c=2 \end{cases}$$

$8a-4b=0 \to b=2a$

$3a-3b=-6$

$3a-6a=-6$

$-3a=-6$

$a=2$

$b=4$

$2+4+c=8 \to c=2$

故 $x=2y^2+4y+2$

$=2(y^2+2y+1)$

$=2(y+1)^2 \longrightarrow V(0,-1)$ ※

關於拋物線 $P: x = 4y^2 + 8y$，下列敘述何者正確？

(A) 開口向下　(B) 頂點在$(-4, -1)$　(C) 準線是$y = -1$　(D) 正焦弦長為4　【99*C02*】

Ans：(B)

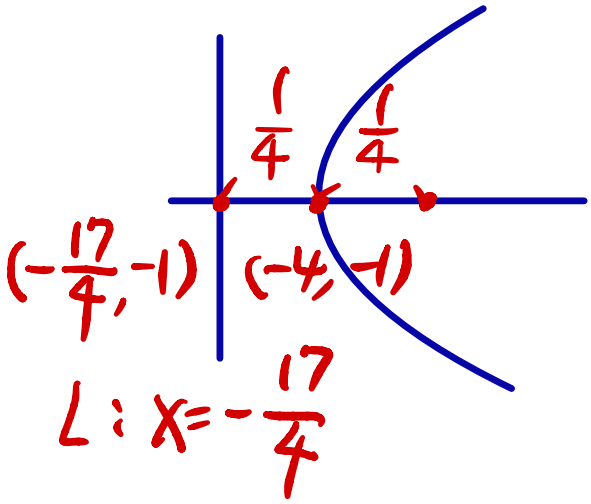
$4(y^2+2y+1) = x+4$

$4(y+1)^2 = (x+4) \rightarrow (y+1)^2 = \frac{1}{4}(x+4)$

$\rightarrow$ 開口向右，$V(-4,-1)$ ※

$\rightarrow 4c = \frac{1}{4}$

$\rightarrow c = \frac{1}{16}$



若雙曲線 $H:9x^2-4y^2-72x+8y+176=0$，則下列直線何者是雙曲線 H 的漸近線？

(A) $L_1:2x+3y-14=0$　　(B) $L_2:2x-3y+10=0$

(C) $L_3:3x+2y-14=0$　　(D) $L_4:3x-2y+10=0$　　【98C18】

Ans：(C)

$9(x^2-8x+16)-4(y^2-2y+1)=-176+144-4$

$9(x-4)^2-4(y-1)^2=-36$

$9=3^2$　　$4=2^2$

取 $(3x-12)^2-(2y-2)^2=0$

$(3x-12+2y-2)(3x-12-2y+2)=0$

$(3x+2y-14)(3x-2y-10)=0$

兩漸近線為 $3x+2y-14=0$、$3x-2y-10=0$

若實係數多項式函數 $f(x)=ax^4+bx^2-2x+c$，其導函數為 $f'(x)=8x^3-6x+d$ 且 $f(1)=5$，則 $a+b+c+d=$？

(A) 11　(B) 9　(C) 7　(D) 5　【113*C11*】

Ans：(D)

$f'(x)=4ax^3+2bx-2$

$=8x^3-6x+d$

$4a=8 \rightarrow a=2$

$2b=-6 \rightarrow b=-3$

$d=-2$

$f(x)=2x^4-3x^2-2x+c$

$f(1)=5 \rightarrow 2-3-2+c=5 \rightarrow c=8$

故 $a+b+c+d=2+(-3)+8+(-2)=5$ ※

下列哪一函數在 $x=1$ 的極限存在，但<u>不</u>連續？

(A) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$　(B) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$　(C) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$　(D) $f(x)=(x-1)^2$　【113*C23*】

Ans：(A)

(A) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=1+1=2 \to$ 存在

$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1} \to x\neq 1 \to$ 在 $x=1$ 處不連續

故選(A)

(B) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}$ 不存在

(C) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=-1 \neq \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\cancel{x-1}}{\cancel{x-1}}=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{x-1}$ 不存在

(D) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=0 \to$ 存在

$f(x)=(x-1)^2 \to f(1)=0 \to$ 連續

已知 a、b 為實數，$f(x)=\sqrt{x}-x$，$g(x)=ax^3+bx$ 的圖形均通過點(1,0)。若 $f(x)$ 以(1,0)為切點的切線 L_1，與 $g(x)$ 以(1,0)為切點的切線 L_2 相互垂直，則下列何者為真？

(A) $a=-1$　(B) $b=1$　(C) $ab=1$　(D) $ab=-1$　【112*C23*】

Ans：(D)

$f(x)=x^{\frac{1}{2}}-x$

$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-1 \rightarrow f'(1)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

$g(x)=ax^3+bx$

$g'(x)=3ax^2+b \rightarrow g'(1)=3a+b$

$\because L_1 \perp L_2 \quad \therefore \left(-\frac{1}{2}\right)\times(3a+b)=-1$

即 $3a+b=2$ —①

$g(1)=a+b=0$ —②

解①,②得 $a=1, b=-1 \rightarrow ab=-1$ #

若 $f(x)=x^3+3x^2-72x-74$，則下列何者為真？

(A) $f(x)$ 的相對極大值發生於 $x=6$　　(B) $f(x)$ 的相對極大值發生於 $x=4$

(C) $f(x)$ 的相對極大值發生於 $x=-1$　　(D) $f(x)$ 的相對極大值發生於 $x=-6$　　【112*C24*】

Ans：(D)

$$f(x)=x^3+3x^2-72x-74$$

$$f'(x)=3x^2+6x-72$$

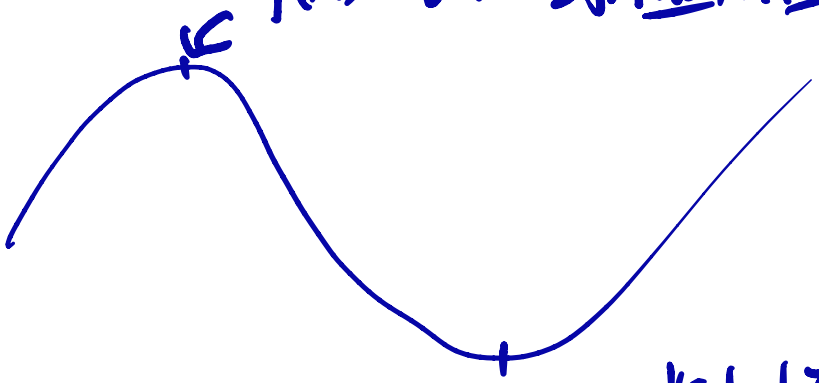
$$=3(x^2+2x-24)$$

$$\begin{matrix} 1 & -4 \\ 1 & +6 \end{matrix}$$

$$=3(x-4)(x+6)$$

$$f'(x)=0 \rightarrow x=4 \text{ or } x=-6$$

f(x)的相對極大值發生於x=-6 ※



f(x)的相對極小值發生於x=4

若四次多項式 $ax^4+bx^3+6x^2+5x+2$ 除以 $(x+1)^2$ 所得的餘式為 $3x+4$，則 $a+b=$？

(B) -12　(B) -6　(C) -4　(D) -2　【111*C10*】

Ans：(B)

$$ax^4+bx^3+6x^2+5x+2=(x+1)^2\cdot Q(x)+3x+4$$

$$ax^4+bx^3+6x^2+2x-2=(x+1)^2\cdot Q(x)$$

$$x=-1 \rightarrow a-b+6-2-2=0$$

$$\rightarrow a-b=-2 \quad —①$$

$$4ax^3+3bx^2+12x+2=2(x+1)\cdot Q(x)+(x+1)^2\cdot Q'(x)$$

$$x=-1 \rightarrow -4a+3b-12+2=0$$

$$\rightarrow 4a-3b=-10 \quad —②$$

解①,②得 $a=-4$，$b=-2$

故 $a+b=(-4)+(-2)=-6$ #

已知函數 $f(x)=x^3+\dfrac{12}{x}$ 圖形在切點(a , b)的切線斜率為 9。若 $a>0$，則 $a+b=$？

(A) -8　　(B) 11　　(C) 14　　(D) 16　　【111*C18*】

Ans：(D)

$$f(x)=x^3+12x^{-1}$$

$$f'(x)=3x^2-12x^{-2}$$

$$f'(a)=3a^2-12a^{-2}=9$$

$$a^2-\frac{4}{a^2}=3$$

$$(a^2)^2-3\cdot(a^2)-4=0$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & & +1 \\ 1 & & -4 \end{array}$$

$$(a^2+1)(a^2-4)=0 \rightarrow a^2=4 \xrightarrow{a>0} a=2$$

$$f(2)=b \rightarrow 2^3+\frac{12}{2}=b \rightarrow b=14$$

故 $a+b=2+14=16$ ※

若函數 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+a}{x^2-2x-3}, & x>3\\ \dfrac{x-5}{x-b}, & x\le 3\end{cases}$ 在 $x=3$ 連續，則 $a+b=$？

(A) -3　(B) -1　(C) 1　(D) 3　【111*C25*】

Ans：(C)

$\because$ $f(x)$ 在 $x=3$ 連續

$\therefore \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x+a}{x^2-2x-3}=\dfrac{3-5}{3-b}=\dfrac{-2}{3-b}$ 存在

故 $\begin{cases} ① \ 2\times 3+a=0 \rightarrow a=-6 \\ ② \ \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x+a}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2}{2x-2}=\dfrac{2}{2\times 3-2}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\dfrac{-2}{3-b}=\dfrac{1}{2} \rightarrow 3-b=-4 \rightarrow b=7$

$a+b=(-6)+7=1$ ※

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(3+h)+2}-\frac{1}{3+2}}{h}=\ ?$$

(A) $-\frac{1}{25}$ (B) $-\frac{1}{9}$ (C) $\frac{1}{9}$ (D) $\frac{1}{25}$ 【110*C05*】

Ans：(A)

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{h+5}-\frac{1}{5}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{h+5}\right)'-0}{1}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(h+5)^2}$$

$$=\frac{-1}{5^2}$$

$$=-\frac{1}{25}$$

若直線 $y=mx$ 與拋物線 $f(x)=-x^2+4x-1$ 相切，且切點在第一象限內，則 $m=$？

(A) 1　(B) 2　(C) 4　(D) 6　【110*C22*】

Ans：(B)

設切點為 (x_0, y_0)

則 $\begin{cases} y_0 = mx_0 & \text{—①} \\ y_0 = -x_0^2+4x_0-1 & \text{—②} \\ f'(x) = -2x+4 \rightarrow -2x_0+4=m & \text{—③} \end{cases}$

以①代入②得 $mx_0 = -x_0^2+4x_0-1$ —④

以③代入④得 $(-2x_0+4)x_0 = -x_0^2+4x_0-1$

$-2x_0^2+\cancel{4x_0} = -x_0^2+\cancel{4x_0}-1 \rightarrow x_0^2=1$

$\rightarrow x_0=\pm 1$

∵切點在第一象限內

∴ $x_0=1 \xrightarrow{\text{代回②}} y_0=-1+4-1=2$

故由①得 $2=m\times 1 \rightarrow m=2$ ※

關於下列各極限，何者錯誤？

(A) $\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt[3]{x-2}=0$　(B) $\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{x-2}=0$　(C) $\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt[3]{x-2}=0$　(D) $\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x-2}=0$　【109*C01*】

Ans：(B)

(B) $\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{x-2}$ 不存在

根號內為負，不合！

設 $f(x)=x^3-3x^2-24x+32$ 在閉區間$[-3,3]$內的最大值與最小值分別為 m、n，則 $m-n=$？

(A) 90　(B) 98　(C) 100　(D) 108　【109*C13*】

Ans：(C)

$f(x)=x^3-3x^2-24x+32$

$f'(x)=3x^2-6x-24$

$=3(x^2-2x-8)$

$\begin{matrix} 1 & +2 \\ 1 & -4 \end{matrix}$

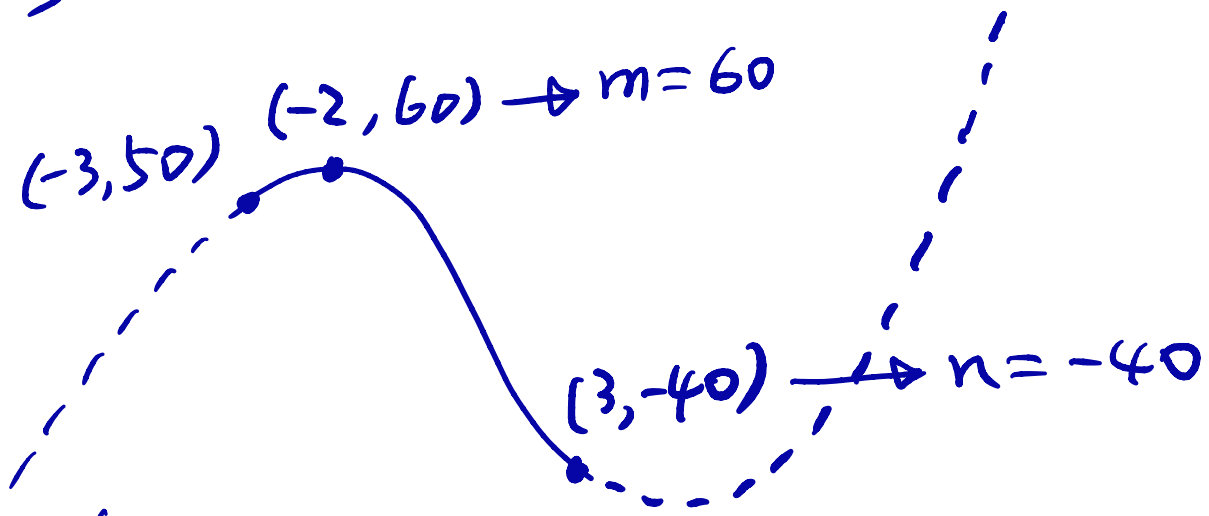
$=3(x+2)(x-4)$

$f'(x)=0 \rightarrow x=-2$ or $x=4$

$f(-3)=-27-27+72+32=50$

$f(-2)=-8-12+48+32=60$

$f(3)=27-27-72+32=-40$



故 $m-n=60-(-40)=60+40=100$ ※

設 $f(x)=\begin{cases} 2x-1\ ,\ x>2 \\ x^2-2x+3\ ,\ x\le 2 \end{cases}$，則 $f'(2)=$？

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 不存在　　【109*C17*】

Ans：(B)

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{2x-1-3}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{2\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=2$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-2x+3-3}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=2$$

$$2=2 \longrightarrow f'(2)=2 \quad \#$$

已知函數 $f(x)$ 的導函數為 $g(x)=x^2-4x+2$，則 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=$？

(A) -2　(B) -1　(C) 1　(D) 2　【108*C15*】

Ans：(B)

$$f'(x)=x^2-4x+2$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

$$=1-4+2$$

$$=-1$$

小明設計了一款迴力鏢，已知將此迴力鏢擲出後，迴力鏢經過了時間 t 秒後與小明的距離為 $f(t)=\dfrac{100t}{t^2+9}$ 公尺，若在 t_0 秒時，迴力鏢離小明最遠，則 $t_0=$？

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4　【108*C25*】

Ans：(C)

$$f(t)=\frac{100t}{t^2+9}$$

$$f'(t)=\frac{100(t^2+9)-100t\cdot(2t)}{(t^2+9)^2}=\frac{-100t^2+900}{(t^2+9)^2}$$

$$f'(t)=0 \rightarrow -100t^2+900=0$$

$$\rightarrow t^2=9$$

$$\rightarrow t=3$$

※ $$f''(t)=\frac{-200t(t^2+9)^2-(-100t^2+900)\cdot 2(t^2+9)(2t)}{(t^2+9)^4}$$

$$f''(3)=\frac{-600\times 18^2+0}{18^4}=-\frac{600}{18^2}<0$$

在 $t_0=3$ 時有 max.

若直線 L 過點(9 , 5)，且與函數 $y=f(x)$ 的圖形相切於點(3 , 1)，則 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=$?

(A) $\dfrac{1}{3}$　(B) $\dfrac{2}{3}$　(C) $\dfrac{3}{2}$　(D) 3　【107*C17*】

Ans：(B)

$y=f(x)$ 在 $x=3$ 處之切線斜率 $=\dfrac{5-1}{9-3}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

即 $f'(3)=\dfrac{2}{3}$

而 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=f'(3)=\dfrac{2}{3}$ ※

若函數 $f(x)$ 的導函數 $f'(x)=x^2-2x-3$，且 $f(0)=6$，則 $f(x)$ 的相對極小值為何？

(A) –5　(B) –4　(C) –3　(D) –2　【107*C18*】

Ans：(C)

由 $f'(x)=x^2-2x-3$ 可知

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+C$

$f(0)=6 \rightarrow C=6$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+6$

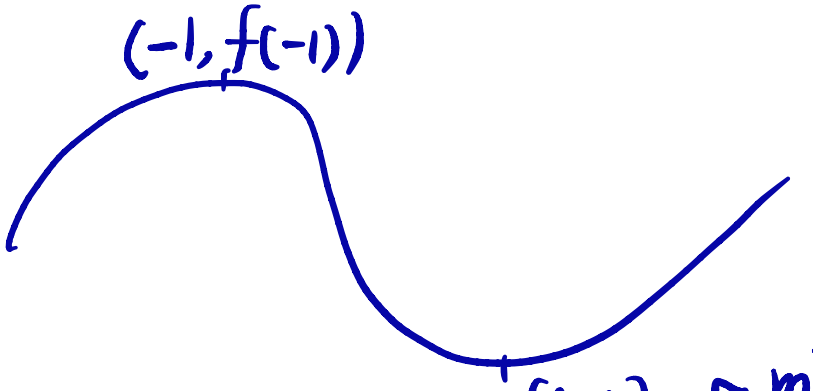
而 $f'(x)=0 \rightarrow x^2-2x-3=0$

$1 \quad \times \quad +1$

$1 \quad \quad -3$

$\rightarrow (x+1)(x-3)=0$

$\rightarrow x=-1$ 或 $x=3$



$\rightarrow \min. = f(3)$

$=9-9-9+6$

$=-3$ ※

已知 a、b 為實數，且 $f(x)=x^3+ax^2+bx+13$。若 $f'(-1)=1$ 且 $f'(0)=2$，則 $a+b=$？

(A) -1　(B) 0　(C) 3　(D) 4　【106*C22*】

Ans：(D)

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+13$$

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$$\begin{cases} f'(-1)=1 \\ f'(0)=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3-2a+b=1 \\ b=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}$$

故 $a+b=2+2=4$ ※

若 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+3$ 的相對極大值為 a，相對極小值為 b，則 $a+b=$？

(A) $\frac{-27}{2}$　(B) $\frac{-3}{2}$　(C) $\frac{-1}{2}$　(D) $\frac{27}{2}$　【106*C23*】

Ans：(C)

$$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+3$$

$$f'(x)=3x^2-3x-6$$

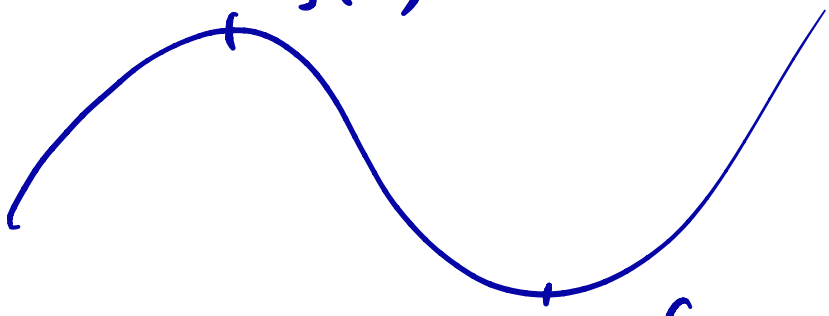
$$=3(x^2-x-2)$$

$$\begin{matrix} 1 & \times & \begin{matrix} +1 \\ -2 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$=3(x+1)(x-2)$$

$f'(x)=0 \rightarrow x=-1$ 或 $x=2$

$\text{max.}=f(-1)=-1-\frac{3}{2}+6+3=\frac{13}{2}$



$\text{min.}=f(2)=8-6-12+3=-7$

故 $a=\frac{13}{2}$，$b=-7 \rightarrow a+b=\frac{13}{2}+(-7)=-\frac{1}{2}$ ※

若 $f(x)=\begin{cases} x^2+2 \ , \ x<-1 \\ 2 \ , \ x=-1 \\ 6-3x^2 \ , \ x>-1 \end{cases}$，則 $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=$？

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3　【106*C25*】

Ans：(D)

$$\lim_{x\to -1^-}(x^2+2)=1+2=3$$

$$\lim_{x\to -1^+}(6-3x^2)=6-3=3$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x)=3 \rightarrow \lim_{x\to -1} f(x)=3 \ \#$$

已知 $f(x)=\dfrac{x(2x-1)(13x+2)^4}{\sqrt{27x+9}}$，求 $f(x)$ 在 $x=0$ 的導數 $f'(0)$ 之值。

(A) $-\dfrac{16}{3}$　(B) $-\dfrac{8}{3}$　(C) $-\dfrac{4}{3}$　(D) $-\dfrac{1}{3}$　【105*C22*】

Ans：(A)

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(2x-1)(13x+2)^4}{\sqrt{27x+9}}$$

$$=\frac{(-1)\times 16}{3}$$

$$=-\frac{16}{3}$$ ※

求 $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2-h}}{h}=$?

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 【104*C12*】

Ans：(D)

$$原式=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^{\frac{1}{2}}-(2-h)^{\frac{1}{2}}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cdot(2+h)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}(2-h)^{-\frac{1}{2}}\times(-1)}{1}$$

$$=\frac{1}{2}\times 2^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\times 2^{-\frac{1}{2}}$$

$$=2^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \#$$

已知 a、b 為實數，若過函數 $f(x)=ax^2+bx$ 圖形上一點 $P(1,5)$ 的切線斜率為 3，則 $f'(2)=$？

(A) -3　(B) -1　(C) 1　(D) 3　【104*C20*】

Ans：(B)

$f(1)=5 \rightarrow a+b=5$ —①

$f'(x)=2ax+b$

$f'(1)=3 \rightarrow 2a+b=3$ —②

解①,② 得 $a=-2,\ b=7$

故 $f'(x)=-4x+7$

$f'(2)=-8+7=-1$ ※

設直線 $8x+y=c$ 為拋物線 $y=4(x-1)^2$ 之切線，則 c 之值為何？

(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 7　【103*C10*】

Ans：(A)

$8x+y=c \rightarrow y=-8x+c \rightarrow$ 切線斜率 $=-8$

設切點 (x_0, y_0)

則 $8x_0+y_0=c$ —①

且 $y'=8(x-1) \rightarrow 8(x_0-1)=-8$ —②

由②得 $x_0-1=-1 \rightarrow x_0=0$

$\rightarrow y_0=4\times(0-1)^2=4$

切點為 $(0,4)$

代入 $8x+y=c$ 得 $c=4$ ※

設 $f(x)=\dfrac{x(x-1)(x-4)}{(x+1)(x+2)}$，則導數 $f'(0)$ 之值為何？

(A) -2　(B) -1　(C) 0　(D) 2　【103*C21*】

Ans：(D)

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)(x-4)}{(x+1)(x+2)}$$

$$=\frac{(-1)\times(-4)}{1\times 2}$$

$$=\frac{4}{2}$$

$$=2 \ \#$$

已知 a、b 為實數，$f(x)=(ax+b)^3$。若 $f(2)=1$ 且 $f'(2)=6$，則 $a-b=$？

(A) -2　(B) -1　(C) 3　(D) 5　【102*C16*】

Ans：(D)

$f(2)=(2a+b)^3=1 \rightarrow 2a+b=1$ —①

$f'(x)=3(ax+b)^2\cdot a$

$f'(2)=3a(2a+b)^2=6$ —②

以①代入②得 $3a=6 \rightarrow a=2$

以 $a=2$ 代回①得 $4+b=1 \rightarrow b=-3$

故 $a-b=2-(-3)=2+3=5$ ※

已知 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{5x^2-2x-3} & ,x\neq 1 \\ C & ,x=1 \end{cases}$。若 f 在 $x=1$ 處連續，則 $C=$？

(A) $\frac{1}{8}$　(B) $\frac{1}{4}$　(C) $\frac{1}{2}$　(D) 1　【102*C23*】

Ans：(B)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{5x^2-2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{10x-2}=\frac{2}{10-2}=\frac{1}{4}$$

故 $C=\frac{1}{4}$ ※

若函數 $f(x)$ 的導函數為 $f'(x)=x^2-6x$，則 $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{f(x)-f(6)}{x-6}$ 之值為何？

(A) 0　　(B) 1　　(C) 6　　(D) 不存在　　【101*C04*】

Ans：(A)

$$\lim_{x\to 6}\frac{f(x)-f(6)}{x-6}=f'(6)=6^2-6\times 6=0$$

設拋物線 $y=ax^2+bx$ 在 $x=1$ 處之切線方程式為 $y-2=4(x-1)$，則 $3a-2b$ 之值為何？

(A) 5　(B) 6　(C) 7　(D) 8　【101*C07*】

Ans：(B)

$y-2=4(x-1) \rightarrow \begin{cases} \text{切點}(1,2) \\ \text{切線斜率} f'(1)=4 \end{cases}$

$(1,2) \rightarrow a+b=2$ —①

$y'=2ax+b \xrightarrow{x=1} 2a+b=4$ —②

解①,②得 $a=2, b=0$

故 $3a-2b=6-0=6$ ※

若 $f(x)=(x-1)^5$，且 $f'(x)$ 為 $f(x)$ 的一階導函數，則 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f'(x)-f'(2)}{x-2}=$？

(A) 0　(B) 1　(C) 5　(D) 20　【100*C07*】

Ans：(D)

$$f(x)=(x-1)^5$$

$$f'(x)=5(x-1)^4$$

$$f''(x)=20(x-1)^3$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f'(x)-f'(2)}{x-2}=f''(2)=20\times(2-1)^3=20$$

已知函數 $f(x)=x^2-3x+5$ 與函數 $g(x)=|2x+1|$ 圖形相交於兩點，而其 x 坐標分別為 a 與 b，其中 $a<b$。若 $f'(x)$ 與 $g'(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值分別為 m_1 與 m_2，則 $m_1+m_2=$？

(A) -2　(B) -1　(C) 0　(D) 1　【99*C10*】

Ans：(D)

$$g(x)=|2x+1|=\begin{cases}2x+1, & x\geq -\frac{1}{2}\\ -2x-1, & x<-\frac{1}{2}\end{cases}$$

① $x^2-3x+5=2x+1$

$x^2-5x+4=0$

$\begin{matrix}1 & -1\\ 1 & -4\end{matrix}$

$(x-1)(x-4)=0 \rightarrow x=1$ 或 $x=4$

② $x^2-3x+5=-2x-1$

$x^2-x+6=0 \rightarrow D=(-1)^2-4\times1\times6<0$

$\rightarrow$ 無實根

$\therefore a=1,\ b=4$

$f'(x)=2x-3 \rightarrow f'(1)=-1,\ f'(4)=5$

$g(x)=2x+1 \rightarrow g'(x)=2 \rightarrow g'(1)=g'(4)=2$

故 $m_1=-1,\ m_2=2 \rightarrow m_1+m_2=1$ ※

關於函數的導函數，下列何者正確？

(A) $f(x)=(4x+5)(6x+7)$，則 $f'(x)=24$

(B) $f(x)=\sqrt[3]{x^7}+4x$，則 $f'(x)=\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}+4$

(C) $f(x)=(4x+5)^2$，則 $f'(x)=2(4x+5)$

(D) $f(x)=\frac{4x+4}{x+1}$，則 $f'(x)=4$ 【99*C15*】

Ans：(B)

(A) $f'(x)=4(6x+7)+(4x+5)\cdot 6$

$=48x+58$

(B) $f(x)=x^{\frac{7}{3}}+4x$

$f'(x)=\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}+4$ ※

(C) $f'(x)=2(4x+5)\cdot 4=8(4x+5)$

(D) $f(x)=\frac{4\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}=4 \rightarrow f'(x)=0$

若 $f(x)=\dfrac{x(x-1)(x-2)}{x-5}$，則 $f'(0)=$？

(A) $-\dfrac{2}{5}$ (B) $-\dfrac{1}{5}$ (C) $\dfrac{1}{5}$ (D) $\dfrac{2}{5}$ 【98*C22*】

Ans：(A)

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)(x-2)}{x-5}$$

$$=\frac{(-1)\cdot(-2)}{-5}$$

$$=-\frac{2}{5}$$

下列各曲線中，何者在 $x=1$ 處的切線斜率為 12？

(A) $y=(x^2+1)^3$　(B) $y=(2x+1)(4x^2-3)$　(C) $y=\dfrac{x-47}{x+1}$　(D) $y=(3x+1)^2$　【98*C23*】

Ans：(C)

(A) $y'=3(x^2+1)^2\cdot(2x) \xrightarrow{x=1} m=3\times4\times2$
$=24$

(B) $y'=2(4x^2-3)+(2x+1)\cdot(8x) \xrightarrow{x=1} m=2\times1+3\times8$
$=2+24$
$=26$

(C) $y'=\dfrac{1\cdot(x+1)-(x-47)\cdot1}{(x+1)^2} \xrightarrow{x=1} m=\dfrac{2-(-46)}{4}$
$=\dfrac{48}{4}$
$=12$ ※

(D) $y'=2(3x+1)\cdot3 \xrightarrow{x=1} m=2\times4\times3$
$=24$

ch15_積分

若 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+1\ ,\ 0\le x\le 1\\ x^2+x\ ,\ 1\le x\le 2\end{cases}$，則 $\int_0^2 f(x)dx=$？

(A) $\frac{9}{2}$　(B) $\frac{11}{2}$　(C) $\frac{13}{2}$　(D) $\frac{19}{2}$　【113*C14*】

Ans：(B)

原式 $=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$

$=\int_0^1 (x^{\frac{1}{2}}+1)dx+\int_1^2 (x^2+x)dx$

$=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+x\right)\Big|_0^1+\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^2$

$=\left(\frac{2}{3}+1\right)+\left(\frac{8}{3}+2\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{2}{3}+1+\frac{8}{3}+2-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$

$=\frac{11}{2}$ #

$\lim_{n\to\infty}(\frac{n^2-n}{n+1}-\frac{n^2+3n}{n+2})=$?

(A) 0　　(B) –1　　(C) –2　　(D) –3　　【113*C15*】

Ans：(D)

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-n)(n+2)-(n^2+3n)(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^3}+n^2-2n-\cancel{n^3}-4n^2-3n}{n^2+3n+2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n^2-5n}{1n^2+3n+2}$$

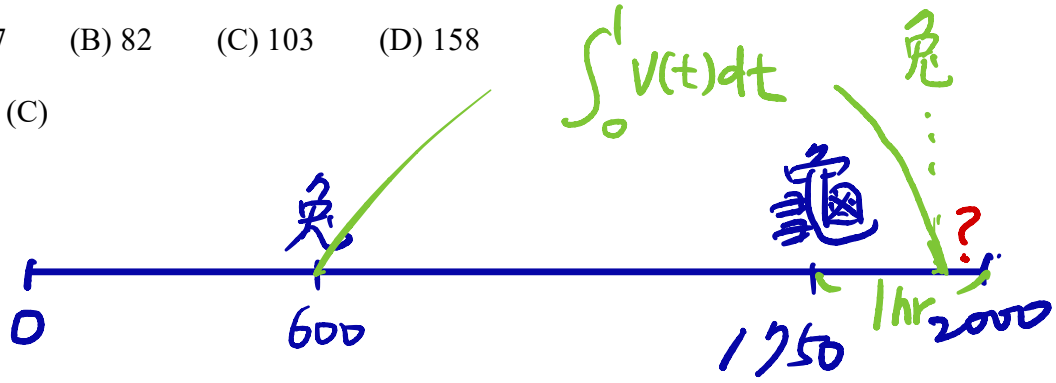
$$=\frac{-3}{1}$$

$$=-3 \ \#$$

兔子和烏龜在一條筆直的路上賽跑，起點到終點的距離為 2000 公尺，兔子和烏龜同時從起點出發，烏龜從頭到尾都是以 250 公尺/小時的速度前進。半小時過後，兔子已經到了離起點 600 公尺處，發現烏龜還在後面慢慢地爬，兔子認為比賽太輕鬆了，於是就地睡覺，結果兔子睡了 6.5 小時。當兔子醒來發現烏龜已經超過牠了，兔子立刻以 $v(t)=27t^2+52t+1262$ (公尺/小時)的速度去追趕，其中 $t\geq 0$。若烏龜先到達終點，則此時兔子離終點還有多少公尺？

(A) 57　(B) 82　(C) 103　(D) 158　【112*C14*】

Ans：(C)



$$\int_0^1 (27t^2+52t+1262)dt$$

$$=(9t^3+26t^2+1262t)\Big|_0^1$$

$$=9+26+1262$$

$$=1297\,(m)$$

$$\therefore\ 2000-600-1297=103\,(m)$$

#

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+8n-3}-\sqrt{n^2+2n+5})=?$

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3　　【112*C15*】

Ans：(D)

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+8n-3}-\sqrt{n^2+2n+5})(\sqrt{n^2+8n-3}+\sqrt{n^2+2n+5})}{\sqrt{n^2+8n-3}+\sqrt{n^2+2n+5}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+8n-3)-(n^2+2n+5)}{\sqrt{n^2+8n-3}+\sqrt{n^2+2n+5}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6n-8}{\sqrt{n^2+8n-3}+\sqrt{n^2+2n+5}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6-\frac{8}{n}}{\sqrt{1+\frac{8}{n}-\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}}$$

$$=\frac{6}{1+1}$$

$$=\frac{6}{2}$$

$$=3 \ \#$$

不定積分 $\int \frac{x+3}{2\sqrt{x}}dx = ?$

(A) $\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}x^{\frac{-1}{2}}+C$　(B) $\frac{\frac{x^3}{2}+3x}{x^{\frac{3}{2}}}+C$　(C) $\frac{\frac{x^2}{2}+3x}{\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}}+C$　(D) $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}+C$　【111*C18*】

Ans：(D)

原式 $= \frac{1}{2}\int (x^{\frac{1}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}})dx$

$= \frac{1}{2}(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+6x^{\frac{1}{2}})+C$

$= \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}+C$ ※

小明計畫由基隆沿國道一號開車南下高雄渡假。早上 8:00 經過中興隧道 0 公里處的起點，經紀錄儀錶板上車速變化，在 8:00 開始後，時間 t (小時) 的速度函數為 $v(t)=-1.5t^2+6t+90$ (公里/小時)。若依此速度變化，則 11:00 時小明應該最接近哪一個服務區？

(A) 泰安服務區(158 公里處)　　(B)西螺服務區(229 公里處)

(C)新營服務區(284 公里處)　　(D)仁德服務區(335 公里處)　　【111*C20*】

Ans：(C)

$$\int_0^3 (-1.5t^2+6t+90)\,dt$$

$$=\left(-0.5t^3+3t^2+90t\right)\Big|_0^3$$

$$=-\frac{27}{2}+27+270$$

$$=283.5\ (\text{km}) \longrightarrow \text{選(C)}$$

$\int_1^4 (x+\frac{1}{\sqrt{x}})(\sqrt{x}-\frac{1}{x})dx = ?$

(A) $\frac{57}{5}$ (B) $\frac{77}{5}$ (C) $\frac{87}{5}$ (D) $\frac{107}{5}$ 【110*C23*】

Ans：(A)

原式 $= \int_1^4 (x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{3}{2}})dx$

$= \left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^4$

$= \left(\frac{64}{5}+1\right) - \left(\frac{2}{5}+2\right)$

$= \frac{64}{5}+1-\frac{2}{5}-2$

$= \frac{57}{5}$ #

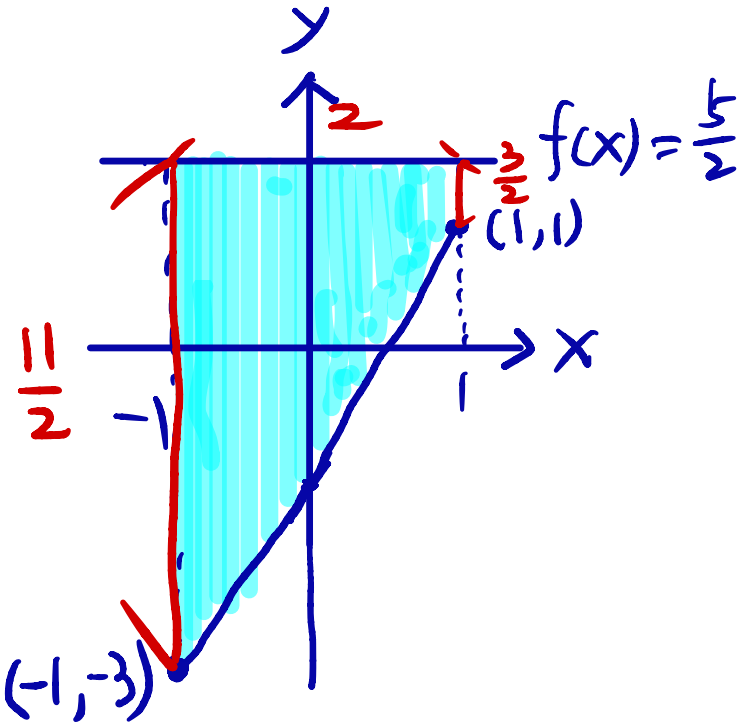
設 $g(x)=2x-1$，已知在閉區間$[-1,1]$上 $f(x)\geq 0$ 且 $\int_{-1}^{1} f(x)dx=5$，則此兩曲線 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 在閉區間$[-1,1]$所圍成區域的面積為何？

(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 7　【109*C25*】

Ans：(D)

依題意可設 $f(x)=\frac{5}{2}$ (滿足 $\int_{-1}^{1}\frac{5}{2}dx=\frac{5}{2}x\Big|_{-1}^{1}=5$)

作如下圖



所求 $=\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}+\frac{11}{2}\right)\times 2=7$ ※

已知 $F(x)=\frac{d}{dx}[\int_1^x (t^2+1)dt]$，則 $F(1)=$？

(A) -1　(B) 0　(C) 1　(D) 2　【108*C14*】

Ans：(D)

$$F(x)=\frac{d}{dx}\int_1^x (t^2+1)dt = x^2+1$$

$$F(1)=1^2+1=2 \ ※$$

計算 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})=$?

(A) $\frac{3}{2}$　(B) 1　(C) $\frac{1}{2}$　(D) $\frac{1}{8}$　【108*C21*】

Ans：(A)

$$\because \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}k\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}1+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\frac{1}{n}\times n+\frac{1}{n^2}\times\frac{1}{2}\times n\times(n+1)$$

$$=1+\frac{n+1}{2n}$$

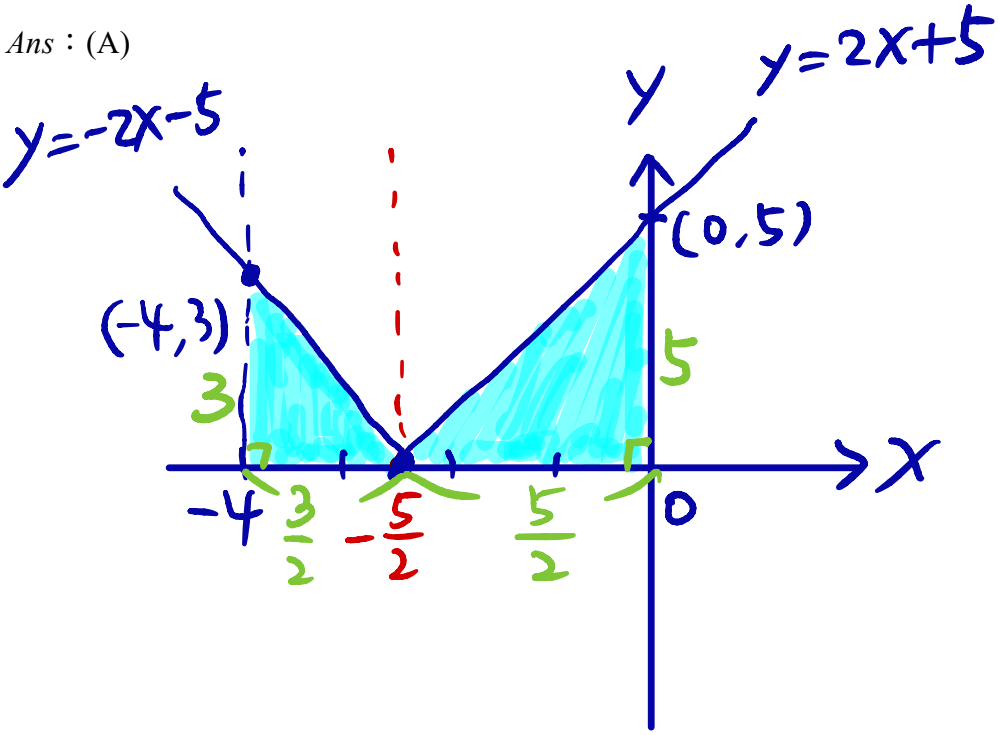
$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2n}$$

$$\therefore \text{原式}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2n}\right)=\frac{3}{2}\ \#$$

$\int_{-4}^{0}|2x+5|\,dx = ?$

(A) $\frac{17}{2}$ (B) 8 (C) $\frac{17}{4}$ (D) 4 【107*C16*】

Ans：(A)



$$\int_{-4}^{0}|2x+5|\,dx = \frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times 3 + \frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times 5$$

$$= \frac{9}{4} + \frac{25}{4}$$

$$= \frac{34}{4}$$

$$= \frac{17}{2}$$

$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (4x-1)^3\,dx = ?$

(A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{1}{12}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$ 【107*C19*】

Ans：(A)

令 $u = 4x - 1$ （x：$\frac{1}{4} \to \frac{1}{2}$，$u$：$0 \to 1$） $\to du = 4\,dx \to dx = \frac{1}{4}du$

則原式 $= \int_0^1 u^3 \cdot \frac{1}{4}du$

$= \frac{1}{16}u^4 \Big|_0^1$

$= \frac{1}{16}$ ※

設 $f(x)$ 為多項式函數，若 $\int_1^3 f(x)dx=1$、$\int_2^5 f(x)dx=4$ 且 $\int_2^3 f(x)dx=2$，則 $\int_1^5 f(x)dx=$？

(A) 1　(B) 3　(C) 5　(D) 7　【106*C24*】

Ans：(B)

$$\int_1^5 f(x)dx=\int_1^3 f(x)dx+\int_3^2 f(x)dx+\int_2^5 f(x)dx$$

$$=\int_1^3 f(x)dx-\int_2^3 f(x)dx+\int_2^5 f(x)dx$$

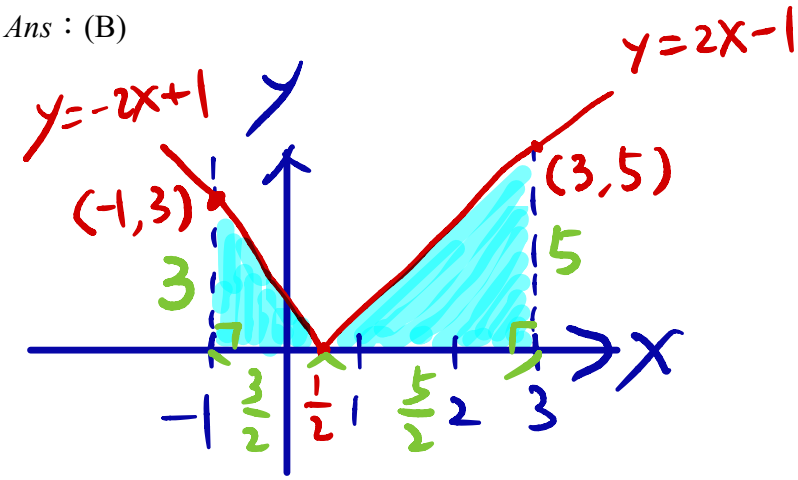
$$=1-2+4$$

$$=3$$

試求定積分 $\int_{-1}^{3}|2x-1|dx$ 之值。

(A) $\frac{15}{2}$　(B) $\frac{17}{2}$　(C) $\frac{19}{2}$　(D) $\frac{21}{2}$　【105*C23*】

Ans：(B)



$$\int_{-1}^{3}|2x-1|dx=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times3+\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times5$$

$$=\frac{9}{4}+\frac{25}{4}$$

$$=\frac{34}{4}$$

$$=\frac{17}{2}$$

※

試求 $\lim_{n\to\infty}(\frac{2n^2+1}{n}-\frac{2n^2+n+2}{n+2})$ 之值。

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3　【105*C24*】

Ans：(D)

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n^2+1)(n+2)-(2n^2+n+2)n}{n(n+2)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{2n^3}+4n^2+n+2-\cancel{2n^3}-n^2-2n}{n^2+2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+2}{1n^2+2n}$$

$$=\frac{3}{1}$$

$$=3 \#$$

設 $f(x)=x^3+3x^2$、$g(x)=4$，則兩函數 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 之圖形所圍成的封閉區域面積為何？

(A) $\frac{11}{4}$　(B) $\frac{27}{4}$　(C) $\frac{91}{4}$　(D) $\frac{221}{4}$　【105*C*25】

Ans：(B)

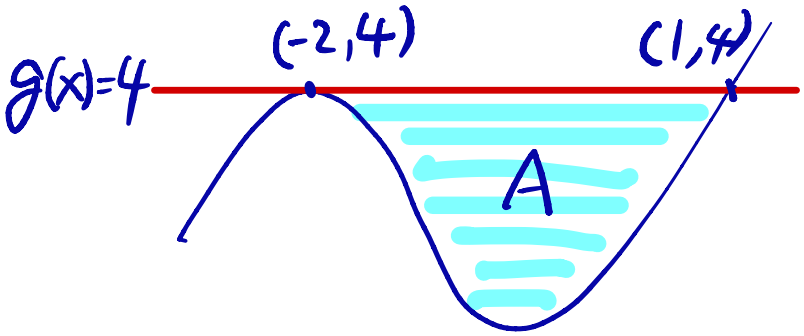
$f(x)=x^3+3x^2$

$f'(x)=3x^2+6x$

$=3x(x+2)$

$f'(x)=0 \rightarrow x=0$ 或 $x=-2$

$f(-2)=-8+12=4$



$$\begin{array}{r|l} 1+3+0-4 & 1 \\ +1\ \ +4+4 & \\ \hline 1+4\ \ +4 & +0 \end{array}$$

$x^2+4x+4=(x+2)^2$

解 $x^3+3x^2=4 \rightarrow x^3+3x^2-4=0$

$\rightarrow (x+2)^2(x-1)=0$

$f(1)=1+3=4$

$$A=\int_{-2}^{1}[4-(x^3+3x^2)]dx=\left(-\frac{1}{4}x^4-x^3+4x\right)\Big|_{-2}^{1}$$

$$=\left(-\frac{1}{4}-1+4\right)-(-4+8-8)$$

$$=-\frac{1}{4}-1+4+4=\frac{27}{4}$$ ※

求 $\int_{-3}^{3}(1-2x)(1+2x)dx=$ ？

(A) –66　　(B) –33　　(C) 33　　(D) 66　　【104*C13*】

Ans：(A)

原式 $=\int_{-3}^{3}(1-4x^2)dx$

$=\left(x-\frac{4}{3}x^3\right)\Big|_{-3}^{3}$

$=(3-36)-(-3+36)$

$=3-36+3-36$

$=-66$ #

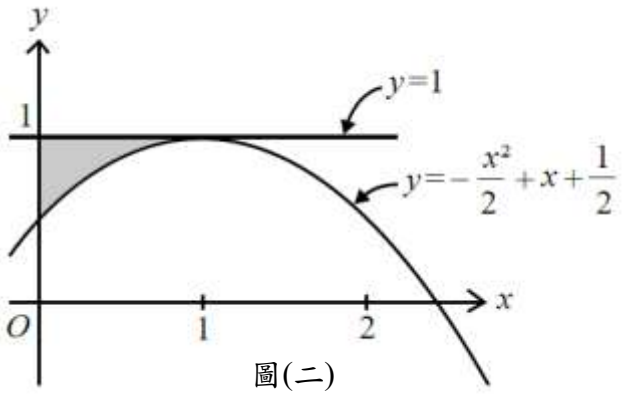
由 $y=-\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}$，$y=1$和 $x=0$ 所圍成的區域，如圖(二)陰影部分，則此區域面積可由下列何式求得？

(A) $\int_0^1(-\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{2})dx$

(B) $\int_0^1(\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{2})dx$

(C) $\int_0^1(-\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2})dx$

(D) $\int_0^1(\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2})dx$



圖(二)

【104*C21*】

Ans：(D)

$$\int_0^1\left[1-\left(-\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\right)\right]dx$$

$$=\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}\right)dx \quad \#$$

設 $f(x)=2x^2-3$，$g(x)=3-x^2$，則定積分 $\int_{-3}^{3}[f(x)-g(x)]dx$ 之值為何？

(A) 0　(B) 18　(C) 42　(D) 54　【103*C03*】

Ans：(B)

$$原式=\int_{-3}^{3}[(2x^2-3)-(3-x^2)]dx$$

$$=\int_{-3}^{3}(3x^2-6)dx$$

$$=(x^3-6x)\Big|_{-3}^{3}$$

$$=(27-18)-(-27+18)$$

$$=9-(-9)$$

$$=9+9$$

$$=18 \ \#$$

求 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3})dx=$ ？

(A) $\frac{97}{36}$ (B) $\frac{49}{18}$ (C) $\frac{17}{6}$ (D) $\frac{26}{9}$ 【102*C05*】

Ans：(D)

$$原式=\left(x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}x^3\right)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\left(\frac{3}{2}+\frac{9}{16}+\frac{3}{8}\right)-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{16}-\frac{1}{72}\right)$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{9}{16}+\frac{3}{8}+\frac{1}{2}-\frac{1}{16}+\frac{1}{72}$$

$$=\frac{26}{9}$$

已知 $y=f(x)$ 與 $x-2y=0$ 相交於 $(2,1)$、$(6,3)$ 兩點，如圖(三)。若陰影部分的面積為 $\frac{16}{3}$ 且 $\int_0^2 f(x)dx=-\frac{13}{3}$，則 $\int_0^6 f(x)dx=$？

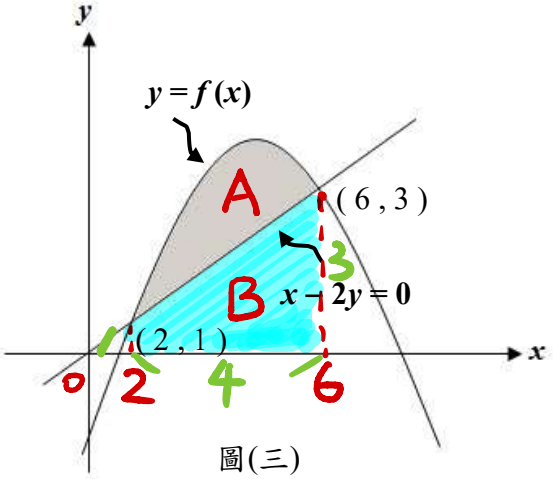
(A) 7

(B) 8

(C) 9

(D) 10

Ans：(C)



圖(三)

【102*C21*】

$$\int_0^6 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^6 f(x)dx$$

$$=-\frac{13}{3}+A+B$$

$$=-\frac{13}{3}+\frac{16}{3}+\frac{1}{2}\times(1+3)\times4$$

$$=-\frac{13}{3}+\frac{16}{3}+8$$

$$=9 \ \#$$

若函數 $f(x)$ 的導函數為 $f'(x)=3x^2+6x$ 且 $f(1)=3$，則 $\int_0^2 f(x)dx$ 之值為何？

(A) 10　(B) 12　(C) 14　(D) 20　【101*C19*】

Ans：(A)

$f'(x)=3x^2+6x$

$f(x)=x^3+3x^2+C$

$f(1)=3 \rightarrow 1+3+C=3 \rightarrow C=-1$

$\therefore f(x)=x^3+3x^2-1$

故原式 $=\int_0^2 (x^3+3x^2-1)dx$

$=\left(\frac{1}{4}x^4+x^3-x\right)\Big|_0^2$

$=4+8-2$

$=10$ #

若無窮等比級數 $(0.4)+(0.4)^2+(0.4)^3+\cdots+(0.4)^n+\cdots$ 的和為 a，無窮等比級數

$(0.2)+(0.2)^2+(0.2)^3+\cdots+(0.2)^n+\cdots$ 的和為 b，則 $\frac{a}{b}=$？

(A) $\frac{4}{3}$　(B) 2　(C) $\frac{8}{3}$　(D) 4　【100*C05*】

Ans：(C)

$$a=\frac{0.4}{1-0.4}=\frac{0.4}{0.6}=\frac{2}{3}$$

$$b=\frac{0.2}{1-0.2}=\frac{0.2}{0.8}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{4}}=\frac{2\times4}{3\times1}=\frac{8}{3}$$ ※

設 $f(x)=\sqrt{2x-1}$，且 $f''(x)$ 為 $f(x)$ 的二階導函數，則 $\int_1^5 f''(x)dx=$？

(A) $-\frac{2}{3}$　(B) $-\frac{1}{3}$　(C) $\frac{1}{3}$　(D) $\frac{2}{3}$　【100*C19*】

Ans：(A)

$$f(x)=(2x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(2x-1)^{-\frac{1}{2}}\times 2=(2x-1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\int_1^5 f''(x)dx=f'(x)\Big|_1^5$$

$$=f'(5)-f'(1)$$

$$=9^{-\frac{1}{2}}-1^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}-1$$

$$=-\frac{2}{3}$$

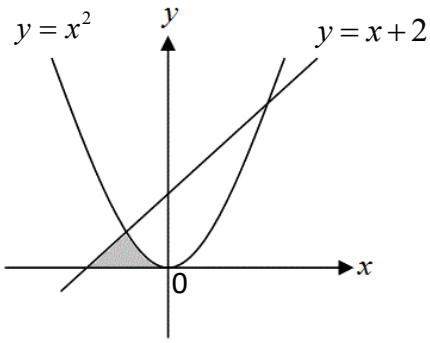
求陰影部份之面積為何？

(A) $\frac{2}{3}$

(B) $\frac{5}{6}$

(C) 1

(D) $\frac{4}{3}$



【100*C20*】

Ans：(B)

解 $x^2=x+2 \rightarrow x^2-x-2=0$

$+1$

-2

$\rightarrow (x+1)(x-2)=0$

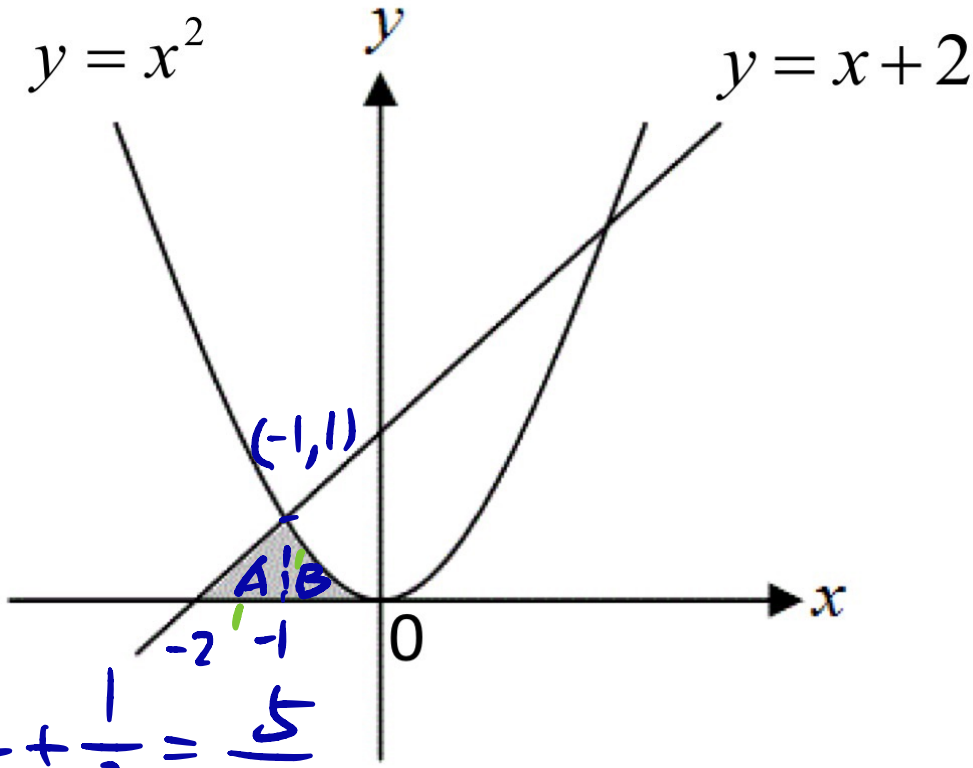
$\rightarrow x=-1$ or $x=2$

$A=\frac{1}{2}\times|x|=\frac{1}{2}$

$B=\int_{-1}^{0}x^2dx$

$=\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{0}$

$=\frac{1}{3}$



故 $A+B=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ #

關於下列各極限，何者正確？

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-2^n}{5^n}=1$ (B) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{100n+9}{n^2+5n-1}=0$ (C) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{0.01n}{5n-1}=0$ (D) $\lim\limits_{n\to\infty}n-\sqrt{n^2-1}=1$

Ans：(B) 【*99C16*】

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]=0-0=0$

(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{100n+9}{n^2+5n-1}=0$ ※

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{0.01n}{5n-1}=\dfrac{0.01}{5}=\dfrac{1}{500}$

(D) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-\sqrt{n^2-1})(n+\sqrt{n^2-1})}{n+\sqrt{n^2-1}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-(n^2-1)}{n+\sqrt{n^2+1}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}$

$=0$

無窮級數 $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^5}+\cdots+\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k+1}}+\cdots=$?

(A) $\frac{41}{24}$ (B) $\frac{59}{24}$ (C) $\frac{5}{2}$ (D) $\frac{7}{2}$ 【99*C19*】

Ans：(A)

$$原式=\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^5}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{3}{8}$$

$$=\frac{32+9}{24}$$

$$=\frac{41}{24}$$

#

已知 $\int_a^b f(x)dx=6$，$\int_a^b g(x)dx=12$，$\int_a^b h(x)dx=4$，且 $\int_a^b (mf(x)+ng(x))dx=13$，

$\int_a^b (mg(x)-nh(x))dx=5$，則 $6m+8n=$？

(A) 6　(B) 8　(C) 10　(D) 12　【98*C24*】

Ans：(C)

$m\int_a^b f(x)dx+n\int_a^b g(x)dx=13 \rightarrow 6m+12n=13$ —①

$m\int_a^b g(x)dx-n\int_a^b h(x)dx=5 \rightarrow 12m-4n=5$ —②

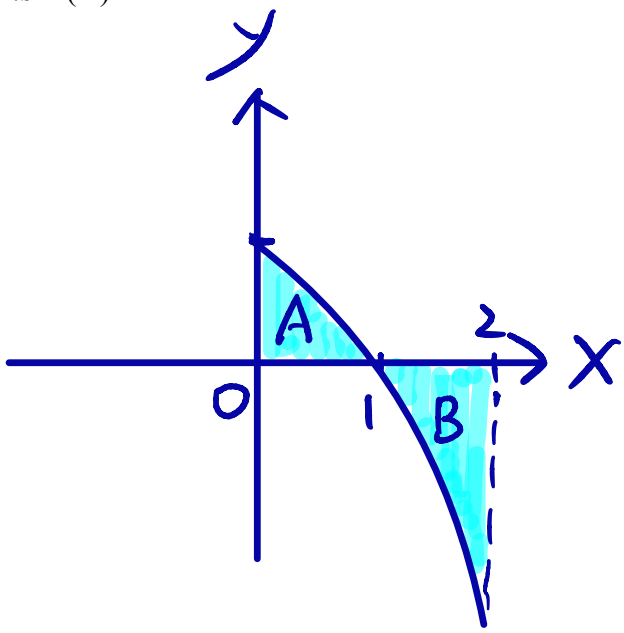
解①，②得 $m=\frac{2}{3}$，$n=\frac{3}{4}$

故 $6m+8n=4+6=10$ ※

函數 $f(x)=1-x^2$ 的圖形與 x 軸在區間[0 , 2]所圍區域面積為何？

(A) $-\frac{2}{3}$　(B) $\frac{2}{3}$　(C) $\frac{4}{3}$　(D) 2　【98*C*25】

Ans：(D)



$$A=\int_0^1(1-x^2)\,dx=\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$B=\int_1^2[0-(1-x^2)]\,dx$$

$$=\int_1^2(x^2-1)\,dx$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)\Big|_1^2$$

$$=\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

故 $A+B=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$ ※