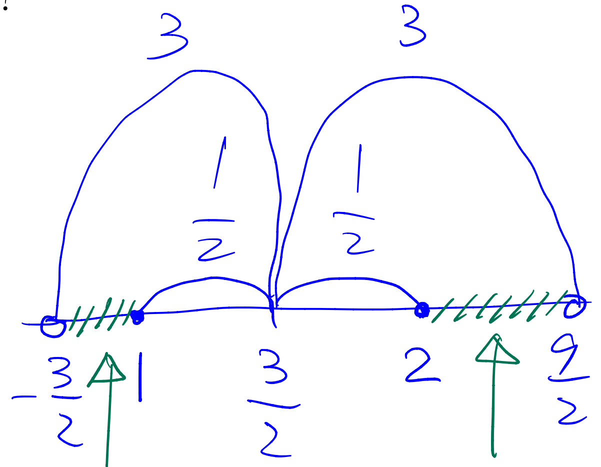
統測數C總複習_練習題163題

1. 不等式$1 \le |2x-3| < 6$的整數解的個數為何？

(A) 5 **(B) 6** (C) 7 (D) 8 。

$$1 \le |2x-3| < 6$$

$$\frac{1}{2} \le \left|x-\frac{3}{2}\right| < 3 \rightarrow$$



$-\frac{3}{2} < x \le 1$ 或 $2 \le x < \frac{9}{2}$ ※

✩整數解有$-1, 0, 1, 2, 3, 4$共6個

[另解] ① $|2x-3| \ge 1 \rightarrow 2x-3 \le -1$ 或 $2x-3 \ge 1$

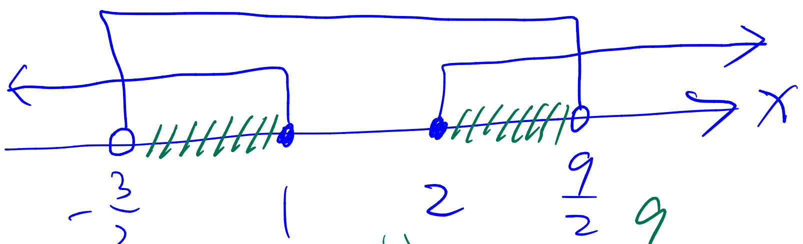
$\rightarrow 2x \le 2$ 或 $2x \ge 4$

$\rightarrow x \le 1$ 或 $x \ge 2$

② $|2x-3| < 6 \rightarrow -6 < 2x-3 < 6$

$\rightarrow -3 < 2x < 9$

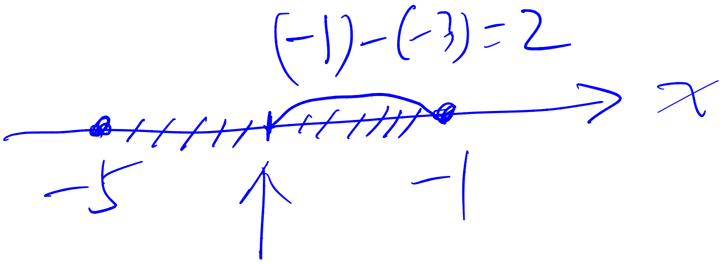
$\rightarrow -\frac{3}{2} < x < \frac{9}{2}$



$-\frac{3}{2} < x \le 1$ 或 $2 \le x < \frac{9}{2}$ ※

2. 若不等式 $|ax+b| \le 1$ 之解為 $-5 \le x \le -1$ 且 $a>0$，則 $a+b=$ ？

(A) 2　(B) $\frac{3}{2}$　(C) 1　(D) $\frac{1}{2}$ 。



$$\frac{(-5)+(-1)}{2} = -3$$

$$|x-(-3)| \le 2$$

$$|x+3| \le 2$$

$$\left|\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right| \le 1 \rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{3}{2} \end{cases}$$

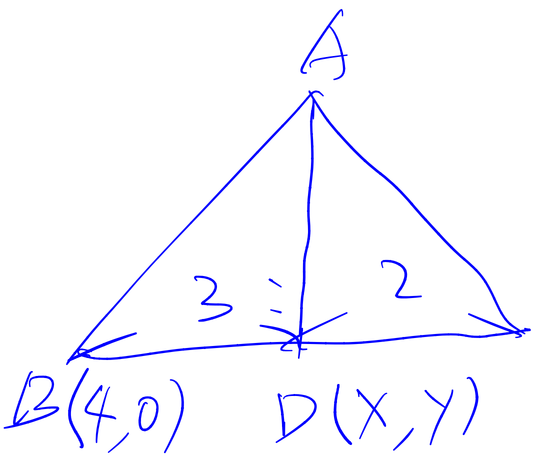
故 $a+b = \frac{1}{2}+\frac{3}{2} = 2$ #

3. 設$\triangle ABC$中，$A(1,3)$、$B(4,0)$、$C(3,5)$，若$\angle A$的內角平分線交$\overline{BC}$於D點，則D點坐標為？ **(A)**$\left(\frac{17}{5},3\right)$　(B)$\left(\frac{16}{5},3\right)$　(C)$\left(\frac{17}{5},2\right)$　(D)$\left(\frac{16}{5},2\right)$。

$$\overline{AB}=\sqrt{(4-1)^2+(0-3)^2}=3\sqrt{2}$$

$$\overline{AC}=\sqrt{(3-1)^2+(5-3)^2}=2\sqrt{2}$$

$$\overline{AB}:\overline{AC}=3\sqrt{2}:2\sqrt{2}=3:2$$



C(3,5)

$$\overline{BD}:\overline{CD}=3:2$$

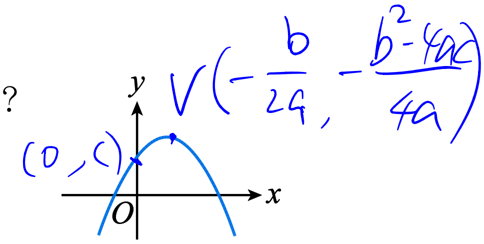
$$x=\frac{2\times 4+3\times 3}{3+2}=\frac{8+9}{5}=\frac{17}{5}$$

$$y=\frac{2\times 0+3\times 5}{3+2}=\frac{15}{5}=3$$

$$\therefore D\left(\frac{17}{5},3\right)$$ #

4. 若二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形如右，則下列敘述何者錯誤？

(A) $a<0$ **(B)** $b<0$ (C) $c>0$ (D) $b^2-4ac>0$ 。



(A) 開口向下 $\to a<0$

(B) $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)\to(+,+)$

$-\frac{b}{2a}>0$ 且 $a<0\to b>0$

(C) $(0,c)$ 在原點上方 $\to c>0$

(D) 圖形和 x 軸有 2 交點

$b^2-4ac>0$

5. 設二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$，若 $f(0)=-1$ 且 $f(x)$ 在 $x=-1$ 時有最小值 -3，則

$f(1)=$ ？ **(A)** 5　(B) 6　(C) 7　(D) 8 。

$\because f(x)$ 在 $x=-1$ 時有 min. $=-3$

$\therefore$ 設 $f(x)=a(x+1)^2-3$

$f(0)=-1 \rightarrow a-3=-1 \rightarrow a=2$

故 $f(x)=2(x+1)^2-3$

$f(1)=2\times 2^2-3$

$=2\times 4-3$

$=8-3$

$=5$ ※

6. 二次函數 $y=-x^2-2x+3$ 的頂點為 A 點，和 x 軸交於 B 、 C 兩點，則 $\triangle ABC$ 面積為？

(A) 6 (B) 7 **(C)** 8 (D) 9 。

$$y=-(x^2+2x+1)+3+1$$

$$=-(x+1)^2+4 \rightarrow A(-1,4)$$

$$y=0 \rightarrow -x^2-2x+3=0$$

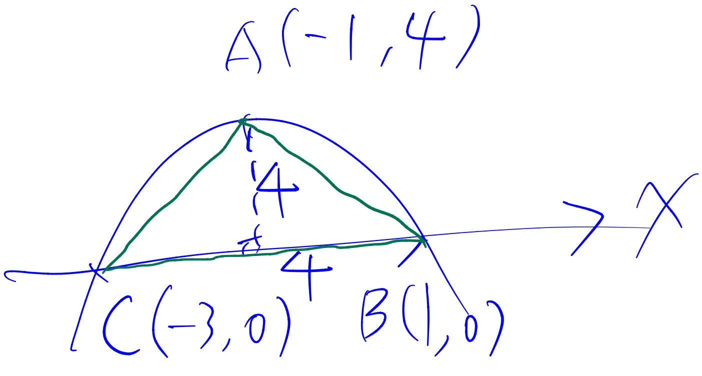
$$\rightarrow x^2+2x-3=0$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & & -1 \\ & \times & \\ 1 & & +3 \end{array}$$

$$\rightarrow (x-1)(x+3)=0$$

$\rightarrow x=1$ 或 $x=-3$

$$\rightarrow B(1,0),\ C(-3,0)$$



$$\triangle=\frac{1}{2}\times4\times4=8$$

#

7. 設 P 點在 y 軸上，$A(1,2)$、$B(4,4)$，則 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 的最小值為？

(A) 17　**(B)** 19　(C) 21　(D) 23。

設 $P(0,t)$

$$\begin{aligned}\overline{PA}^2+\overline{PB}^2 &= (0-1)^2+(t-2)^2+(0-4)^2+(t-4)^2 \\ &= 1+t^2-4t+4+16+t^2-8t+16 \\ &= 2t^2-12t+37 \\ &= 2(t^2-6t+9)+37-18 \\ &= 2(t-3)^2+19\end{aligned}$$

$t=3$ 時有 min. $=19$ ※

8. 不等式 $5x-4<x^2<2x+3$ 之解為？

(A) $-1<x<3$ (B) $x<1$ 或 $x>4$ (C) $x<3$ 或 $x>4$ **(D)** $-1<x<1$ 。

① $5x-4<x^2 \rightarrow x^2-5x+4>0$

$$\begin{matrix} 1 & & -1 \\ & \times & \\ 1 & & -4 \end{matrix}$$

$\rightarrow (x-1)(x-4)>0$

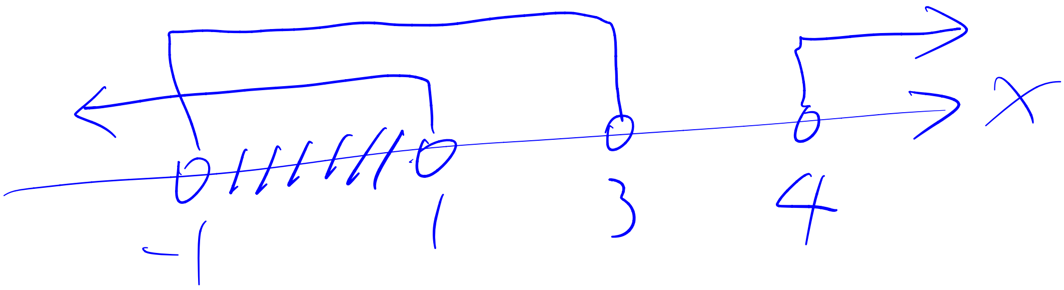
$\rightarrow x<1$ 或 $x>4$

② $x^2<2x+3 \rightarrow x^2-2x-3<0$

$$\begin{matrix} 1 & & +1 \\ & \times & \\ 1 & & -3 \end{matrix}$$

$\rightarrow (x+1)(x-3)<0$

$\rightarrow -1<x<3$



$-1<x<1$ #

9. 不等式$\frac{2x+1}{x-1}-1<0$之解為？(A) $x<2$　(B) $x>-2$　**(C)** $-2<x<1$　(D) $x<-2$ 或 $x>1$。

$$\frac{2x+1}{x-1}-1<0 \rightarrow \frac{2x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x-1}<0$$

$$\rightarrow \frac{x+2}{x-1}<0$$

$$\rightarrow (x+2)(x-1)<0$$

$$\rightarrow -2<x<1$$

#

10. k 為實數，如果點 $P\left(\frac{k+1}{3k+1}, \frac{2k+1}{k-2}\right)$ 在第二象限內，下列何者正確？ $(-,+)$

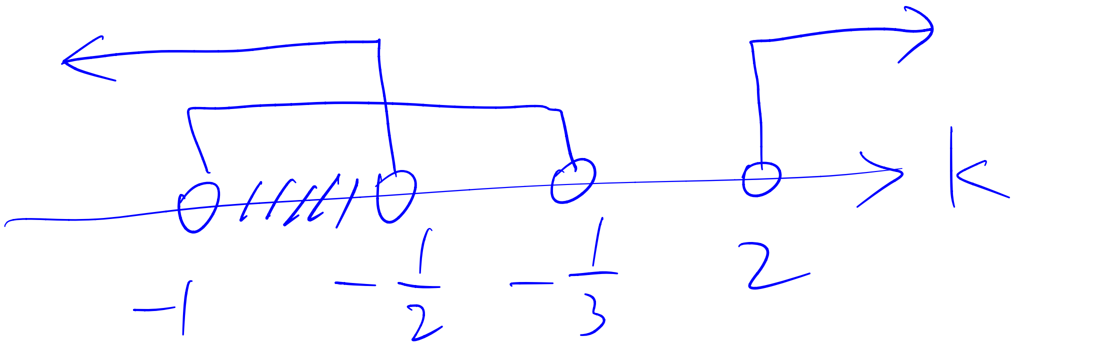
(A) $-\frac{1}{2}<k<-\frac{1}{3}$ **(B)** $-1<k<-\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}<k<2$ (D) $-1<k<2$ 。

① $\frac{k+1}{3k+1}<0 \rightarrow (k+1)(3k+1)<0$

$\rightarrow -1<k<-\frac{1}{3}$

② $\frac{2k+1}{k-2}>0 \rightarrow (2k+1)(k-2)>0$

$\rightarrow k<-\frac{1}{2}$ 或 $k>2$



$-1<k<-\frac{1}{2}$

#

11. 若一圓心角為θ的扇形，其周長的度量等於其面積度量的 2 倍，則其半徑為？

(A) $\frac{\theta+2}{\theta}$ (B) $\frac{\theta-2}{\theta}$ (C) $\frac{\theta}{\theta+2}$ (D) $\frac{\theta}{\theta-2}$。

設半徑為 r

則扇形周長 $= r\theta+2r = r(\theta+2)$

扇形面積 $= \frac{1}{2}r^2\theta$

故 $\cancel{r}(\theta+2) = \frac{1}{\cancel{2}}r^{\cancel{2}}\theta \times \cancel{2}$

得 $r = \frac{\theta+2}{\theta}$ #

12. 若θ是第二象限角，則$\dfrac{\theta}{2}$是第幾象限角？

(A)一或二　**(B)**一或三　(C)二或三　(D)二或四。

直接舉例，列出同界角：

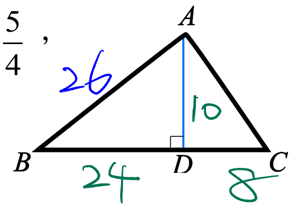
例：$\theta = 120^\circ, 480^\circ, 840^\circ, 1200^\circ, \ldots$

$\dfrac{\theta}{2} = 60^\circ, 240^\circ, 420^\circ, 600^\circ, \ldots$

$420^\circ \to 60^\circ$　$600^\circ \to 240^\circ$

60°：第一象限　　240°：第三象限

13. 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AD} \perp \overline{BC}$，若 $\overline{AB} = 26$、$\sin B = \dfrac{5}{13}$、$\tan C = \dfrac{5}{4}$，



則 $\overline{BC} =$ ？(A) 30 **(B)** 32 (C) 34 (D) 36。

$$\overline{AD} = 26 \times \sin B = 26 \times \frac{5}{13} = 10$$

$$\overline{BD} = 26 \times \cos B = 26 \times \frac{12}{13} = 24$$

$$\tan C = \frac{10}{\overline{CD}} = \frac{5}{4} \rightarrow \overline{CD} = 8$$

$$\therefore \overline{BC} = 24 + 8 = 32$$

※

14. 試求$\left(\sin 5^\circ - \csc 5^\circ\right)^2 + \left(\cos 5^\circ - \sec 5^\circ\right)^2 - \left(\tan 5^\circ\right)^2 - \left(\cot 5^\circ\right)^2 =$?

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2 。

原式 $= \sin^2 5^\circ - 2 + \csc^2 5^\circ + \cos^2 5^\circ - 2 + \sec^2 5^\circ - \tan^2 5^\circ - \cot^2 5^\circ$

$= (\sin^2 5^\circ + \cos^2 5^\circ) + (\csc^2 5^\circ - \cot^2 5^\circ) + (\sec^2 5^\circ - \tan^2 5^\circ) - 4$

$= 1 + 1 + 1 - 4$

$= -1$ #

15. 若 $\sin\theta = \cot\theta$ 且 θ 為銳角，則 $\cos\theta =$？

(A) $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (B) $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ (C) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (D) $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 。

$$\sin\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\sin^2\theta = \cos\theta$$

$$1-\cos^2\theta = \cos\theta$$

$$\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$$

$$\cos\theta = \frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$\because -1 \le \cos\theta \le 1$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

#

16. 設θ為銳角，若$\sin\theta=\cos^2\theta$，則$\dfrac{1}{1-\sin\theta}+\dfrac{1}{1+\sin\theta}=$？

(A) $2\sin^2\theta$　(B) $2\cos^2\theta$　(C) $2\sec\theta$　**(D)** $2\csc\theta$。

$$\frac{1}{1-\sin\theta}+\frac{1}{1+\sin\theta}=\frac{1+\sin\theta+1-\sin\theta}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$$

$$=\frac{2}{1-\sin^2\theta}$$

$$=\frac{2}{\cos^2\theta}$$

$$=\frac{2}{\sin\theta}$$

$$=2\csc\theta$$ ※

17. $\cot\frac{11}{4}\pi+\tan\frac{45}{4}\pi+\cos\frac{14}{3}\pi+\sin\left(-\frac{29}{6}\pi\right)=$? **(A)** -1 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1 。

$$\cot\frac{11\pi}{4}=\cot\left(2\pi+\frac{3\pi}{4}\right)=\cot\frac{3\pi}{4}=\cot\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cot\frac{\pi}{4}=-1$$

$$\tan\frac{45}{4}\pi=\tan\frac{5\pi}{4}=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$$

$$\cos\frac{14}{3}\pi=\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(-\frac{29}{6}\pi\right)=\sin\frac{7\pi}{6}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$

故原式 $=(-1)+1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

※

18. 化簡 $\dfrac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\tan\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)}{\sin(\pi+\theta)\cos\left(\frac{7}{2}\pi-\theta\right)\cot(\pi+\theta)}=$? (A) 1 (B) -1 (C) $-\tan\theta$ **(D)** $\cot\theta$ 。

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$$

$$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{2}-\theta\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\sin\theta$$

$$\cot(\pi+\theta)=\cot\theta$$

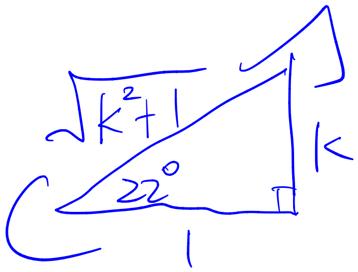
$$\text{原式}=\frac{(-\cos\theta)\times\cancel{(-\sin\theta)}\times\cancel{\cot\theta}}{(-\sin\theta)\times\cancel{(-\sin\theta)}\times\cancel{\cot\theta}}$$

$$=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$=\cot\theta$$

※

19. 已知 $\tan 22° = k$ ，則 $\sin 2002° = ?$ (A) $\dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}}$ (B) $\dfrac{-1}{\sqrt{k^2+1}}$ (C) $\dfrac{k}{k^2+1}$ **(D)** $\dfrac{-k}{\sqrt{k^2+1}}$ 。



$$\begin{array}{r} 2002 \\ -1800 \\ \hline 202 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sin 2002° &= \sin 202° \\ &= \sin(180° + 22°) \\ &= -\sin 22° \\ &= \frac{-k}{\sqrt{k^2+1}} \quad \# \end{aligned}$$

20. 設$180° < \theta < 360°$且$3\tan^2\theta = 5\sec\theta - 1$，則$\theta =$？

(A) $210°$　(B) $240°$　**(C)** $300°$　(D) $330°$。

$3(\sec^2\theta - 1) = 5\sec\theta - 1$

$3\sec^2\theta - 5\sec\theta - 2 = 0$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \times & -2 \\ 3 & & +1 \end{array}$$

$(\sec\theta - 2)(3\sec\theta + 1) = 0 \rightarrow \sec\theta = 2$ 或 $\sec\theta = -\frac{1}{3}$ (不合)

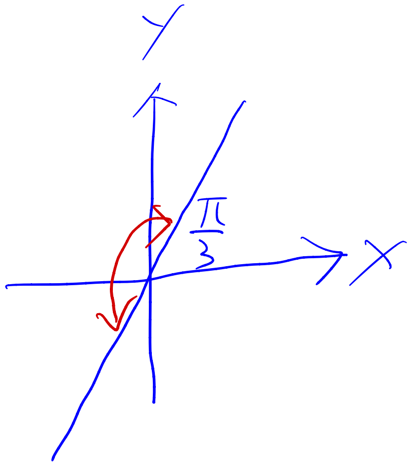
故 $\sec\theta = 2 \rightarrow \theta = 360° - 60° = 300°$ #

21. 設 $0 \le x \le \pi$，若 $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-1$ 的最大值為 M，最小值為 m，則 $M+m=$？

(A) 0 (B) $-\dfrac{1}{2}$ (C) -2 **(D)** $-\dfrac{5}{2}$。

$\because 0 \le x \le \pi$

$\therefore \dfrac{\pi}{3} \le x+\dfrac{\pi}{3} \le \pi+\dfrac{\pi}{3}$ $\rightarrow$



在這範圍內

當 $x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$ 時，$\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ 最大

當 $x+\dfrac{\pi}{3}=\pi$ 時，$\cos\pi=-1$ 最小

故 $M=\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{1}{2}$

$m=-1-1=-2$

$M+m=\left(-\dfrac{1}{2}\right)+(-2)=-\dfrac{5}{2}$ #

22. 設 $f(x)=-2\sin^2 x-4\cos x+7$，$\frac{1}{3}\pi \le x \le \pi$，若 $f(x)$ 的最大值為 M，最小值為 m，則 $(M,m)=$？ (A)$(11,3)$ **(B)**$\left(11,\frac{7}{2}\right)$ (C)$(9,3)$ (D)$\left(9,\frac{7}{2}\right)$。

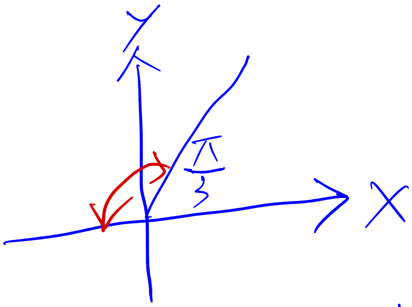
$$f(x)=-2(1-\cos^2 x)-4\cos x+7$$

$$=2\cos^2 x-4\cos x+5$$

$$=2(\cos^2 x-2\cos x+1)+5-2$$

$$=2(\cos x-1)^2+3$$

$\because \frac{\pi}{3} \le x \le \pi \rightarrow$



$\therefore$ 在這範圍內 $-1 \le \cos x \le \frac{1}{2}$

$$-2 \le \cos x-1 \le -\frac{1}{2}$$

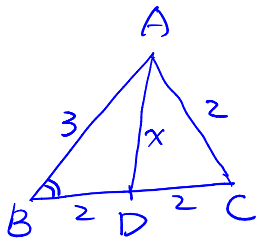
$$\frac{1}{4} \le (\cos x-1)^2 \le 4$$

$$\frac{1}{2} \le 2(\cos x-1)^2 \le 8$$

$$\frac{7}{2} \le 2(\cos x-1)^2+3 \le 11 \rightarrow (M,m)=\left(11,\frac{7}{2}\right)$$

23. $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=3$、$\overline{BC}=4$、$\overline{AC}=2$，設 $\overline{BC}$ 的中點為 D，則 $\overline{AD}=$？

(A) $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (C) $\dfrac{5}{2}$ (D) 5 。



$$\cos B = \frac{3^2+2^2-x^2}{\cancel{2}\times\cancel{3}\times\cancel{2}} = \frac{3^2+4^2-2^2}{\cancel{2}\times\cancel{3}\times\cancel{4}_{2}}$$

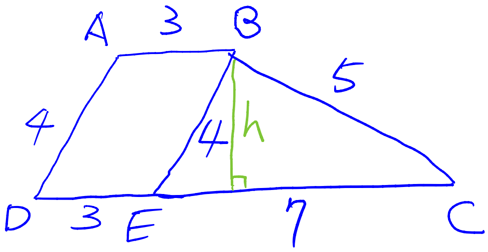
$$13-x^2=\frac{21}{2}$$

$$26-2x^2=21$$

$$x^2=\frac{5}{2} \rightarrow x=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2} \text{ ※}$$

24. 梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AB} // \overline{CD}$，若 $\overline{AB}=3$、$\overline{BC}=5$、$\overline{CD}=10$、$\overline{AD}=4$，則此梯形面積為？

(A) $7\sqrt{6}$　(B) $\dfrac{50\sqrt{6}}{7}$　**(C)** $\dfrac{52\sqrt{6}}{7}$　(D) $8\sqrt{6}$ 。



$\triangle BCE$ 中

$s=\frac{1}{2}(4+5+7)=8$

$\triangle BCE$ 面積 $=\sqrt{8\times4\times3\times1}=4\sqrt{6}$

$\frac{1}{2}\times7\times h=4\sqrt{6}\rightarrow h=\frac{8\sqrt{6}}{7}$

所求 $=\frac{1}{2}(3+10)\times\frac{8\sqrt{6}}{7}=\frac{52\sqrt{6}}{7}$ ※

25. $\triangle ABC$ 三內角 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 之對應邊長分別為 a、b、c，若 $a=2\sqrt{3}$、$b=2$、$\angle A=120°$，則 $c=$？ (A)$\sqrt{3}$ **(B)**2 (C)3 (D)$2\sqrt{3}$。

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin 120°}=\frac{2}{\sin B} \rightarrow \sin B=\frac{2}{2\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \angle B=30°$$

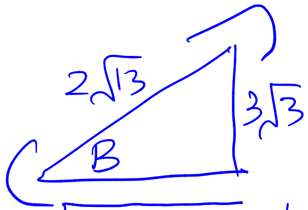
$$\rightarrow \angle C=180°-120°-30°=30°$$

$$\angle B=\angle C \rightarrow c=b=2$$ #

26. $\triangle ABC$ 中，若 $\overset{a}{\overline{BC}}=\sqrt{13}$，$\overset{b}{\overline{AC}}=3$，$\angle A=60°$，則 $\cos C$ 之值為何？

(A)$-\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$　(B)$-\dfrac{1}{\sqrt{13}}$　**(C)**$\dfrac{1}{\sqrt{13}}$　(D)$\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$。

$$\frac{\sqrt{13}}{\sin 60°}=\frac{3}{\sin B} \rightarrow \sin B=\frac{3}{\sqrt{13}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$$



$$\sqrt{52-27}=5$$

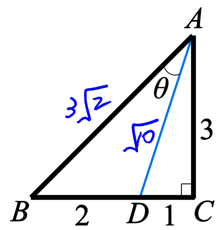
$$\cos B=\frac{5}{2\sqrt{13}}$$

$(\because b<a \therefore \cos B>0)$

$\angle B$必為銳角

$$\begin{aligned}\cos C&=\cos[180°-(A+B)]\\&=-\cos(A+B)\\&=-(\cos A\cos B-\sin A\sin B)\\&=-\left(\frac{1}{2}\times\frac{5}{2\sqrt{13}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}\right)\\&=-\frac{-4}{4\sqrt{13}}\\&=\frac{1}{\sqrt{13}}\ \#\end{aligned}$$

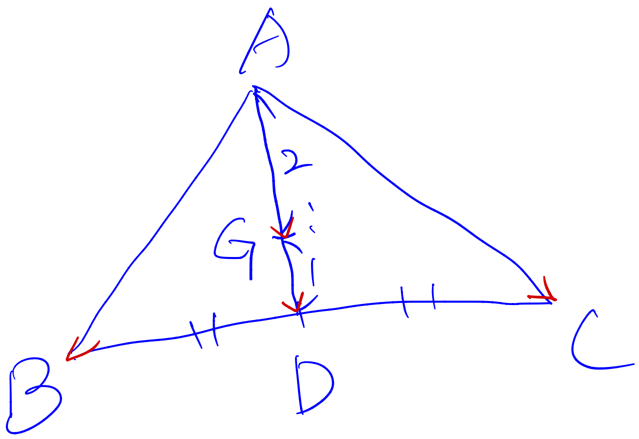
27. 已知$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，D在$\overline{BC}$線段上，且線段長$\overline{BD}=2$，$\overline{DC}=1$，$\overline{AC}=3$，如圖所示。令$\angle BAD=\theta$，求$\cos\theta=$？



(A)$\dfrac{1}{\sqrt{10}}$　(B)$\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　(C)$\dfrac{2}{\sqrt{10}}$　**(D)**$\dfrac{2}{\sqrt{5}}$。

$$\cos\theta=\cos(\angle BAC-\angle DAC)$$
$$=\cos\angle BAC\times\cos\angle DAC+\sin\angle BAC\times\sin\angle DAC$$
$$=\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\sqrt{2}}\times\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{10}}$$
$$=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$ ※

28. $\triangle ABC$ 中，G 為重心，若 $\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則 $x+y=$？ (A)$\frac{1}{3}$ **(B)**$\frac{2}{3}$ (C)1 (D)$\frac{4}{3}$。



$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\therefore x=\frac{1}{3},\ y=\frac{1}{3}\rightarrow x+y=\frac{2}{3}$$ #

29. 設 $\overrightarrow{a}=(-3,-2)$、$\overrightarrow{b}=(1,-1)$，若 $3\left(\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}\right)-2\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{x}\right)=5\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$，則 $\overrightarrow{x}=$？

(A)$(1,5)$ **(B)**$(2,8)$ (C)$(3,7)$ (D)$(4,9)$。

$$3\vec{a}-6\vec{b}-2\vec{a}-2\vec{x}=5\vec{a}+2\vec{b}$$

$$2\vec{x}=-4\vec{a}-8\vec{b}$$

$$\vec{x}=-2\vec{a}-4\vec{b}$$

$$=(6,4)-(4,-4)$$

$$=(2,8)$$

#

30. 設 $A(2,-5)$、$B(-1,1)$、$C(4,k)$ 為平面上三點，若此三點共線，則 $k=$？

(A) -9 (B) -10 (C) -11 (D) -12。

三點共線 $\rightarrow m_{\overleftrightarrow{AB}}=m_{\overleftrightarrow{AC}}$

$$\frac{1-(-5)}{-1-2}=\frac{k-(-5)}{4-2}$$

$$\frac{6}{-3}=\frac{k+5}{2}\rightarrow k+5=-4$$

$$\rightarrow k=-9$$

※

31. 設 $\overrightarrow{a}=(2,4)$、$\overrightarrow{b}=(1,-1)$，$t$ 為實數，欲使 $\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|$ 有最小值，則 $t=$？

(A) 1　(B) 2　(C) -1　(D) -2。

$$\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}=(2,4)+t(1,-1)$$
$$=(2,4)+(t,-t)$$
$$=(2+t,4-t)$$

$$\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{(2+t)^2+(4-t)^2}$$
$$=\sqrt{4+4t+t^2+16-8t+t^2}$$
$$=\sqrt{2t^2-4t+20}$$
$$=\sqrt{2(t^2-2t+1)+20-2}$$
$$=\sqrt{2(t-1)^2+18}$$

$t=1$ 時有 min. $=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

32. 設 $\overrightarrow{u}=(1,1)$、$\overrightarrow{v}=\left(\sqrt{3}-1,\sqrt{3}+1\right)$，則此二向量之夾角為？

(A) $\frac{1}{6}\pi$　(B) $\frac{1}{4}\pi$　(C) $\frac{1}{3}\pi$　(D) $\frac{1}{2}\pi$ 。

$$|\overrightarrow{u}|=\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{v}|^2=(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2=4-2\sqrt{3}+4+2\sqrt{3}=8$$

$$|\overrightarrow{v}|=2\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+1=2\sqrt{3}$$

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\ \theta=30^\circ=\frac{1}{6}\pi$$

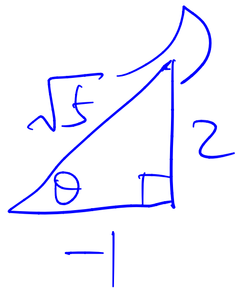
※

33. 二向量$\overrightarrow{a}=(3,-4)$、$\overrightarrow{b}=(1,2)$，且夾角為$\theta$，則$\sin\theta=$？

(A)$\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (B)$\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (C)$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (D)$\frac{3\sqrt{2}}{2}$。

$|\overrightarrow{a}|=5$, $|\overrightarrow{b}|=\sqrt{5}$, $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=3-8=-5$

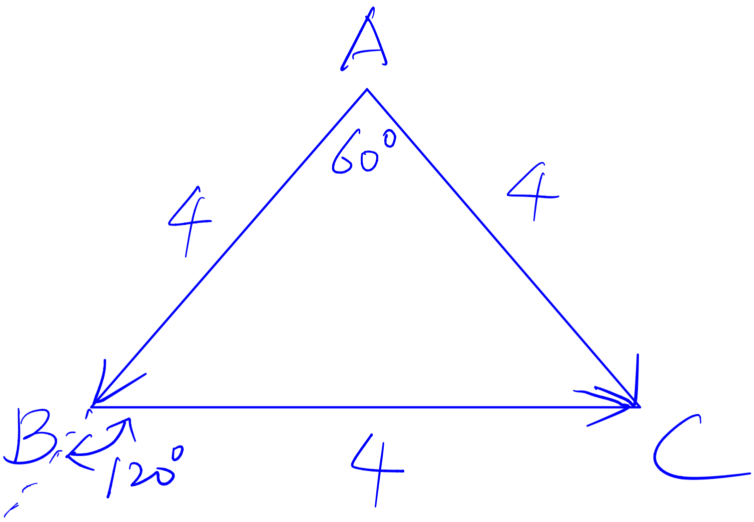
$\cos\theta=\frac{-5}{5\times\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}\rightarrow$



$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ #

34. 設正△ABC之邊長為4，則下列敘述何者正確？

(A) $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=-8$　(B) $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{BC}=8$　(C) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=8$　**(D)** $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|=4$。



(A) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\times4\times\cos60^\circ=16\times\frac{1}{2}=8$

(B) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\times4\times\cos120^\circ=16\times(-\frac{1}{2})=-8$

(C) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+2(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$

$=16+2\times8+16$

$=48$

$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$

(D) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}\rightarrow\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{CB}\right|=4$

#

35. 設 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 均為單位向量且夾角為 $\frac{1}{3}\pi$，若 $\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}$ 與 $m\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 互相垂直，則 $m=$？

(A) $-\frac{5}{3}$ **(B)** $-\frac{7}{5}$ (C) $\frac{7}{5}$ (D) $\frac{5}{3}$ 。

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$$(\vec{a}+3\vec{b})\perp(m\vec{a}+\vec{b}) \rightarrow (\vec{a}+3\vec{b})\cdot(m\vec{a}+\vec{b})=0$$

$$m|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+3m(\vec{b}\cdot\vec{a})+3|\vec{b}|^2=0$$

$$m+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}m+3=0$$

$$\frac{5}{2}m+\frac{7}{2}=0 \rightarrow m=-\frac{7}{5}$$ ※

36. 設 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 是平面上二向量，且 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$，$\left|\overrightarrow{a}\right|=2$、$\left|\overrightarrow{b}\right|=1$，$t\in\mathbb{R}$，若 $\overrightarrow{a}+\left(t^2+3\right)\overrightarrow{b}$ 與 $-\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$ 互相垂直，則 $t=$？ (A) -1 (B) 0 **(C)** 1 (D) 2。

$$\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}\rightarrow\underline{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0}$$

$$\left[\overrightarrow{a}+(t^2+3)\overrightarrow{b}\right]\cdot\left(-\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}\right)=0$$

$$-\left|\overrightarrow{a}\right|^2-t\cancel{(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})}-(t^2+3)\cancel{(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})}+t(t^2+3)\left|\overrightarrow{b}\right|^2=0$$

$$-4+t(t^2+3)=0$$

$$t^3+3t-4=0$$

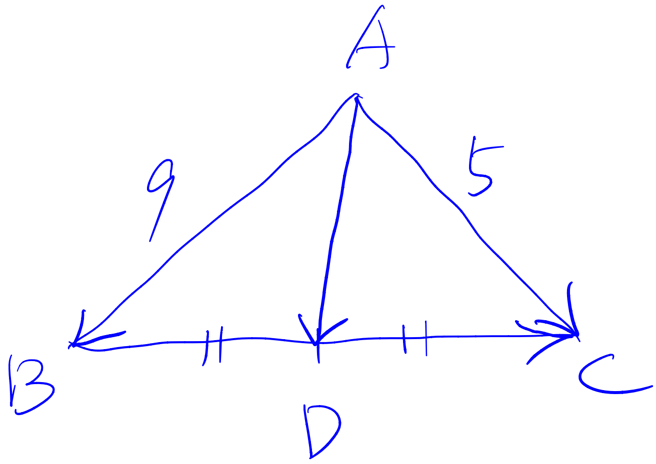
$$(t-1)\underbrace{(t^2+t+4)}_{\text{恆正}}=0$$

$$t=1 \quad \#$$

$$\begin{array}{r|l} & 1+1+4 \\ \hline 1-1 & 1+0+3-4 \\ & 1-1 \\ \hline & 1+3 \\ & 1-1 \\ \hline & 4-4 \\ & 4-4 \\ \hline & 0 \end{array}$$

37. 在$\triangle ABC$中，若D為線段$\overline{BC}$的中點，且$\overline{AB}=9$、$\overline{AC}=5$，則向量內積$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$？

(A) -28　(B) -14　(C) 14　(D) 28。



$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})$$

$$\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$$

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$$

$$=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2)$$

$$=\frac{1}{2}(5^2-9^2)$$

$$=\frac{1}{2}\times(-56)$$

$$=-28 \text{ ＃}$$

38. 已知$\overrightarrow{a}=(3,4)$、$\overrightarrow{b}=(-2,14)$，則以$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$為鄰邊的平行四邊形面積為？

(A) 50　(B) 34　(C) 25　(D) 17 。

$$\square = \left| \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 14 \end{vmatrix} \right|$$

$$= |42+8|$$

$$= 50 \quad \#$$

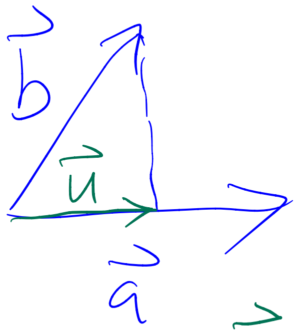
39. 已知 $\overrightarrow{a}=(3,4)$、$\overrightarrow{b}=(-2,14)$，則 $\overrightarrow{b}$ 在 $\overrightarrow{a}$ 上的正射影長為？

(A) 8　**(B)** 10　(C) 12　(D) 20 。

$$\overrightarrow{u}=\left(\frac{-6+56}{25}\right)\cdot(3,4)$$

$$=2(3,4)$$

$$=(6,8)$$



$$\overrightarrow{u}=\left(\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|^2}\right)\overrightarrow{a}$$

$$|\overrightarrow{u}|=\sqrt{6^2+8^2}=10$$ #

40. 設 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 為兩向量，$\overrightarrow{a}=(x,y)$，x、y 為實數，且 $\left|\overrightarrow{a}\right|=\sqrt{13}$、$\overrightarrow{b}=(3,-2)$，則 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 之內積的最大值為何？ (A) $\sqrt{13}$ (B) $\sqrt{65}$ **(C)** 13 (D) 65。

$$|\vec{a}|=\sqrt{13} \rightarrow |\vec{a}|^2=13 \rightarrow x^2+y^2=13$$

$$\vec{b}=(3,-2) \rightarrow |\vec{b}|^2=3^2+(-2)^2=13$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=3x-2y$$

由柯西不等式

$$(x^2+y^2)\left[3^2+(-2)^2\right] \geq (3x-2y)^2$$

$$13\times 13 \geq (3x-2y)^2$$

$$-13 \leq 3x-2y \leq 13 \quad \#$$

max. = 13

41. $P(x)=2x^4-6x^2-15x+3=ax(x-1)(x-2)(x-3)+bx(x-1)(x-2)+cx(x-1)+dx+e$，則下列何者正確？ (A) $a=3$ (B) $b=-19$ **(C)** $c=8$ (D) $d=12$ 。

$P(0)=3 \to e=3$

$P(1)=2-6-15+3=-16=d+3 \to d=-19$

$P(2)=32-24-30+3=-19=2c-38+3 \to c=8$

$P(3)=162-54-45+3=6b+48-57+3 \to b=12$

x^4項係數 $\to a=2$

42. 設 $f(x)=x^4-4x^3+3x^2+3x-1$，求 $f\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=$?

(A) $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (B) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (C) 1 (D) -1 。

$$x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$2x=1-\sqrt{5}$$

$$(2x-1)^2=(-\sqrt{5})^2$$

$$4x^2-4x+1=5$$

$$4x^2-4x-4=0$$

$$x^2-x-1=0$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & & & 1 & -3 & +1 \\
\hline
1-1-1 & 1 & -4 & +3 & +3 & -1 \\
 & 1 & -1 & -1 & & \\
\hline
 & & -3 & +4 & +3 & \\
 & & -3 & +3 & +3 & \\
\hline
 & & & 1 & +0 & -1 \\
 & & & 1 & -1 & -1 \\
\hline
 & & & & 1 & +0
\end{array}$$

$$f(x)=(x^2-x-1)(x^2-3x+1)+x$$

$$f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

43. 多項式 $f(x)$、$g(x)$，若 $f(x)$ 除以 x^2-1 的餘式為 $3x+2$，$g(x)$ 除以 x^2+2x-3 的餘式為 $5x+2$，則 $(x+3)f(x)+(5x^2+1)g(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為？

(A) 84 (B) 12 **(C)** 62 (D) 35。

$f(x)=(x^2-1)\cdot g_1(x)+3x+2 \rightarrow f(1)=5$

$g(x)=(x^2+2x-3)\cdot g_2(x)+5x+2 \rightarrow g(1)=7$

$(x+3)f(x)+(5x^2+1)\cdot g(x)$ 除以 $x-1$ 的

餘式 $=(1+3)\cdot f(1)+(5\times1^2+1)\times g(1)$

$=4\times5+6\times7$

$=20+42$

$=62$ ※

44. 已知$\deg f(x)=3$，若$f(x)$除以$x-1$、$x-2$、$x-3$均餘2，且$f(x)$除以$x-4$餘式為14，求$f(x)$除以$x+1$的餘式為？ **(A)** -46　(B) -48　(C) -50　(D) -52。

設 $f(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)+2$

則 $f(4)=a\times 3\times 2\times 1+2=14 \rightarrow a=2$

故 $f(x)=2(x-1)(x-2)(x-3)+2$

所求 $=f(-1)=2\times(-2)\times(-3)\times(-4)+2$

$=-48+2$

$=-46$ ※

45. 已知一元二次方程式的兩根之積為 -12，兩根之平方和為 25，且兩根之和為正數，

則其方程式為何？

(A) $x^2-x+12=0$ **(B)** $x^2-x-12=0$ (C) $x^2+x-12=0$ (D) $x^2+x+12=0$。

$\alpha\beta=-12$

$\alpha^2+\beta^2=25 \rightarrow (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=25$

$\rightarrow (\alpha+\beta)^2+24=25$

$\rightarrow (\alpha+\beta)^2=1$

$\rightarrow \alpha+\beta=1$ (兩根和為正數)

$\therefore x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

$\rightarrow x^2-x-12=0$ ※

46. 設 a、$b\in\mathbb{R}$，若方程式 $x^3-x^2+ax+b=0$ 有一複數根為 $1+i$，則下列何者正確？

(A) $a=-1$，$b=2$　(B) $a=1$，$b=2$　**(C)** $a=0$，$b=2$　(D) $a=2$，$b=2$。

∵ $x^3-x^2+ax+b=0$ 為實係數方程式

∴ 有一根為 $1+i$，必有另一根為 $1-i$

設 $\alpha=1+i$，$\beta=1-i$

則 $\begin{cases}\alpha+\beta=2\\ \alpha\beta=2\end{cases} \to x^2-2x+2=0$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1+1 \\
\hline
1-2+2 & 1-1+a+b \\
 & 1-2+2 \\
\hline
 & 1+(a-2)+b \\
 & 1-2+2 \\
\hline
 & a+(b-2)
\end{array}
$$

故 $a=0$，$b=2$

47. 方程式$(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-120=0$的解為實數者有幾個？

(A) 1 **(B)** 2 (C) 3 (D) 4 個。

$$[(x+2)(x+5)][(x+3)(x+4)]-120=0$$

$$[(x^2+7x)+10][(x^2+7x)+12]-120=0$$

$$(x^2+7x)^2+12(x^2+7x)+10(x^2+7x)=0$$

$$(x^2+7x)^2+22(x^2+7x)=0$$

$$(x^2+7x)(x^2+7x+22)=0$$

$$x(x+7)(x^2+7x+22)=0$$

$$\underline{x=0 \text{ 或 } x=-7} \text{ 或 } x=\frac{-7\pm\sqrt{39}i}{2}$$

2個實根

48. 設複數 z 的實部是1，$\frac{1}{z}$ 的虛部是 $\frac{1}{2}$，則複數 $z=$？

(A) $1-i$　(B) $1-2i$　(C) $1+i$　(D) $1+2i$ 。

設 $z=1+bi$, $b\in R$

則 $\frac{1}{z}=\frac{1}{1+bi}=\frac{1-bi}{1+b^2}$

$\frac{-b}{1+b^2}=\frac{1}{2} \to b^2+1=-2b \to b^2+2b+1=0$

$(b+1)^2=0 \to b=-1$

故 $z=1-i$ ※

49. 設α、β為$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}=0$之兩根，則以$\alpha+\beta$、$\alpha\beta$為兩根之一元二次方程式為？

(A) $x^2-13x-42=0$ **(B)** $x^2-13x+42=0$ (C) $x^2+11x-30=0$ (D) $x^2-11x-30=0$。

$(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)-(x-1)(x-2)=0$

$x^2-5x+6+x^2-4x+3-x^2+3x-2=0$

$x^2-6x+7=0$

$\begin{cases}\alpha+\beta=6\\ \alpha\beta=7\end{cases}$

以6, 7為兩根之方程式為

$(x-6)(x-7)=0$

$x^2-13x+42=0$ #

50. 化簡 $\sqrt{2-\sqrt{3}}=$？ (A) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (B) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ **(C)** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{2}$ 。

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{8-4\sqrt{3}}{4}}$$

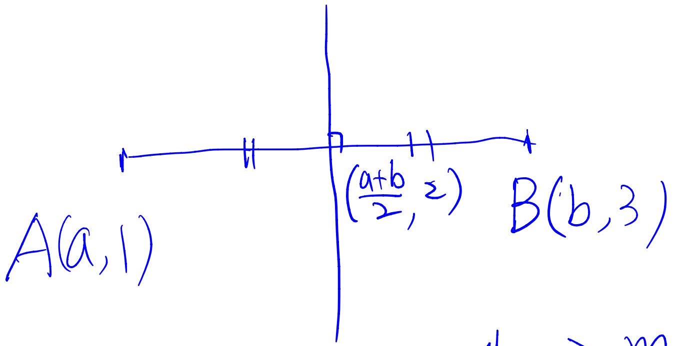
$$= \frac{\sqrt{8-2\sqrt{12}}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{(x+y)-2\sqrt{xy}} = \sqrt{x}-\sqrt{y}$$

$$(x>y>0)$$

51. 在坐標平面上，設 a 、b 為實數，若 A 、B 兩點的坐標分別為 $(a,1)$ 、$(b,3)$ ，且線段 $\overline{AB}$ 的垂直平分線為 $2x+y=4$ ，則 $2a+b=$ ？ **(A)** 1　(B) 2　(C) -1　(D) -2 。



$2x+y=4 \to m=-2 \to m_{\overline{AB}}=\frac{1}{2}$

$\frac{1-3}{a-b}=\frac{1}{2} \to a-b=-4$ —①

$\left(\frac{a+b}{2},2\right)$ 在 $2x+y=4$ 上

$a+b+2=4 \to a+b=2$ —②

解①，②得 $a=-1$，$b=3$

故 $2a+b=-2+3=1$ #

52. 已知$\triangle ABC$三頂點為$A(-1,3)$、$B(2,1)$、$C(-3,-1)$，若直線$\overleftrightarrow{AD}$平分$\triangle ABC$的面積，

則直線$\overleftrightarrow{AD}$之方程式為何？

(A) $3x+y=0$ (B) $3x-y+6=0$ (C) $6x-y+9=0$ **(D)** $6x+y+3=0$。

D為$\overline{BC}$之中點 $\rightarrow D\left(-\frac{1}{2},0\right)$

$$m_{\overleftrightarrow{AD}}=\frac{0-3}{-\frac{1}{2}+1}=\frac{-6}{-1+2}=-6$$

$$\therefore \overleftrightarrow{AD}: y-3=-6(x+1)$$

$$y-3=-6x-6$$

$$6x+y+3=0$$

※

53. 已知平面上兩點 $P(3,2)$、$Q(-1,0)$，且直線 L 的方程式為 $x+y-2=0$，若 $\overline{PQ}$ 與直線 L 交於 R，則 $\overline{PR}:\overline{RQ}=$？ (A) 2 : 3　(B) 2 : 1　**(C)** 1 : 1　(D) 1 : 2。

$$d(P,L)=\frac{|3+2-2|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$d(Q,L)=\frac{|-1+0-2|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\overline{PR}:\overline{RQ}=d(P,L):d(Q,L)$$

$$=1:1$$

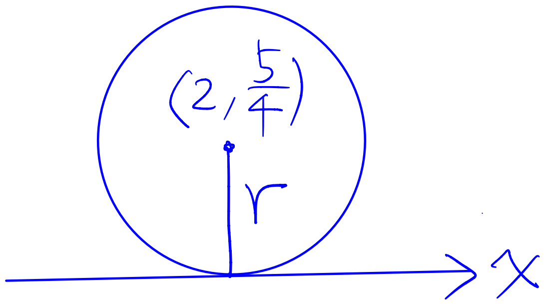
#

54. 圓 ：$2x^2+2y^2-8x-5y+k=0$ 與 x 軸相切，則 $k=$？

(A) 8　(B) -8　(C) $\frac{25}{8}$　(D) $-\frac{25}{8}$。

$x^2+y^2-4x-\frac{5}{2}y+\frac{k}{2}=0$

圓心 $\left(-\frac{-4}{2}, -\frac{-\frac{5}{2}}{2}\right)=\left(2,\frac{5}{4}\right)\to$ I



$r=\frac{5}{4}$

$x^2+y^2+dx+ey+f=0$

圓心 $\left(-\frac{d}{2},-\frac{e}{2}\right)$

半徑 $r=\frac{\sqrt{D}}{2}$

$D=d^2+e^2-4f$

$\frac{5}{\cancel{4}\;2}=\frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{(-4)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2-4\times\frac{k}{2}}$

$\cancel{\frac{25}{4}}=16+\cancel{\frac{25}{4}}-2k \to 2k=16 \to k=8$ #

55. 動點$P(x,y)$的參數方程式為$x=\sin t+\cos t-2$，$y=\sin t-\cos t+1$，t為實數，則動點P之軌跡方程式為？

(A)$(x+2)^2+(y-1)^2=2$　(B)$(x+2)^2+(y-1)^2=1$　(C)$(x-2)^2+(y+1)^2=0$　(D)$(x-2)^2+(y+1)^2=1$。

$$x+2=\sin t+\cos t$$

$$y-1=\sin t-\cos t$$

$$(x+2)^2+(y-1)^2=(\sin t+\cos t)^2+(\sin t-\cos t)^2$$

$$=1+\cancel{2\sin t\cos t}+1-\cancel{2\sin t\cos t}$$

$$=2$$

※

56. 已知直線 $L：3x+4y+k=0$，圓 $C：(x+2)^2+(y-3)^2=9$，若直線 L 和圓 C 有交點，

則 k 的範圍為？

(A) $-21<k<9$　**(B)** $-21\le k\le 9$　(C) $k>9$ 或 $k<-21$　(D) $k\ge 9$ 或 $k\le -21$。

$\boxed{圓}$ 心 $O(-2,3)$, $r=3$

$d(O,L)\le r$

$\frac{|-6+12+k|}{5}\le 3 \rightarrow |k+6|\le 15$

$\rightarrow -15\le k+6\le 15$

$\rightarrow -21\le k\le 9$

※

57. 若圓 $C: x^2+y^2+4x+ay+b=0$ 和直線 $L: 3x-y-1=0$ 相切於點 $P(1,2)$，則 $a-b=$？

(A) -9　(B) -8　(C) -7　(D) -6。

P在C上 $\rightarrow 1+4+4+2a+b=0$

$\rightarrow 2a+b=-9$ —①

$O\left(-\frac{4}{2},-\frac{a}{2}\right)=O\left(-2,-\frac{a}{2}\right)$

$m_{\overleftrightarrow{OP}}=\frac{-\frac{a}{2}-2}{-2-1}=\frac{-\frac{a}{2}-2}{-3}$

$m_L=3$

$\because \overleftrightarrow{OP}\perp L \quad \therefore m_{\overleftrightarrow{OP}}\times m_L=-1$

$\frac{-\frac{a}{2}-2}{-\cancel{3}}\times\cancel{3}=-1 \rightarrow -\frac{a}{2}-2=1$

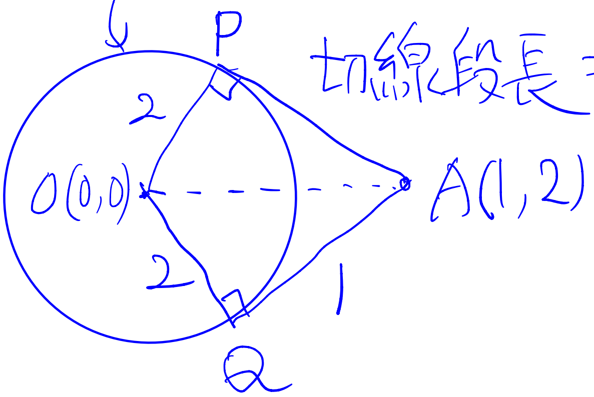
$\rightarrow a=-6$

$\xrightarrow{代入①} b=3$

故 $a-b=-6-3=-9$ ※

58. 過點 $A(1,2)$ 向圓 $x^2+y^2=4$ 作二切線，令二切點為 P 、 Q ，圓心 O ，則四邊形 $APOQ$ 的面積為？ (A) 8　(B) $2\sqrt{5}$　(C) 4　**(D)** 2 。

$x^2+y^2-4=0$



切線段長 $=\sqrt{1^2+2^2-4}=1$

所求 $=\left(\frac{1}{2}\times 2\times 1\right)\times 2=2$ ※

59. 已知二等差數列前 n 項和之比為 $(3n-1):(2n+4)$，則其第 5 項之比為？

(A) 1 : 1　**(B)** 13 : 11　(C) 29 : 24　(D) 4 : 5。

$$\frac{A_n}{B_n}=\frac{\cancel{\frac{n}{2}}[2a_1+(n-1)d_1]}{\cancel{\frac{n}{2}}[2b_1+(n-1)d_2]}=\frac{a_1+\left(\frac{n-1}{2}\right)d_1}{b_1+\left(\frac{n-1}{2}\right)d_2}$$

故得 $\dfrac{a_1+\left(\frac{n-1}{2}\right)d_1}{b_1+\left(\frac{n-1}{2}\right)d_2}=\dfrac{3n-1}{2n+4}$

所求 $=\dfrac{a_5}{b_5}=\dfrac{a_1+4d_1}{b_1+4d_2}$

即知取 $\dfrac{n-1}{2}=4 \rightarrow n=9$

故 $\dfrac{a_5}{b_5}=\dfrac{3\times9-1}{2\times9+4}=\dfrac{26}{22}=\dfrac{13}{11}$

60. 設101項之等差數列$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{101}$，其和為0，且$a_{61}=20$，則下列何者正確？

(A) $a_1>0$ (B) $a_{51}=10$ (C) $a_1+a_{101}>0$ **(D)** $a_2+a_{100}=0$ 。

$\because a_1+a_2+\cdots+a_{100}+a_{101}=101\cdot a_{51}$

等差中項

$\therefore a_{51}=0 \rightarrow a_2+a_{100}=2a_{51}=0$

61. 求$1^2+3^2+5^2+7^2+\cdots+39^2=$？ (A)10320 **(B)**10660 (C)11210 (D)12620。

$$原式=\sum_{k=1}^{20}(2k-1)^2$$

$$=\sum_{k=1}^{20}(4k^2-4k+1)$$

$$=4\cdot\sum_{k=1}^{20}k^2-4\cdot\sum_{k=1}^{20}k+\sum_{k=1}^{20}1$$

$$=4\times\frac{1}{\cancel{6}}\times\overset{10}{\cancel{20}}\times\overset{7}{\cancel{21}}\times41-4\times\frac{1}{\cancel{2}}\times\overset{10}{\cancel{20}}\times21+20\times1$$

$$=11480-840+20$$

$$=10660\ ※$$

62. 級數$1\times\left(1-\frac{1}{20}\right)+\left(1-\frac{1}{20}\right)\left(1-\frac{2}{20}\right)+\left(1-\frac{2}{20}\right)\left(1-\frac{3}{20}\right)+\cdots+\left(1-\frac{19}{20}\right)\left(1-\frac{20}{20}\right)$之值為？

(A) $\frac{861}{20}$ (B) $\frac{861}{400}$ **(C)** $\frac{133}{20}$ (D) $\frac{133}{400}$ 。

原式 $=\frac{1}{20^2}(20\times19+19\times18+18\times17+\cdots+1\times0)$

$=\frac{1}{400}\sum_{k=1}^{20}k(k-1)$

$=\frac{1}{400}\left(\sum_{k=1}^{20}k^2-\sum_{k=1}^{20}k\right)$

$=\frac{1}{400}\left(\frac{1}{\cancel{6}}\times\overset{10}{\cancel{20}}\times\overset{7}{\cancel{21}}\times41-\frac{1}{\cancel{2}}\times\overset{10}{\cancel{20}}\times21\right)$

$=\frac{1}{400}\times(2870-210)$

$=\frac{1}{\underset{20}{\cancel{400}}}\times\overset{133}{\cancel{2660}}$

$=\frac{133}{20}$ #

63. 設一等比級數的總和為635，若公比為2，末項為320，則首項為？

(A) 5　(B) 6　(C) 7　(D) 8 。

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1} = \frac{a_1 r^n - a_1}{r-1} = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}$$

$(\because a_n = a_1 r^{n-1})$

故 $635 = \dfrac{320 \times 2 - a_1}{2-1}$

$635 = 640 - a_1 \rightarrow a_1 = 5$

※

64. 若一等比數列前 3 項之和為160，前 6 項之和為180，則公比為？

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) 2 。

$$a+ar+ar^2=160$$

$$\underline{a+ar+ar^2}+\underline{ar^3+ar^4+ar^5}=180$$

$$160+r^3\times160=180$$

$$r^3=\frac{20}{160}=\frac{1}{8}\Rightarrow r=\frac{1}{2}$$

※

65. L 隊和 E 隊兩棒球隊舉行 7 場比賽，且不許和局，以先勝 4 場者為勝隊。

今已比賽 3 場，結果 E 隊一勝二敗，則往後的比賽共有 x 種情形能決定最後的勝隊，

其中 E 隊獲勝的情形有 y 種，則 $(x,y)=$？

(A) $(9,3)$ (B) $(9,4)$ **(C)** $(10,4)$ (D) $(10,5)$。

E 一勝二敗 即 L 二勝一敗

(1) L 勝：

① $L\boxed{L} \to 1$

② $\underbrace{EL}\boxed{L} \to 2! = 2$

③ $\underbrace{EEL}\boxed{L} \to \frac{3!}{2!} = 3$

(2) E 勝

① $EE\boxed{E} \to 1$

② $\underbrace{LEE}\boxed{E} \to \frac{3!}{2!} = 3$

$\therefore x = 1+2+3+1+3 = 10$

$y = 1+3 = 4$

故 $(x,y) = (10,4)$ ※

66. 3 男 3 女排成一列，下列各情形何者排列數最少？

(A)任意排　(B)3 女相鄰　(C)3 女均不相鄰　**(D)**男女相間。

(A) $6! = 720$

(B) $\boxed{女女女}$ 男男男

$4! \times 3! = 24 \times 6 = 144$

(C) ✓男✓男✓男✓

$3! \times C^4_3 \times 3! = 6 \times 4 \times 6 = 144$

(D) ① 女男女男女男

② 男女男女男女

$3! \times 3! \times 2 = 6 \times 6 \times 2 = 72$

#

67. 甲、乙、丙、丁、…等 8 人排成一列，若甲要排在乙、丙、丁前面，共有幾種排法？

(A) 6720 **(B)** 10080 (C) 13440 (D) 40320 。

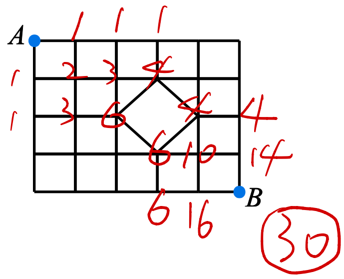
□□□□戊己庚辛

$$\frac{8!}{4!}\times 1\times 3!$$

$$=1680\times 6$$

$$=10080 \#$$

68. 如圖，在含有斜線的棋盤式街道中，由 A 到 B 走捷徑，共有幾種走法？



(A) 26　(B) 28　**(C)** 30　(D) 50 。

69. 5件相異的玩具分給甲、乙、丙3人，每人可重複得，則下列何者錯誤？

(A)任意分有243種分法　(B)甲恰得1件有80種分法　(C)甲至少1件有211種分法

(D)甲至少2件有141種分法。

(A) $3^5=243$ (玩具選人)

(B) $C^5_1\times2^4=5\times16=80$

(C) $3^5-2^5=243-32=211$

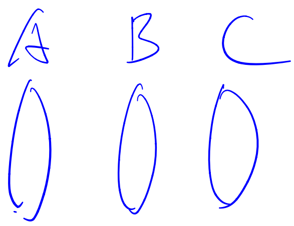
(D) $3^5-2^5-C^5_1\times2^4$

$=243-32-80$

$=131$ ※

70. 渡船 3 艘，每船最多搭載 5 名乘客，則 7 名乘客要渡河時有幾種方法？

(A) 729　(B) 2106　**(C)** 2142　(D) 2187 。



甲 乙 丙 丁 戊 己 庚

用 6, 1, 0 去排 A、B、C

$$3^7 - \underbrace{3}_{7\text{人同船}} - \underbrace{C^7_6 \times 3!}_{6\text{人同船}}$$

$$= 2187 - 3 - 42$$

$$= 2142 \ \#$$

71. $P_4^{n+2}=24C_3^{n+2}$，則 $n=$？ **(A)** 5　(B) 6　(C) 7　(D) 8 。

$$P_4^{n+2}=(n+2)(n+1)n(n-1)$$

$$24C_3^{n+2}=\cancel{24}^{4}\times\frac{(n+2)(n+1)n}{\cancel{3\times2\times1}}$$

$$\cancel{(n+2)(n+1)n}(n-1)=4\cancel{(n+2)(n+1)n}$$

$$n-1=4$$

$$n=5$$

\#

72. 因乾旱水源不足，自來水公司計劃在下週一至週日的 7 天中選擇 2 天停止供水，若要求停水的 2 天不相連，則自來水公司共有多少種選擇方式？

(A) 14　**(B)** 15　(C) 21　(D) 42。

$$C^6_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15\text{(種)}$$

ps: 不連號問題!

73. 籃球3人鬥牛賽，共有甲、乙、丙…等9人組成3隊參加，則甲、乙2人不在同隊的組隊方式有多少種？ (A)150 **(B)**210 (C)240 (D)280。

①3 2 2

$$C^7_3 \times C^4_2 \times C^2_2 \times \frac{1}{2!} = 35 \times 6 \times \frac{1}{2} = 105$$

② 甲、乙分入 2, 2 之中有 $2! = 2$

故 $105 \times 2 = 210$ (種) ※

PS：分組分堆問題！

74. 機械科有甲、乙、丙3班，本學年有6位轉學生，則下列各情形何者錯誤？

(A)把6人平分進3個班，每班2人，共90種分法

(B)把6人平分成3組，每組2人，共15種分法

(C)按甲班3人、乙班2人、丙班1人的方式分入各班，共60種分法

(D)按4、1、1的方式分成3組，再任意編入甲、乙、丙3班，共180種分法。

(A) 2 2 2

$$\left(C^6_2 \times C^4_2 \times C^2_2 \times \frac{1}{3!}\right) \times 3! = 15 \times 6 = 90 \text{(種)}$$

(B) $C^6_2 \times C^4_2 \times C^2_2 \times \frac{1}{3!} = 15 \times 6 \times \frac{1}{6} = 15 \text{(種)}$

(C) 甲3 乙2 丙1

$$C^6_3 \times C^3_2 \times C^1_1 = 20 \times 3 \times 1 = 60 \text{(種)}$$

(D) 4 1 1

$$\left(C^6_4 \times C^2_1 \times C^1_1 \times \frac{1}{2!}\right) \times 3! = 15 \times 2 \times \frac{1}{2} \times 6$$

$$= 90 \text{(種)}$$

75. 若8個相同的玩具分裝於3個相同的箱子，每箱至少1個，則共有幾種裝法？

(A) 5　(B) 6　(C) 7　(D) 8。

$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$
5	0	0
4	1	0
3	2	0
3	1	1
2	2	1

共5種 ※

76. $\sqrt{3}\tan 20° + \sqrt{3}\tan 10° + \tan 20° \tan 10° =$ ？ (A)$\frac{1}{\sqrt{3}}$ (B)$\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(C)**1 (D)$\sqrt{3}$ 。

$\because \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

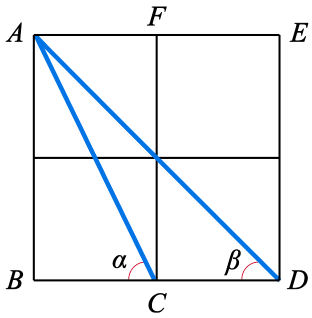
$\therefore \tan(20°+10°) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{\tan 20° + \tan 10°}{1 - \tan 20° \tan 10°} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sqrt{3}\tan 20° + \sqrt{3}\tan 10° = 1 - \tan 20° \tan 10°$

故 $\sqrt{3}\tan 20° + \sqrt{3}\tan 10° + \tan 20° \tan 10° = 1$ ※

77. 如右圖，每一方格均為正方形，$\angle ACB=\alpha$，$\angle ADB=\beta$，則 $\tan(\alpha+\beta)=$？ **(A)** -3　(B) $-\frac{1}{3}$　(C) $\frac{3}{2}$　(D) 3。



$$\tan\alpha=\frac{2}{1}=2$$

$$\tan\beta=\frac{2}{2}=1$$

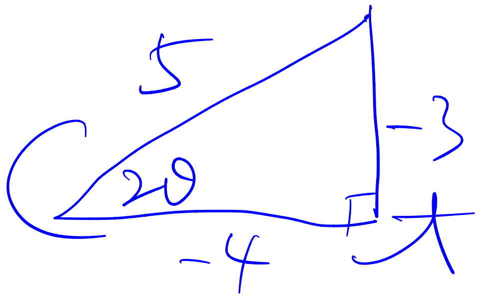
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{2+1}{1-2\times1}$$

$$=-3 \#$$

78. 設 $\tan 2\theta = \dfrac{3}{4}$ 且 $\cos 2\theta < 0$ ，則 $\sin^4\theta - \cos^4\theta =$ ？

(A) $\dfrac{3}{5}$　**(B)** $\dfrac{4}{5}$　(C) $-\dfrac{3}{5}$　(D) $-\dfrac{4}{5}$ 。



$$\sin^4\theta - \cos^4\theta$$

$$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)(\sin^2\theta - \cos^2\theta)$$

$$= \sin^2\theta - \cos^2\theta$$

$$= -\cos 2\theta$$

$$= -\left(\frac{-4}{5}\right)$$

$$= \frac{4}{5}$$

#

79. 設兩直線 $y=mx+1$ 與 $y=-2x+9$ 之夾角為 $45°$，且此二直線之斜率異號，則 m 之值為？

(A)3 (B)$\frac{1}{3}$ (C)$-\frac{1}{3}$ (D)-3 。

$L_1: y=mx+1 \rightarrow m_1=m$

$L_2: y=-2x+9 \rightarrow m_2=-2$

$\tan 45° = \frac{m-(-2)}{1+m\times(-2)}$ 或 $\tan 45° = \frac{-2-m}{1+m\times(-2)}$

$1=\frac{m+2}{1-2m}$ 或 $1=\frac{-2-m}{1-2m}$

$1-2m=m+2$ 或 $1-2m=-2-m$

$m=-\frac{1}{3}$ (不合) 或 $m=3$ (與 -2 異號，合)

故 $m=3$ ※

80. 設 $f(\theta)=2\cos 2\theta-4\sin\theta-1$，若 $f(\theta)$ 的最大值為 M，最小值為 m，則 $M+m=$？

(A) -7 **(B)** -5 (C) -1 (D)2。

$\because \cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta$

$\therefore f(\theta)=2(1-2\sin^2\theta)-4\sin\theta-1$

$=-4\sin^2\theta-4\sin\theta+1$

$=-4(\sin^2\theta+\sin\theta+\frac{1}{4})+1+1$

$=-4(\sin\theta+\frac{1}{2})^2+2$

$-1\leq\sin\theta\leq 1$

① $\sin\theta=-\frac{1}{2}$ 時有 $M=2$

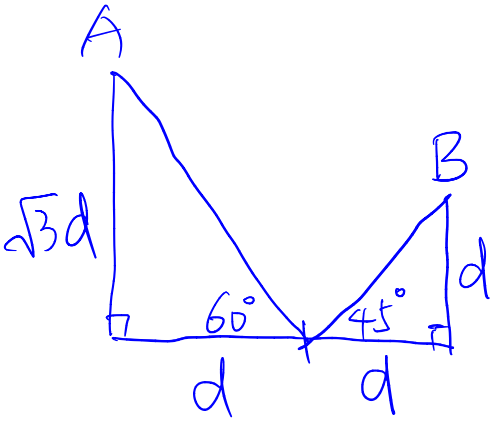
② $\sin\theta=1$ 時有 $m=(-4)\times\frac{9}{4}+2$

$=-7$

故 $M+m=2+(-7)=-5$ ※

81. 某人站在 A 、B 兩座建築物連線中點地面，測得 A 、B 兩建築物屋頂仰角分別為 $60°$ 和 $45°$，則 A 建築物高度是 B 建築物高度的幾倍？

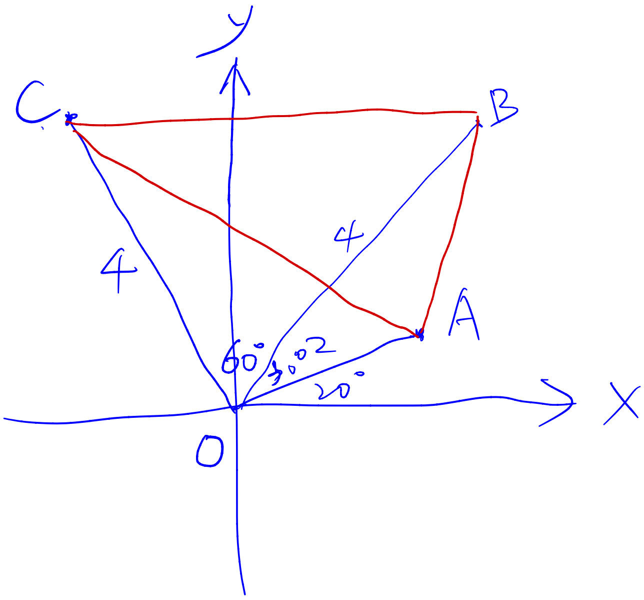
(A)2　**(B)** $\sqrt{3}$　(C) $\frac{3}{2}$　(D) $\sqrt{2}$ 。



$$\frac{\sqrt{3}d}{d}=\sqrt{3}$$ #

82. 在極坐標系中，設 $A(2,20°)$，$B(4,50°)$，$C(4,110°)$，則 $\triangle ABC$ 之面積為？

(A)4　(B) $4\sqrt{3}$　**(C)** $4\sqrt{3}-2$　(D) $4\sqrt{3}+2$ 。



$\triangle ABC = \triangle OAB + \triangle OBC - \triangle OAC$

$= \frac{1}{2}\times 2\times 4\times \sin 30° + \frac{1}{2}\times 4\times 4\times \sin 60° - \frac{1}{2}\times 2\times 4\times \sin 90°$

$= 2 + 4\sqrt{3} - 4$

$= 4\sqrt{3} - 2$ ※

83. 設複數 $z=(1+i)\left(1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{i}{\sqrt{3}}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{i}{\sqrt{99}}\right)$，則 $|z|=$？

(A) $\sqrt{99}$ (B) 10 (C) $\sqrt{101}$ (D) 11。

$$|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

$$|\sqrt{2}+i|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$$

$$|\sqrt{3}+i|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}$$

$$\vdots$$

$$|\sqrt{99}+i|=\sqrt{(\sqrt{99})^2+1^2}=\sqrt{100}$$

$$|z|=\cancel{\sqrt{2}}\times\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{2}}}\times\frac{\cancel{\sqrt{4}}}{\cancel{\sqrt{3}}}\times\cdots\times\frac{\sqrt{100}}{\cancel{\sqrt{99}}}=\sqrt{100}=10$$

84. 設 z_1、z_2 均為複數，且 $z_1=3-4i$，若 $|z_1|=\sqrt{2}|z_2|$ 且 $\frac{z_1}{z_2}$ 的主輻角為 $\frac{3}{4}\pi$，則 $z_2=$？

(A) $\frac{-7+i}{2}$ (B) $\frac{-7-i}{2}$ (C) $1+7i$ (D) $1-7i$。

$$|z_1|=\sqrt{2}|z_2| \rightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\sqrt{2}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$=-1+i$$

$$z_2=\frac{3-4i}{-1+i}=\frac{(3-4i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}$$

$$=\frac{-3-3i+4i-4}{(-1)^2+1^2}$$

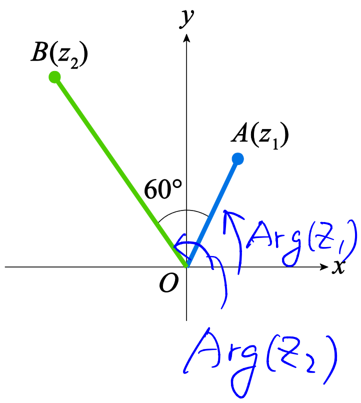
$$=\frac{-7+i}{2} \quad \#$$

答案給錯！

85. 複數平面上，A、B 兩點分別代表複數 z_1、z_2，O 為原點，

若 $|z_1|=\sqrt{3}$，$|z_2|=2\sqrt{3}$，且 $\angle AOB=60^\circ$，則 $\dfrac{z_2}{z_1}$ 之值為？

(A) $\sqrt{3}+i$　**(B)** $1+\sqrt{3}i$　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$　(D) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ 。



$\text{Arg}(z_2)-\text{Arg}(z_1)=60^\circ$

$\text{Arg}\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)=60^\circ$

$$\frac{z_2}{z_1}=\left|\frac{z_2}{z_1}\right|(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$$

$$=\frac{2\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{3}}}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=1+\sqrt{3}i$$

※

86. 若 x、y、z 為有理數，且 $2^x \times 3^y \times 5^z = 6^{\frac{1}{3}} \times 15^{\frac{1}{4}} \times 20^{-\frac{1}{2}}$，則 $xyz =$ ？

(A) $-\frac{1}{24}$　(B) $\frac{5}{12}$　(C) $\frac{7}{36}$　**(D)** $\frac{7}{72}$。

$$6^{\frac{1}{3}} \times 15^{\frac{1}{4}} \times 20^{-\frac{1}{2}}$$

$$= (2\times 3)^{\frac{1}{3}} \times (3\times 5)^{\frac{1}{4}} \times (2^2 \times 5)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{4}} \times 5^{\frac{1}{4}} \times 2^{-1} \times 5^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 2^{-\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{7}{12}} \times 5^{-\frac{1}{4}}$$

$$= 2^x \times 3^y \times 5^z$$

$$x = -\frac{2}{3},\ y = \frac{7}{12},\ z = -\frac{1}{4}$$

$$xyz = \left(-\frac{2}{3}\right) \times \frac{7}{12} \times \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{72}$$

※

87. 若 $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{8\times\sqrt[5]{64}}=4^{a}$，則 $a=$？ (A) $\frac{19}{20}$ (B) $\frac{29}{30}$ (C) $\frac{19}{10}$ (D) $\frac{29}{15}$ 。

左式 $=2^{\frac{1}{2}}\times\left(2^{3}\times2^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{1}{3}}$

$=2^{\frac{1}{2}}\times2^{1}\times2^{\frac{2}{5}}$

$=2^{\frac{1}{2}+1+\frac{2}{5}}$

$=2^{\frac{19}{10}}$

右式 $=(2^{2})^{a}=2^{2a}$

左式 $=$ 右式 $\rightarrow 2a=\frac{19}{10}\rightarrow a=\frac{19}{20}$ ※

88. 設 r 為有理數，且 $5^r=4\left(\sqrt[3]{40}+\frac{\sqrt[3]{5}}{2}\right)^2$，則 $r=$？ (A)$\frac{8}{3}$ (B)$\frac{10}{3}$ (C)8 (D)10。

$$5^r=4\left(2\sqrt[3]{5}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{5}\right)^2$$

$$=4\left(\frac{5}{2}\sqrt[3]{5}\right)^2$$

$$=\cancel{4}\times\frac{25}{\cancel{4}}\times\left(\sqrt[3]{5}\right)^2$$

$$=5^2\times 5^{\frac{2}{3}}$$

$$=5^{2+\frac{2}{3}}$$

$$=5^{\frac{8}{3}}$$

$$r=\frac{8}{3}$$ #

89. $\log_9(\log_6 3)+\log_9(3+\log_3 8)=$? **(A)** $\frac{1}{2}$ (B)2 (C)-2 (D)$-\frac{1}{2}$ 。

原式 $=\log_9[(\log_6 3)(3+\log_3 8)]$

$=\log_9[(\log_6 3)(3+3\log_3 2)]$

$=\log_9[3(\log_6 3)(1+\log_3 2)]$

$=\log_9[3\cancel{(\log_6 3)}\cancel{(\log_3 6)}]$

$=\log_9 3$

$=\log_{3^2} 3^1$

$=\frac{1}{2}$ #

90. 試求 $\log_9 16 \times \log_{32} 25 \times \log_{125} 81$ 之值為？ **(A)** $\frac{16}{15}$ (B) $\frac{15}{16}$ (C) $\frac{15}{14}$ (D) $\frac{14}{15}$ 。

$$\log_9 16 \times \log_{32} 25 \times \log_{125} 81$$

$$= \log_9 81 \times \log_{32} 16 \times \log_{125} 25$$

$$= \log_{3^2} 3^4 \times \log_{2^5} 2^4 \times \log_{5^3} 5^2$$

$$= \frac{4}{2} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{16}{15}$$

※

91. 若 $\log_2(x^2-1)+\log_{\frac{1}{2}}(x-2)=3$ 所有根之和為 a，則 $a=$？ (A)3 (B)5 (C)8 (D)10。

$$\log_2(x^2-1)+\log_{2^{-1}}(x-2)=3$$

$$\log_2(x^2-1)-\log_2(x-2)=3$$

$$\log_2\left(\frac{x^2-1}{x-2}\right)=3$$

$$\frac{x^2-1}{x-2}=2^3=8 \Rightarrow x^2-1=8x-16$$

$$\Rightarrow x^2-8x+15=0$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & & -3 \\ & \times & \\ 1 & & -5 \end{array}$$

$$\Rightarrow (x-3)(x-5)=0$$

$\Rightarrow x=3$ 或 $x=5$

$\therefore a=3+5=8$ #

92. $x \in \mathbb{R}$，求滿足不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > \log_{\frac{1}{2}}(2x+1)$ 之 x 範圍為？

(A) $x>1$ (B) $x>-\frac{1}{2}$ (C) $-2<x<1$ (D) $-2<x<-\frac{1}{2}$。

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > \log_{\frac{1}{2}}(2x+1)$$

$$\begin{cases} x-1>0 \\ 2x+1>0 \\ x-1<2x+1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>-\frac{1}{2} \\ x>-2 \end{cases} \rightarrow x>1 \quad \#$$

93. 設 $x=\dfrac{\log 48}{\log 3}$，則 x 之值落在哪兩個整數之間？

(A) $1<x<2$　(B) $2<x<3$　**(C)** $3<x<4$　(D) $4<x<5$。

$$x=\frac{\log 48}{\log 3}=\log_3 48$$

$$\because \log_3 27<\log_3 48<\log_3 81$$

$$\therefore 3<x<4 \quad \#$$

94. 已知23^{40}是 55 位數，則23^{12}是幾位數？ (A)16 **(B)**17 (C)18 (D)19。

$\because 23^{40}$ 是 55 位數 (表示 $\log 23^{40} = 54.\cdots$)

$\therefore \; 54 \le \log 23^{40} < 55$

$54 \le 40\log 23 < 55$

$54 \times \frac{12}{40} \le (40\log 23) \times \frac{12}{40} < 55 \times \frac{12}{40}$

$16.2 \le 12 \cdot \log 23 < 16.5$

$16.2 \le \log 23^{12} < 16.5$

故 $\log 23^{12}$ 之首數為 16

即 23^{12} 為 17 位數 #

95. 已知a、b均為正整數，若ab是 12 位數，$\frac{a}{b}$的整數部分是 2 位數，則a可能為幾位數？ (A)5　(B)6　**(C)**7　(D)8。

ab是12位數 $\rightarrow \log ab = 11+\alpha$
$(0 \leq \alpha < 1)$

$\frac{a}{b}$是2位數 $\rightarrow \log\frac{a}{b} = 1+\beta$
$(0 \leq \beta < 1)$

$$\begin{cases} \log a + \log b = 11+\alpha & \text{—①} \\ \log a - \log b = 1+\beta & \text{—②} \end{cases}$$

①+② 得 $2\log a = 12+(\alpha+\beta)$

$\log a = 6 + \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

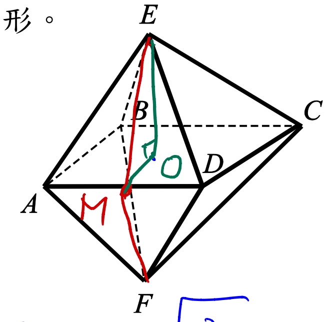
$\left(0 < \frac{\alpha+\beta}{2} < 1\right)$

故a可能是7位數※

96. 如右圖為一正八面體，$ABCD$ 為一正方形，八個面均為正三角形。

設平面 ADE 和平面 ADF 所形成的兩面角為 θ，則 $\cos\theta=?$

(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $-\frac{1}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$。



設邊長為 a，則 $\overline{EM}=\overline{FM}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

而 $\overline{OM}=\frac{1}{2}a$

$\overline{EO}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

$\overline{EF}=2\overline{EO}=\sqrt{2}a$

$\triangle EMF$ 中，$\angle EMF=\theta$

則 $\cos\theta=\dfrac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2-\left(\sqrt{2}a\right)^2}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a}$

$=\dfrac{-\frac{1}{2}a^2}{\frac{3}{2}a^2}$

$=-\frac{1}{3}$ ※

97. 若空間中的線段$\overline{PQ}$在 xy 、 yz 、 xz 平面上的投影長分別為 11、$12\sqrt{2}$ 、13，則

$\overline{PQ}$的長度為？ (A)15 **(B)**17 (C)19 (D)21。

將$\overline{PQ}$平移至 P 為原點

則可設 $Q(q_1, q_2, q_3)$

依題意得知

$$\begin{cases} \sqrt{q_1^2+q_2^2}=11 \\ \sqrt{q_2^2+q_3^2}=12\sqrt{2} \\ \sqrt{q_1^2+q_3^2}=13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} q_1^2+q_2^2=121 \text{ —① } \\ q_2^2+q_3^2=288 \text{ —② } \\ q_1^2+q_3^2=169 \text{ —③ } \end{cases}$$

$\dfrac{①+②+③}{2}$ 得 $q_1^2+q_2^2+q_3^2=289$

故 $\overline{PQ}=\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}=\sqrt{289}=17$ #

98. 空間中$\triangle ABC$之三頂點$A(1,0,6)$、$B(7,3,4)$、$C(4,5,-2)$，則下列敘述何者正確？

(A) $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=42$　(B) $\angle A=60°$　**(C)** $\triangle ABC$ 面積$=\dfrac{49}{2}$平方單位

(D) $\triangle ABC$ 面積$=49$平方單位。

$\overrightarrow{AB}=(6,3,-2)$　$|\overrightarrow{AB}|^2=36+9+4=49$

$\overrightarrow{AC}=(3,5,-8)$　$|\overrightarrow{AC}|^2=9+25+64=98$

(A) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=18+15+16=49$

(B) $\cos A=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{49}{7\times7\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\rightarrow\angle A=45°$

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{49\times98-49^2}$$

$$=\frac{49}{2}$$ #

99. 空間中三點 $A(2,2,0)$、$B(1,2,3)$、$C(3,2,2)$，則下列敘述何者錯誤？

(A) $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=5$　(B) $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的正射影為 $(1,0,2)$　(C) $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的正射影長 $=\sqrt{5}$

(D) B 點在 $\overline{AC}$ 上的投影點 D 坐標為 $(1,0,2)$。

$\overrightarrow{AB}=(-1,0,3)$

$\overrightarrow{AC}=(1,0,2)$　　$|\overrightarrow{AC}|^2=1+0+4=5$

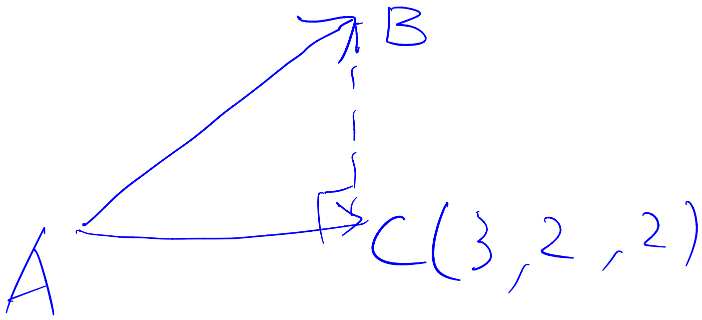
(A) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1+0+6=5$

(B) $\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{AC}$上的正射影 $\vec{u}$

$$\vec{u}=\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2}\right)\overrightarrow{AC}=\frac{5}{5}(1,0,2)=(1,0,2)$$

(C) $|\vec{u}|=\sqrt{1+0+4}=\sqrt{5}$

(D) 此時



$D=C(3,2,2)$ 才對

100. 已知$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}=5$，則$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}=$？ (A)5 **(B)**10 (C)15 (D)0。

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2a & c+a & a+b \\ -2p & r+p & p+q \\ -2x & z+x & x+y \end{vmatrix}$$

$\times(-1)$

$$=(-2)\times\begin{vmatrix} a & c+a & a+b \\ p & r+p & p+q \\ x & z+x & x+y \end{vmatrix}$$

$\times(-1)$

$$=(-2)\times\begin{vmatrix} a & c & b \\ p & r & q \\ x & z & y \end{vmatrix}$$

$$=(-2)\times(-1)\times\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$=(-2)\times(-1)\times5=10$$

#

101. 設$\begin{vmatrix} x+1 & x+3 & x+5 \\ x+3 & x+5 & x+1 \\ x+5 & x+1 & x+3 \end{vmatrix}=0$，則 $x=$？ (A)0 (B)-1 (C)-3 (D)-5。

$$\begin{vmatrix} x+1 & x+3 & x+5 \\ x+3 & x+5 & x+1 \\ x+5 & x+1 & x+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x+9 & x+3 & x+5 \\ 3x+9 & x+5 & x+1 \\ 3x+9 & x+1 & x+3 \end{vmatrix}$$

$$= (3x+9)\cdot\begin{vmatrix} 1 & x+3 & x+5 \\ 1 & x+5 & x+1 \\ 1 & x+1 & x+3 \end{vmatrix} \times(-1)$$

$$= 3(x+3)\cdot\begin{vmatrix} 1 & x+3 & x+5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3(x+3)\times(-12)$$

$$= 0$$

$$x = -3$$

\#

102. 已知$\begin{vmatrix} 2 & a & 0 \\ 1 & b & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$，則$\begin{vmatrix} 2 & a+1 & 0 \\ 1 & b & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = $？ **(A)**$-1$　(B)0　(C)1　(D)2。

$$\begin{vmatrix} 2 & a+1 & 0 \\ 1 & b+0 & -1 \\ 3 & 1+1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & a & 0 \\ 1 & b & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 + (-3)$$

$$= -1 \quad ※$$

103. 已知空間中四點 $A(1,4,-1)$、$B(3,4,1)$、$C(4,2,1)$ 及 $D(k,2,2)$ 共平面，則實數 k 之值為？ (A)2 (B)3 (C)4 **(D)**5。

$\overrightarrow{AB}=(2,0,2)$

$\overrightarrow{AC}=(3,-2,2)$

$\overrightarrow{AD}=(k-1,-2,3)$

共平面 → 三向量所張之平行六面體體積為 0

$$\therefore \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \\ k-1 & -2 & 3 \end{vmatrix}=0$$

$-12-12+0+4(k-1)+8-0=0$

$4(k-1)=16 \rightarrow k-1=4 \rightarrow k=5$ #

104. 空間中一點 $P(1,2,-1)$ 對 xy 、 yz 、 xz 平面的投影點為 A 、 B 、 C ，則過 A 、 B 、 C 三點的平面方程式為？

(A) $2x+y-2z+4=0$ **(B)** $2x+y-2z-4=0$ (C) $x+2y-2z+4=0$

(D) $x-2y+2z+4=0$ 。

$A(1,2,0)$, $B(0,2,-1)$, $C(1,0,-1)$

$\overrightarrow{AB}=(-1,0,-1)$

$\overrightarrow{AC}=(0,-2,-1)$

$$\begin{array}{cccc} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{array}$$

$(-2):(-1):2$

取 $\vec{n}=(2,1,-2)$

則 $E: 2(x-1)+(y-2)-2(z-0)=0$

$\rightarrow E: 2x+y-2z-4=0$ ※

105. 求過點 $A(1,2,3)$ 且和兩平面 $E_1: x+4y+4z-1=0$ 、 $E_2: x-2y-1=0$ 均垂直的平面 E 之方程式為？

(A) $8x+4y-6z-1=0$ (B) $8x+4y-6z+1=0$ (C) $4x+2y-3z-1=0$

(D) $4x+2y-3z+1=0$ 。

$\overrightarrow{n_1}=(1,4,4)$

$\overrightarrow{n_2}=(1,-2,0)$

$$\begin{array}{cccc} 4 & 4 & 1 & 4 \\ & \times & \times & \times \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ & 8 & 4 & (-6) \end{array}$$

取 $\vec{n}=(4,2,-3)$

$E: 4(x-1)+2(y-2)-3(z-3)=0$

$\rightarrow 4x+2y-3z+1=0$ #

106. 空間中兩點 $A(2,1,-2)$ 和 $B(1,1,5)$ 在平面 $E:2x+y-2z+3=0$ 兩側，若 $\overline{AB}$ 交平面 E 於 P 點，則 $\overline{AP}:\overline{BP}=$？ (A)$12:13$ (B)$12:7$ (C)$4:1$ **(D)**$3:1$。

$$\overline{AP}:\overline{BP}=d(A,E):d(B,E)$$

$$=\frac{|4+1+4+3|}{\cancel{3}}:\frac{|2+1-10+3|}{\cancel{3}}$$

$$=12:4$$

$$=3:1$$

#

107. 若矩陣 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & 1 & 2 \end{array}\right]$ 經列運算可得 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right]$，則 $abc=$？

(A)6 **(B)** -6 (C)8 (D)-8。

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & 1 & 2 \end{array}\right] \times(-2) \quad \times(-3)$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -8 & -2 & -4 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -8 & -2 & -4 \end{array}\right] \times(-1) \quad \times 8$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & 20 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \times 1 \quad \times(-2)$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=1 \\ c=-2 \end{cases} \rightarrow abc=-6 \text{ ※}$$

108. 有一個工程，由甲、乙、丙三人合作，10 天可完成；若由乙、丙合作，15 天可完成；若由甲做 15 天，剩下給丙做，丙需 30 天才能完成。請問若由乙獨做，需幾天可完成？

(A)20　(B)30　(C)40　(D)60。

設甲獨做需 x 天

乙 〃 y 天

丙 〃 z 天

則 $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{10} \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{15} \\ \dfrac{15}{x}+\dfrac{30}{z}=1 \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{15}=\dfrac{1}{30}$

得 $x=30$

$\rightarrow \dfrac{15}{30}+\dfrac{30}{z}=1$

得 $z=60$

故 $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{60}=\dfrac{1}{15} \rightarrow \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{15}-\dfrac{1}{60}=\dfrac{1}{20}$

得 $y=20$

※

109. 設 A 為二階方陣滿足 $A\begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}9\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}$，若 $A=\begin{bmatrix}2&1\\1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}$，則

(A) $a<0$　(B) $a+d=10$　(C) $b=3$　**(D)** $c=-9$。

$$A\begin{bmatrix}7&9\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&5\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&9\\3&4\end{bmatrix}^{-1}$$

而 $\begin{bmatrix}7&9\\3&4\end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{28-27}\begin{bmatrix}4&-9\\-3&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-9\\-3&7\end{bmatrix}$

故 $a=4$，$b=-3$，$c=-9$，$d=7$

※

110. 設 $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}$、$C=\begin{bmatrix}3&5\\1&2\end{bmatrix}$，若 $ABC=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$，則二階方陣 $B=$？

(A) $\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}5&8\\-2&-3\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}0&1\\-1&3\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}1&-2\\0&1\end{bmatrix}$。

$$A^{-1}=\frac{1}{5-4}\begin{bmatrix}5&-2\\-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-2\\-2&1\end{bmatrix}$$

$$C^{-1}=\frac{1}{6-5}\begin{bmatrix}2&-5\\-1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-5\\-1&3\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}ABCC^{-1}=\begin{bmatrix}5&-2\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-5\\-1&3\end{bmatrix}$$

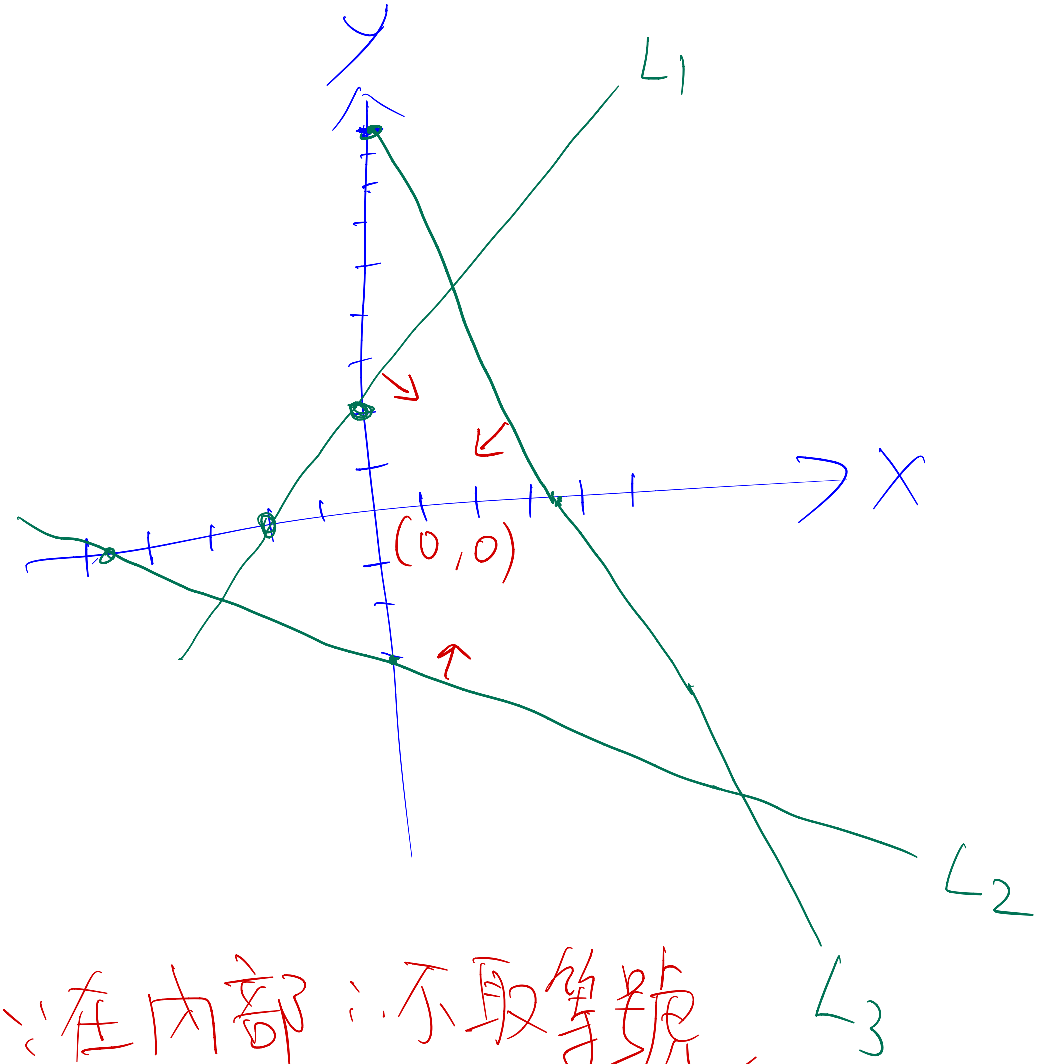
$$B=\begin{bmatrix}5&8\\-2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-5\\-1&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}$$ ※

111. 三直線 $L_1: x-y+2=0$、$L_2: 2x+3y+9=0$、$L_3: 8x+3y-27=0$ 圍成 $\triangle ABC$。

若點 $P(3,a)$ 在 $\triangle ABC$ 內部，則 a 的範圍為？

(A) $-4<a<3$ **(B)** $-5<a<1$ (C) $-2<a<4$ (D) $-3<a<2$。

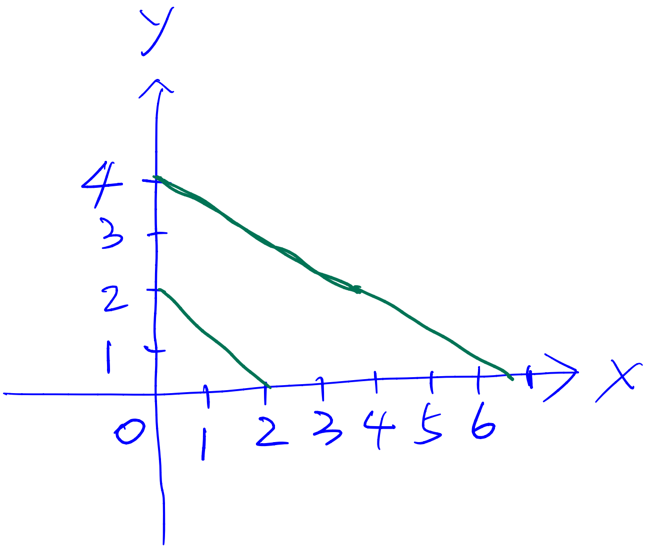


∵在內部∴不取等號

$$\begin{cases} x-y+2>0 \\ 2x+3y+9>0 \\ 8x+3y-27<0 \end{cases} \xrightarrow{P(3,a)} \begin{cases} a<5 \\ a>-5 \\ a<1 \end{cases}$$

故 $-5<a<1$ #

112. 滿足$\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ x+y \geq 2 \\ 3x+5y \leq 20 \end{cases}$的正整數解個數為何？ **(A)**9　(B)10　(C)17　(D)18。



$x+y=2$

2	0
0	2

$3x+5y=20$

$\frac{20}{3}$	0
0	4

y較少，故由y來討論！

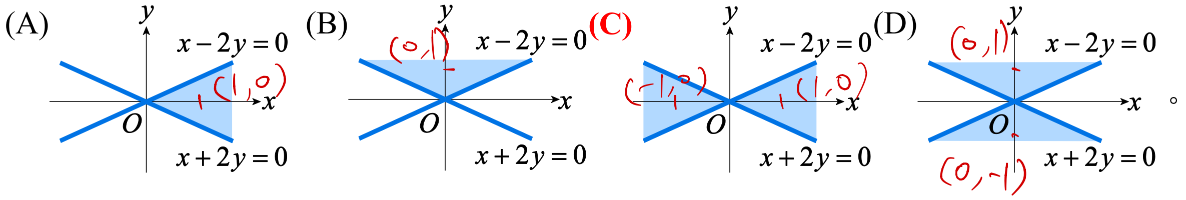
$y=1 \rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 3x \leq 15 \end{cases} \rightarrow x=1,2,3,4,5$

$y=2 \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 3x \leq 10 \end{cases} \rightarrow x=1,2,3$

$y=3 \rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 3x \leq 5 \end{cases} \rightarrow x=1$

故有9組 #

113. 下列何者是不等式 $x^2-4y^2\geq 0$ 的圖形？



$x^2-4y^2\geq 0$

✓ $(1,0)\rightarrow 1-0\geq 0$ (合)

$(0,1)\rightarrow 0-4\geq 0$ (不合)

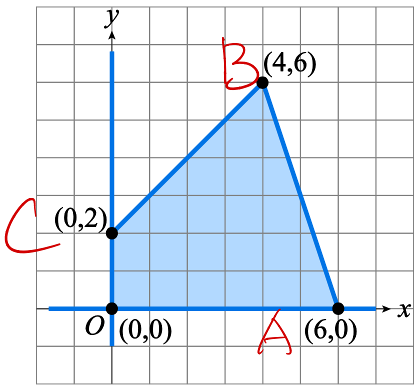
✓ $(-1,0)\rightarrow 1-0\geq 0$ (合)

$(0,-1)\rightarrow 0-4\geq 0$ (不合)

故選(C)

114. 若二元一次聯立不等式$\begin{cases} x\geq 0,\ y\geq 0 \\ ax-y+2\geq 0 \\ bx+cy-18\leq 0 \end{cases}$ 圖形如右，則

$a+b+c=$？ (A) 2 (B) 3 (C) 4 **(D)** 5 。



$\overleftrightarrow{AB}$: $y-0=\frac{0-6}{6-4}(x-6)$

$\rightarrow$ $y=-3(x-6)$

$\rightarrow$ $3x+y-18=0$ $\rightarrow$ $\underline{3x+y-18\leq 0}$

$\overleftrightarrow{BC}$: $y-2=\frac{6-2}{4-0}(x-0)$

$\rightarrow$ $y-2=x$

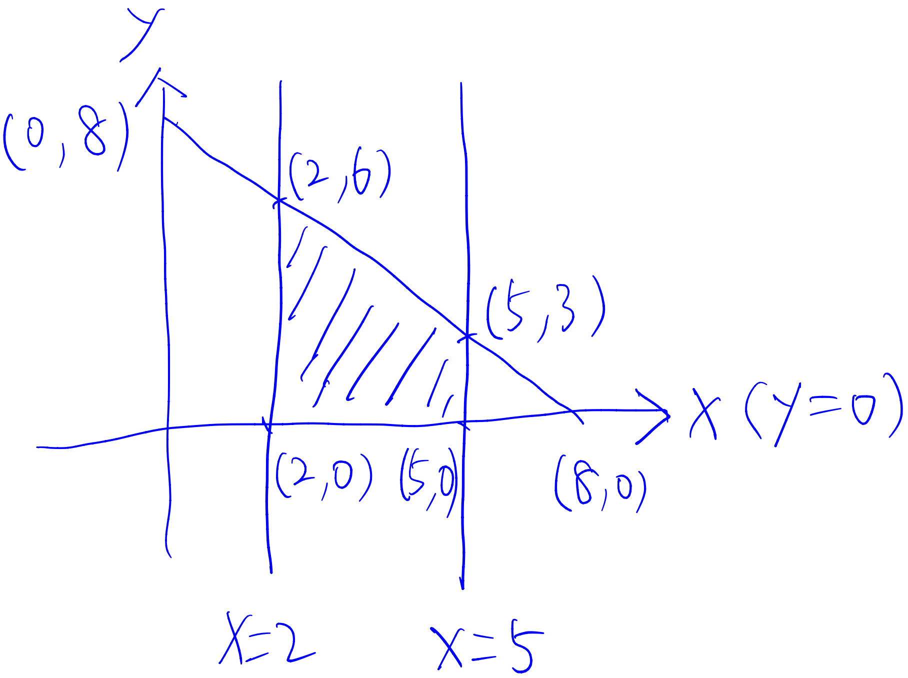
$\rightarrow$ $x-y+2=0$ $\rightarrow$ $\underline{x-y+2\geq 0}$

故 $a=1$, $b=3$, $c=1$

$a+b+c=1+3+1=5$ #

115. 設x、y滿足不等式$\begin{cases} 2 \le x \le 5 \\ x+y \le 8 \\ y \ge 0 \end{cases}$，試求$f(x,y)=2x-y+3$的最小值為何？

(A)-10　(B)13　(C)6　**(D)**1。



$f(2,0)=4-0+3=7$

$f(5,0)=10-0+3=13$ … max.

$f(5,3)=10-3+3=10$

$f(2,6)=4-6+3=1$ … min. #

116. 拋物線 $y^2=x$ 與直線 $x-2y+6=0$ 之間的最短距離為 a，產生最短距離的拋物線上之點坐標為 (b,c)，則 $a\times(b+c)=$？ (A)$\sqrt{5}$ **(B)**$2\sqrt{5}$ (C)5 (D)10。

設 $P(t^2,t)$

則 $\dfrac{|t^2-2t+6|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|(t-1)^2+5|}{\sqrt{5}}$

當 $t=1$ 時有 min. $=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

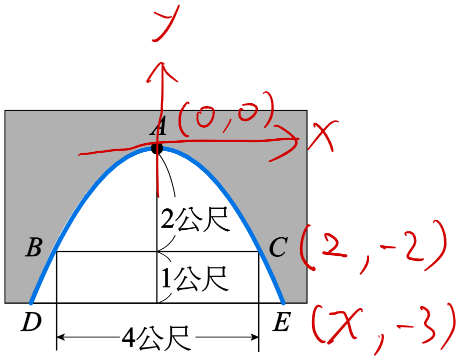
此時 $P(1,1)$

故 $a\times(b+c)=\sqrt{5}\times(1+1)$

$=\sqrt{5}\times 2$

$=2\sqrt{5}$ #

117. 已知有一拋物線形的拱橋，拱頂（A 點）離水面 2 公尺時，水面寬度（$\overline{BC}$ 長）為 4 公尺（如右圖），若水面再下降 1 公尺後，水面寬度（$\overline{DE}$ 長）為多少公尺？



(A) $2\sqrt{5}$　**(B)** $2\sqrt{6}$　(C) $4\sqrt{2}$　(D) $4\sqrt{3}$。

$y=ax^2$ 過 $C(2,-2)$ $\rightarrow -2=a\times 4$

$\rightarrow a=-\frac{1}{2}$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x^2$

以 $E(x,-3)$ 代入得

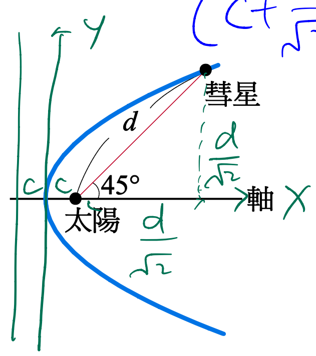
$-3=-\frac{1}{2}x^2 \rightarrow x^2=6$

$\rightarrow x=\sqrt{6}$ $(\because x>0)$

故 $\overline{DE}=2x=2\sqrt{6}$ #

118. 某長週期彗星的軌道是以太陽為焦點的拋物線，如右圖。

當彗星和太陽距離為 d 時，兩者的連線與拋物線的對稱軸夾角為 $45°$，則當彗星運行到和太陽的連線與對稱軸垂直時，彗星和太陽的距離為何？ (A) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}d$ **(B)** $\frac{2-\sqrt{2}}{2}d$ (C) $\frac{2+\sqrt{2}}{4}d$ (D) $\frac{2-\sqrt{2}}{4}d$ 。



$\because y^2=4cx$ 過 $(c+\frac{d}{\sqrt{2}}, \frac{d}{\sqrt{2}})$

$\therefore \frac{d^2}{2}=4c(c+\frac{d}{\sqrt{2}})$

$d^2=8c^2+4\sqrt{2}dc$

$8c^2+4\sqrt{2}dc-d^2=0$

$c=\frac{-4\sqrt{2}d\pm\sqrt{32d^2+32d^2}}{16}=\frac{-4\sqrt{2}d\pm 8d}{16}$

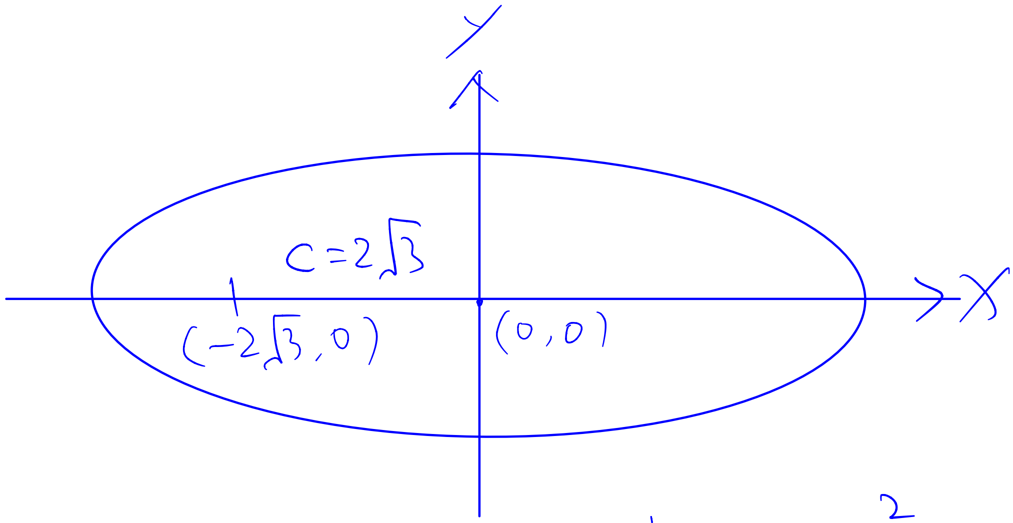
$=\frac{2d\pm\sqrt{2}d}{4}$

$2c=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}d$

① $2c=\frac{2+\sqrt{2}}{2}d>d$ (不合) ② $2c=\frac{2-\sqrt{2}}{2}d$

※

119. 已知一橢圓中心在原點，一焦點為$\left(-2\sqrt{3},0\right)$，且其長軸長為短軸長的 2 倍，則此橢圓方程式為？ **(A)** $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$　(B) $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$　(C) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$　(D) $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{16}=1$。



$2a=2\times(2b)\rightarrow a=2b\rightarrow a^2=4b^2$

$a^2-b^2=c^2\rightarrow 4b^2-b^2=(2\sqrt{3})^2$

$\rightarrow 3b^2=12$

$\rightarrow b^2=4$

$\rightarrow a^2=4\times4=16$

故得 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$ #

120. 橢圓 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 上之點和直線 L：$x+y+15=0$ 的最長距離為？

(A) $5\sqrt{2}$ (B) 10 **(C)** $10\sqrt{2}$ (D) 20。

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1 \rightarrow \left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2=1 \rightarrow \begin{cases} x=3\cos\theta \\ y=4\sin\theta \end{cases} (0\le\theta<2\pi)$$

$$\frac{|3\cos\theta+4\sin\theta+15|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|3\cos\theta+4\sin\theta+15|}{\sqrt{2}}$$

$\because -5\le 3\cos\theta+4\sin\theta\le 5$

$\therefore \max.=\dfrac{5+15}{\sqrt{2}}=\dfrac{20}{\sqrt{2}}=10\sqrt{2}$ #

[另解] $\left(\dfrac{x}{3}\right)^2+\left(\dfrac{y}{4}\right)^2=1$

$$\left[\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2\right](3^2+4^2)\ge(x+y)^2$$

$$(x+y)^2\le 25$$

$$-5\le x+y\le 5$$

$$10\le x+y+15\le 20$$

$$5\sqrt{2}\le\frac{|x+y+15|}{\sqrt{2}}\le 10\sqrt{2}$$ #

121. 與橢圓 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 共焦點且過點 $\left(4,\sqrt{3}\right)$ 之橢圓方程式為？

(A) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1$　**(B)** $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{15}=1$　(C) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$　(D) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{11}=1$ 。

共焦點 → ①共中心、②c^2 相同

設 $\frac{x^2}{9+k}+\frac{y^2}{4+k}=1$

則 $\frac{16}{9+k}+\frac{3}{4+k}=1$

$16(4+k)+3(9+k)=(9+k)(4+k)$

$64+16k+27+3k=36+13k+k^2$

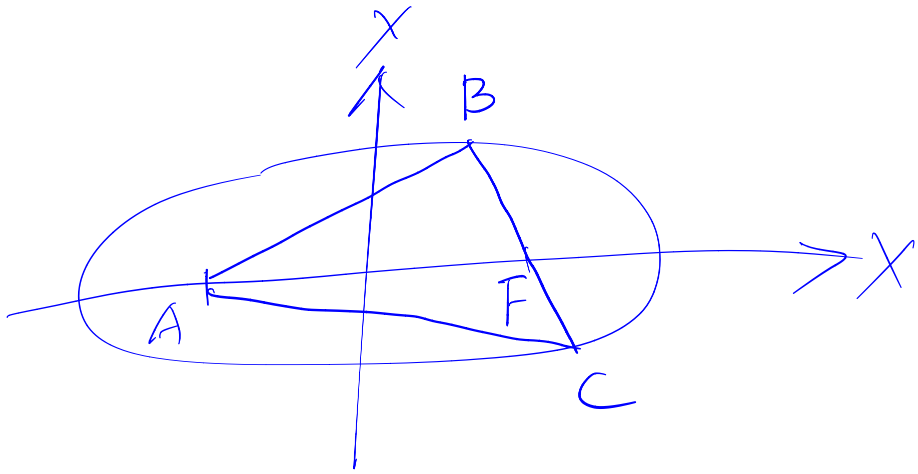
$k^2-6k-55=0$

$\begin{matrix} 1 & & +5 \\ & \times & \\ 1 & & -11 \end{matrix}$

$(k+5)(k-11)=0$ → $k=-5$ (不合) 或 $k=11$

故得 $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1$ #

122. 設$\triangle ABC$中，B、C兩點在橢圓$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$上，$A$點為橢圓之一個焦點，且橢圓另一個焦點在$\overline{BC}$上，則$\triangle ABC$周長為？ (A)4 (B)$4\sqrt{3}$ **(C)**8 (D)$4\sqrt{5}$。



$\triangle ABC$周長 $=\underbrace{\overline{BA}+\overline{BF}}+\underbrace{\overline{CA}+\overline{CF}}$

$= 2a + 2a$

$= 4a$

而 $a^2=4 \rightarrow a=2 \rightarrow 4a=8$ ※

123. 設 $k\in\mathbb{R}$，Γ：$\dfrac{x^2}{25-k}+\dfrac{y^2}{16-2k}=1$，則下列敘述何者錯誤？

(A)若 Γ 為一圓，則 $k=-9$

(B)若 Γ 為一橢圓，則 $k<8$

(C)若 Γ 為一長軸平行 x 軸之橢圓，則 $-9<k<8$

(D)若 Γ 為一雙曲線，則 $8<k<25$。

(A) Γ 為一圓 $\rightarrow 25-k=16-2k$

$\rightarrow k=-9$

(B) Γ 為一橢圓 $\rightarrow \begin{cases} 25-k>0 \\ 16-2k>0 \\ 25-k\neq 16-2k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k<8 \\ \underline{k\neq -9} \end{cases}$

少了此條件!

(C) 左右型橢圓 $\rightarrow \begin{cases} 25-k>0 \\ 16-2k>0 \\ 25-k>16-2k \end{cases} \rightarrow -9<k<8$

(D) Γ 為雙曲線 $\rightarrow (25-k)(16-2k)<0$

$\rightarrow (k-25)(k-8)<0$

$\rightarrow 8<k<25$

124. 一雙曲線經點$(2,1)$，貫軸與共軛軸分別與坐標軸重合，且一漸近線的斜率為$\frac{2}{3}$，則其方程式為？

(A) $2x^2-3y^2=5$ (B) $4x^2-9y^2=7$ (C) $3x^2-2y^2=10$ (D) $9x^2-4y^2=32$。

$(2x-3y)(2x+3y)=k$

$(2,1)\to (4-3)(4+3)=k$

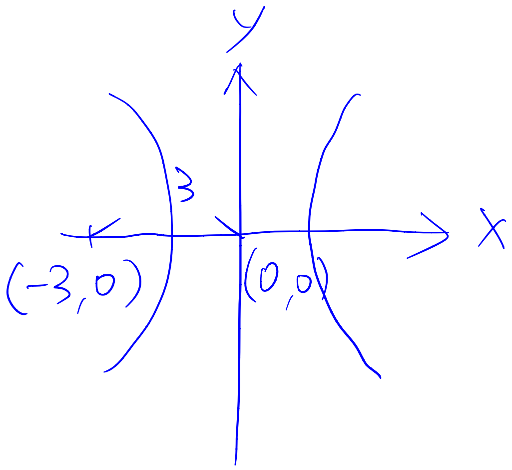
$\to k=7$

$\therefore (2x-3y)(2x+3y)=7$

即 $4x^2-9y^2=7$ ※

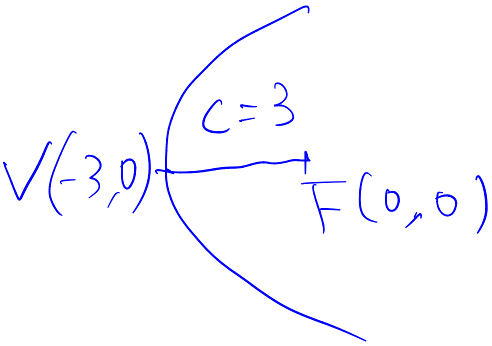
125. 以雙曲線$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$的中心為焦點，且以該雙曲線左邊焦點為頂點的拋物線方程式為？

(A) $y^2=12(x+3)$　(B) $y^2=12(x-3)$　(C) $y^2=3(x+3)$　(D) $y^2=3(x-3)$。



$c^2=4+5=9$

$c=3$



$y^2=12(x+3)$

126. 平面上原點$O(0,0)$至雙曲線$y^2=x^2-4x+10$的最短距離為？

(A)1　(B)$\sqrt{2}$　(C)2　**(D)**$2\sqrt{2}$。

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+x^2-4x+10}$$

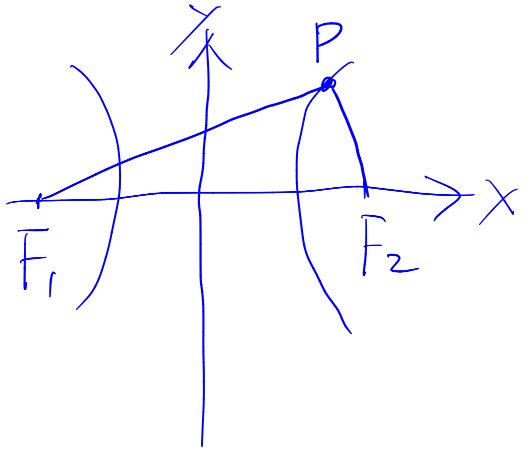
$$=\sqrt{2x^2-4x+10}$$

$$=\sqrt{2(x^2-2x+1)+10-2}$$

$$=\sqrt{2(x-1)^2+8}$$

$$\min.=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\ \#$$

127. 設雙曲線$x^2-\frac{y^2}{8}=1$的兩焦點為F_1、F_2，P在雙曲線上且在第一象限，若$\triangle PF_1F_2$的周長為 18，則$\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=$？ (A)18 (B)24 (C)35 (D)40。



$\begin{cases} a^2=1 \\ b^2=8 \end{cases} \to c^2=a^2+b^2=1+8=9 \to c=3 \to \overline{F_1F_2}=6$

$\triangle PF_1F_2$周長$=\overline{PF_1}+\overline{PF_2}+\overline{F_1F_2}=\overline{PF_1}+\overline{PF_2}+6=18$

$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=12$ —①

$\overline{PF_1}-\overline{PF_2}=2a=2$ —②

解①,②得 $\overline{PF_1}=7$, $\overline{PF_2}=5$

故 $\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=7\times5=35$ ※

128. 與雙曲線$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$有相同的漸近線，且過點$(8,3)$的雙曲線方程式為？

(A)$\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}=1$　**(B)**$\frac{x^2}{48}-\frac{y^2}{27}=1$　(C)$\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{64}=1$　(D)$\frac{y^2}{45}-\frac{x^2}{80}=1$。

$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=0 \Rightarrow 9x^2-16y^2=0$

$\Rightarrow (3x)^2-(4y)^2=0$

$\Rightarrow (3x+4y)(3x-4y)=0$

設所求為$(3x+4y)(3x-4y)=k$

則以$(8,3)$代入得

$(24+12)(24-12)=k \Rightarrow k=36\times12$

$\therefore (3x+4y)(3x-4y)=36\times12$

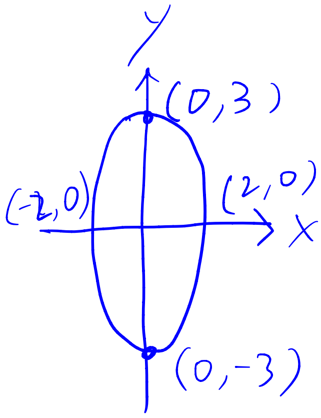
$9x^2-16y^2=36\times12$

$\frac{x^2}{48}-\frac{y^2}{27}=1$ #

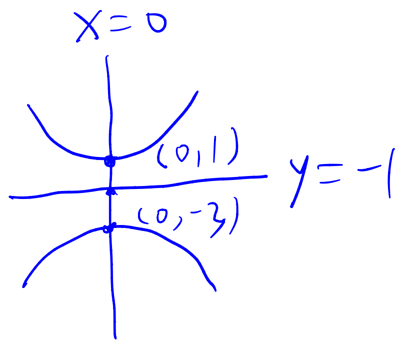
129. 坐標平面上兩方程式$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$和$\frac{(y+1)^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$的圖形有幾個交點？

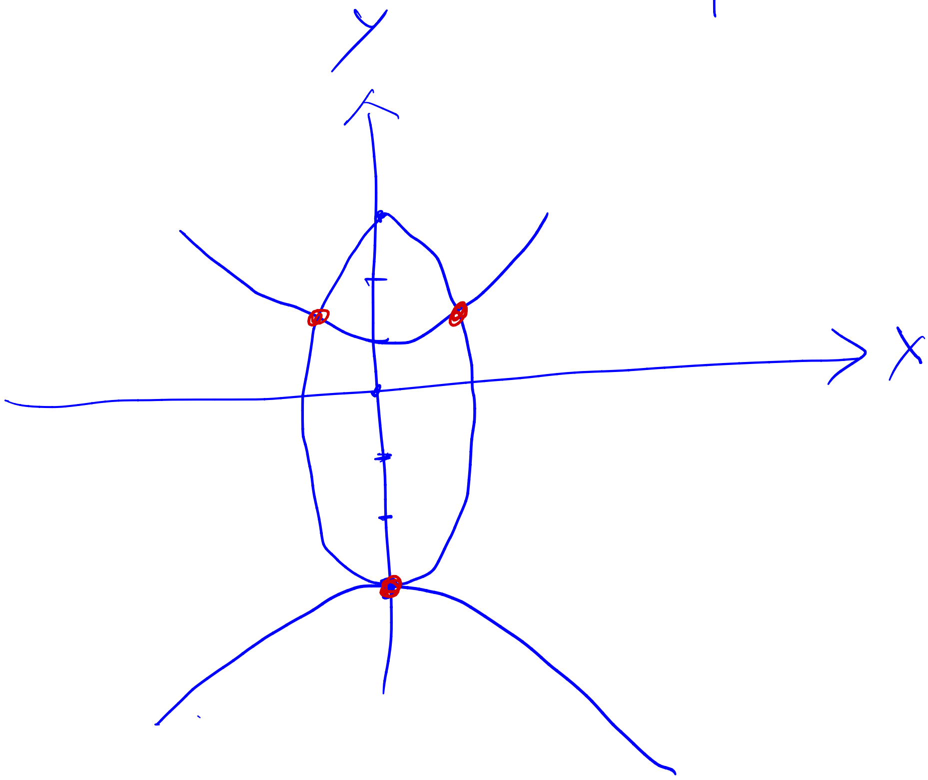
(A)0　(B)1　(C)2　(D)3。

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \\ c=\sqrt{5} \end{cases}$$



$$\frac{(y+1)^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1 \rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=\sqrt{5} \\ C=3 \end{cases}$$





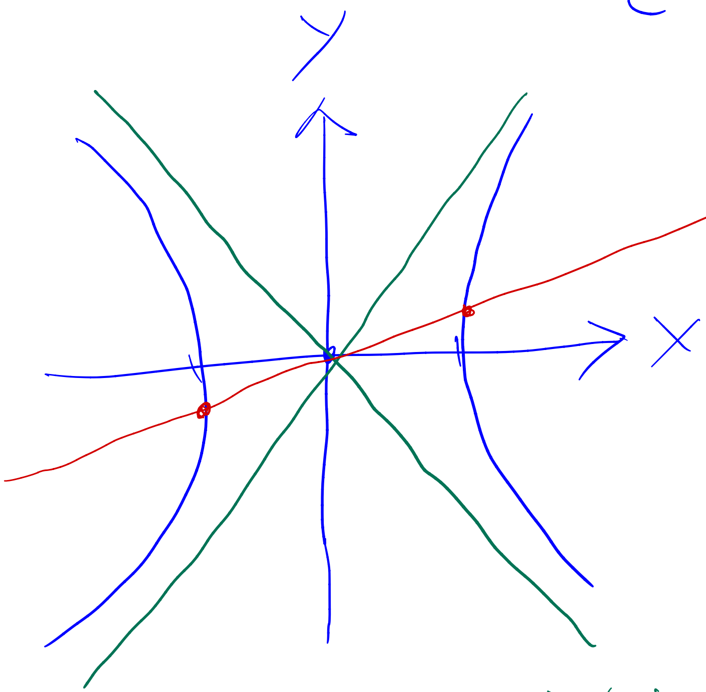
130. 坐標平面上，下列哪條直線和雙曲線 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1$ 有交點？

(A) $5y=2x$ (B) $5y=-2x$ **(C)** $5y=x$ (D) $y=x$ 。

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1 \rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=2 \\ c=\sqrt{29} \end{cases} \rightarrow$$

兩漸近線為 $2x+5y=0$

$2x-5y=0$



$2x-5y=0$ $2x+5y=0$

$5y=x \rightarrow y=\frac{1}{5}x$

斜率 $=\frac{1}{5}$

而(A)(B)為兩漸近線

(D)斜率 $=1>\frac{2}{5}$

131. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{6}}=$? (A)0 **(B)**$\sqrt{2}$ (C)$\sqrt{3}$ (D)∞ 。

$$\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})(\sqrt{x+3}+\sqrt{6})}{(\sqrt{x+3}-\sqrt{6})(\sqrt{x+3}+\sqrt{6})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(\sqrt{x+3}+\sqrt{6})}{\cancel{(x-3)}(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\cancel{2}\sqrt{6}}{\cancel{2}\sqrt{3}}$$

$$=\sqrt{2}\ \text{※}$$

※用羅必達法則：

$$\text{原式}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}}(x+3)^{-\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{3^{-\frac{1}{2}}}{6^{-\frac{1}{2}}}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{2}\ \text{※}$$

132. 若 $\lim_{x \to 1} \frac{ax^2+3x+b}{x-1} = 7$，則 $a-b=$？ (A)1 (B)3 (C)5 **(D)**7。

① $x=1 \to a+3+b=0 \to a+b=-3$

② $\lim_{x \to 1} \frac{ax^2+3x+b}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{2ax+3}{1} = 2a+3=7$

$\therefore a=2 \to 2+b=-3 \to b=-5$

故 $a-b=2-(-5)=2+5=7$ #

133. 設 $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2，x<0\\ -x^2+a，0\le x<1\\ x+b，x\ge 1\end{cases}$，若 $f(x)$ 為連續函數，則 $a-b=$？

(A)2 (B)1 (C)0 (D)-2。

$\because$ $f(x)$ 為連續函數

$\therefore$ $f(0)=a=(0+1)^2=1$

$f(1)=-1^2+1=1+b \rightarrow b=-1$

故 $a-b=1-(-1)=1+1=2$ ※

134. 設 $f(x)$ 為一個三次多項式函數，若 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1$ 且 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=2$，則 $f(3)=$？

(A)4　(B)6　(C)8　**(D)**10。

$$\begin{cases} f(1)=0 & -① \\ f'(1)=1 & -② \end{cases} \quad \begin{cases} f(2)=0 & -③ \\ f'(2)=2 & -④ \end{cases}$$

由①, ③ 可設 $f(x)=(ax+b)(x-1)(x-2)$

$$=(ax+b)(x^2-3x+2)$$

$$=ax^3+(-3a+b)x^2+(2a-3b)x+2b$$

$$f'(x)=3ax^2+(-6a+2b)x+(2a-3b)$$

$$f'(1)=3a-6a+2b+2a-3b=1$$

$$\to -a-b=1$$

$$f'(2)=12a-12a+4b+2a-3b=2$$

$$\to 2a+b=2$$

故得 $a=3$，$b=-4$

$f(x)=(3x-4)(x-1)(x-2) \to f(3)=5\times2\times1=10$

※

135. $f\left(x\right)=x^3+2x+1$ 在點 $\left(0,1\right)$ 處的切線方程式為？

(A) $2x+y-1=0$ (B) $x+2y-2=0$ (C) $x-2y+2=0$ **(D)** $2x-y+1=0$ 。

$f'(x)=3x^2+2 \rightarrow m=f'(0)=2$

$y-1=2(x-0) \rightarrow 2x-y+1=0$ ※

136. 已知函數 $f(x)$ 滿足 $f(1)=0$ 、 $f'(1)=4$ ，則 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)}{2h}=$?

(A)2 (B)4 (C)6 (D)0。

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)}{2h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\frac{1}{2}f'(1)$$

$$=\frac{1}{2}\times 4$$

$$=2 \text{ ※}$$

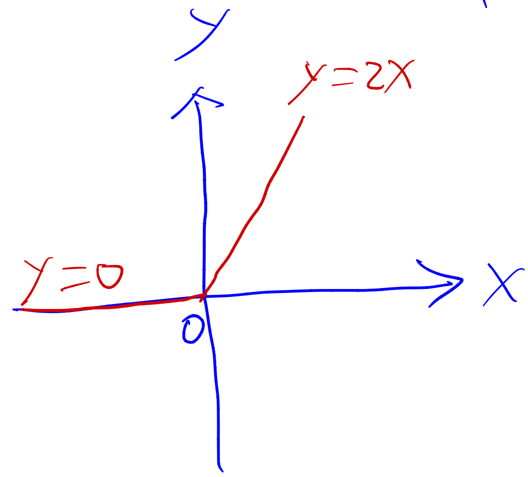
※用羅必達法則：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(1+h)}{2}=\frac{f'(1)}{2}=\frac{4}{2}=2 \text{ ※}$$

137. 設 $f(x)=x+|x|$，則下列何者正確？

(A) $f'(0)=0$　(B) $f'(1)=1$　**(C)** $f'(2)=2$　(D) $f'(-1)$ 不存在。

$$f(x)=x+|x|=\begin{cases}2x, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$



(A) $f'(0)$ 不存在

(B) $f'(1)=2$ …斜率

✓ (C) $f'(2)=2$ …斜率

(D) $f'(-1)=0$ …斜率

138. 設 $f(x)=\dfrac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-4)(x-5)}$，則 $f'(1)=$？ (A)1 (B)$-\dfrac{1}{2}$ (C)$-\dfrac{1}{3}$ **(D)$\dfrac{1}{6}$**。

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \quad \text{而 } f(1)=0$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-2)(x-3)}{(x-4)(x-5)}$$

$$=\frac{1\times(-1)\times(-2)}{(-3)\times(-4)}$$

$$=\frac{1}{6} \quad \#$$

139. 設 $f(x)=x^3-2x^2+5x-4$ ，則 $\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=$ ？ (A)2 (B)3 (C)4 (D)5。

$f'(x)=3x^2-4x+5$

$f''(x)=6x-4$

$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=f''(1)$

$=6\times 1-4$

$=6-4$

$=2$ #

140. 已知 $f(x)=|x|+|x+1|+|x+5|$，則 $f'(-3)=$？ **(A)** -1　(B) -3　(C) 1　(D) 3。

$f(-1)=1+0+4=5 \rightarrow (-1,5)$

$f(-5)=5+4+0=9 \rightarrow (-5,9)$

$y=|x|+|x+1|+|x+5|$ 在 $-5\le x\le -1$ 的部分

是過 $(-1,5)$、$(-5,9)$ 的線段

其斜率 $=\dfrac{5-9}{-1-(-5)}=\dfrac{-4}{4}=-1$

$\therefore f'(-3)=-1$ ※

PS：不必整個圖畫出來！

141. 設 $f(x)=\begin{cases} x^2，x\ge 1 \\ 2x+1，x<1 \end{cases}$，則下列敘述何者正確？

(A) $f'(1)=2$　**(B)** $f'(2)=4$　(C) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$　(D) $f(x)$ 是連續函數。

$x\ge 1 \to f'(x)=2x$

$x<1 \to f'(x)=2$

(A) ∵ 在 $x=1$ 處 $f(x)$ 不連續 $(1^2\ne 2+1)$

∴ $f'(1)$ 不存在

√ (B) $f'(2)=2\times 2=4$

(C) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 不存在 (左極限 ≠ 右極限)

(D) $f(x)$ 在 $x=1$ 處不連續

142. 設函數 $f(x)=\begin{cases}3x-6，x\le -1\\ ax^2+x，x>-1\end{cases}$ 是連續函數且 $f'\left(-\frac{1}{4}\right)=b$ ，則 $a+b=$ ？

(A) -3　(B) -2　(C) -1　(D) 0 。

$$3\times(-1)-6=a\times(-1)^2+(-1)$$

$$-9=a-1 \rightarrow a=-8$$

$$-\frac{1}{4}>-1 \rightarrow f(x)=-8x^2+x$$

$$f'(x)=-16x+1$$

$$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=4+1=5 \rightarrow b=5$$

故 $a+b=-8+5=-3$ ※

143. 二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$，若 $f'(9)=f(9)=0$，且 $f(10)=2$，則 $f(7)=$？

(A)8　(B)16　(C)21　(D)24。

$\because f(9)=f'(9)=0$

$\therefore f(x)=a(x-9)^2$

$f(10)=2 \rightarrow a\times 1^2=2 \rightarrow a=2$

故 $f(x)=2(x-9)^2$

$f(7)=2\times(-2)^2$

$=2\times 4$

$=8$ #

144. 設 $f(x)$ 為三次多項式函數，若 $f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=1$，且 $f(1)=m$，則下列何者正確？ (A)$1<m<\frac{3}{2}$ (B)$\frac{3}{2}<m<2$ (C)$2<m<\frac{5}{2}$ **(D)**$\frac{5}{2}<m<3$。

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$f(0)=1 \rightarrow d=1$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f'(0)=1 \rightarrow c=1$

$f''(x)=6ax+2b$

$f''(0)=1 \rightarrow b=\frac{1}{2}$

$f'''(x)=6a$

$f'''(0)=1 \rightarrow a=\frac{1}{6}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+1$

$f(1)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+1+1=2\frac{2}{3}>2\frac{1}{2}$

故 $\frac{5}{2}<m<3$

145. 函數 $f(x)=-x^3+12x+10$ 在區間 $[-4,3]$ 上的最大值為 M 、最小值為 m ，則 $M-m=$ ？

(A)7　(B)25　(C)26　**(D)**32。

$$f(x)=-x^3+12x+10$$

$$f'(x)=-3x^2+12$$

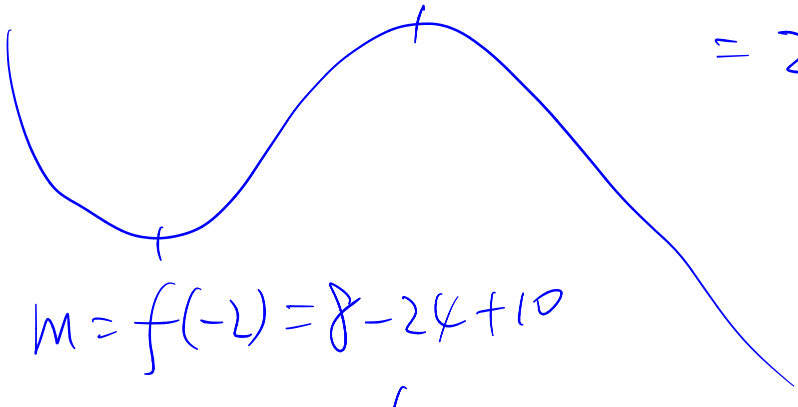
$$=-3(x^2-4)$$

$$=-3(x+2)(x-2)$$

$$f'(-2)=f'(2)=0$$

$$M=f(2)=-8+24+10$$

$$=26$$



$$m=f(-2)=8-24+10$$

$$=-6$$

故 $M-m=26-(-6)$

$$=26+6$$

$$=32$$ #

146. 設 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，a、b、c 為實數，若 $f(x)$ 在 $x=-1$ 有極值，反曲點為 $(1,-4)$，則 $a-b-c=$？ (A)2 (B)1 **(C)** -1 (D) -2。

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$$f''(x)=6x+2a$$

$$f'(-1)=0 \rightarrow 3-2a+b=0 \rightarrow 2a-b=3$$

$$f''(1)=0 \rightarrow 6+2a=0 \rightarrow a=-3$$

$$\rightarrow -6-b=3$$

$$\rightarrow b=-9$$

$$f(1)=-4 \rightarrow 1+a+b+c=-4$$

$$\rightarrow 1-3-9+c=-4$$

$$\rightarrow c=7$$

故 $a-b-c=-3+9-7=-1$ #

147. 設 $f(x)=-x^3+12x+k$，若 $f(x)=0$ 有 3 個相異實根，則 k 的範圍為？

(A) $-16<k<16$　(B) $k>16$ 或 $k<-16$　(C) $-4<k<4$　(D) $k>4$ 或 $k<-4$ 。

$\because f(x)=0$ 有 3 相異實根

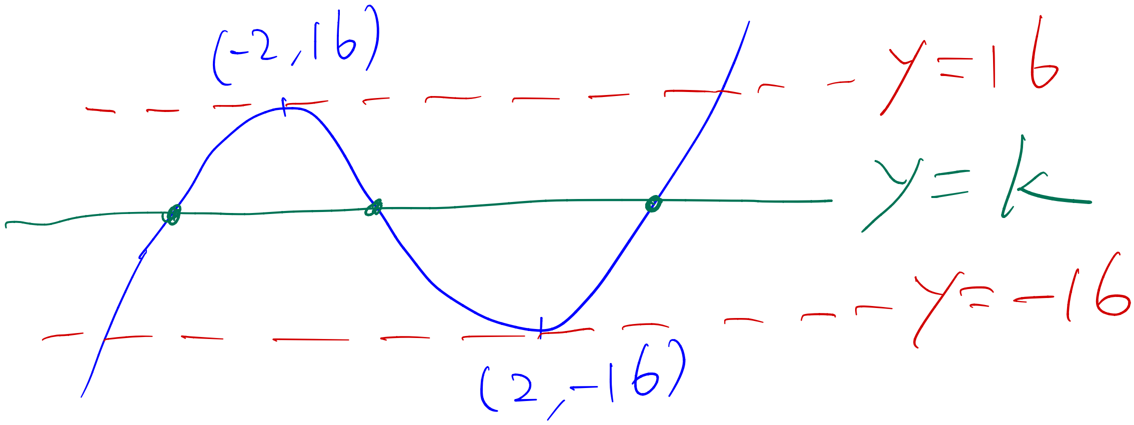
$\therefore x^3-12x=k \rightarrow \begin{cases} y=x^3-12x \\ y=k \end{cases}$ 有 3 個交點

$y=x^3-12x \rightarrow y'=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$\rightarrow y'=0$ 時 $x=-2$ or 2

$x=-2$ 時 $y=-8+24=16 \rightarrow (-2,16)$

$x=2$ 時 $y=8-24=-16 \rightarrow (2,-16)$



$-16<k<16$ 時 有 3 相異交點 ※

148. $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots\cdots+2n}{1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)}=$? (A)4 (B)3 **(C)**2 (D)1。

$$\underbrace{1+2+3+\cdots+2n}_{\text{有}2n\text{個}}=\frac{1}{2}\times 2n\times(2n+1)$$

$$=2n^2+n$$

$$\underbrace{1+3+5+\cdots+(2n-1)}_{\text{有}n\text{個}}=\frac{1}{2}\times n\times(1+2n-1)$$

$$=n^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{n^2}=\frac{2}{1}=2 \quad \#$$

149. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4^n-3^{n-2}}{8^{n-1}}=$? **(A)** $\frac{19}{5}$ (B) $\frac{12}{5}$ (C) $\frac{8}{7}$ (D) $\frac{1}{8}$ 。

$$\text{原式}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4^n}{8^{n-1}}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^{n-2}}{8^{n-1}}$$

$$=8\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{8}{9}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^n$$

$$=8\times\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\cancel{8}}{\cancel{9}}\times\frac{\frac{\cancel{9}\,1}{\cancel{64}\,8}}{1-\frac{3}{8}}$$

$$=8\times\frac{1}{2}-\frac{1}{5}$$

$$=4-\frac{1}{5}$$

$$=\frac{19}{5}$$ ※

150. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2-x}{3}\right)^n$ 收斂，則 x 的範圍為？

(A) $-1<x<5$　(B) $-1\le x<5$　(C) $x>5$ 或 $x<-1$　(D) $x>5$ 或 $x\le -1$。

$$-1<\frac{2-x}{3}<1$$

$$-3<2-x<3$$

$$-5<-x<1$$

$$5>x>-1 \rightarrow -1<x<5$$

#

151. 已知$\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}=\frac{-2x}{x+2}$，則 $x=$？ (A)2 (B)$\frac{1}{2}$ **(C)$-\frac{1}{2}$** (D)$-\frac{1}{4}$。

公比 $x \rightarrow -1<x<1$

$$\frac{1}{1-x}=\frac{-2x}{x+2}$$

$$-2x(1-x)=x+2$$

$$-2x+2x^2=x+2$$

$$2x^2-3x-2=0$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \times & -2 \\ 2 & & +1 \end{array}$$

$$(x-2)(2x+1)=0$$

$x=2$ 或 $x=-\frac{1}{2}$ ※

(不合)

152. 已知首項為a、公比為r的無窮等比級數和為 5；首項為a、公比為$3r$的無窮等比級數和為 7；則首項為a、公比為$2r$的無窮等比級數之和為多少？

(A)$\sqrt{35}$ **(B)**$\dfrac{35}{6}$ (C)6 (D)$\dfrac{37}{6}$。

$$\begin{cases} \dfrac{a}{1-r}=5 \quad \text{—①} \\ \dfrac{a}{1-3r}=7 \quad \text{—②} \end{cases}$$

$\dfrac{①}{②}$得 $\dfrac{1-3r}{1-r}=\dfrac{5}{7} \Rightarrow 5-5r=7-21r$

$\Rightarrow 16r=2$

$\Rightarrow r=\dfrac{1}{8}$

代回①得 $\dfrac{a}{1-\frac{1}{8}}=5 \Rightarrow a=5\times\dfrac{7}{8}=\dfrac{35}{8}$

故 $\dfrac{a}{1-2r}=\dfrac{\frac{35}{8}}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{35}{8-2}=\dfrac{35}{6}$ #

153. $0.6\overline{78}$化成分數為？ (A)$\frac{678}{999}$ **(B)**$\frac{672}{990}$ (C)$\frac{678}{900}$ (D)$\frac{672}{900}$。

$x = 0.6\overline{78}$

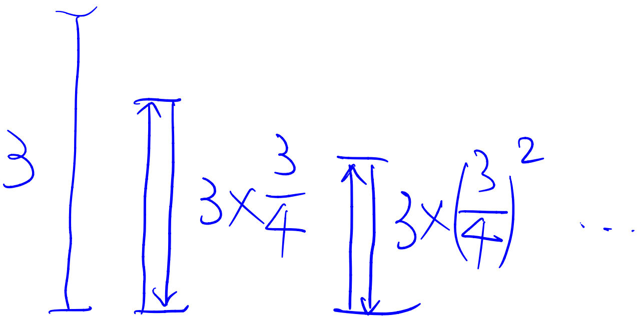
$10x = 6.\overline{78}$ —①

$1000x = 678.\overline{78}$ —②

②−① 得 $990x = 678 - 6 = 672$

$x = \frac{672}{990}$ ＃

154. 一皮球自高 3 公尺處落下，每次反彈高度為落下高度的$\frac{3}{4}$，則此皮球自落下到靜止所經總距離為多少公尺？ (A)18　(B)19　(C)20　**(D)**21。



$$S=3+2\times\left(\frac{3\times\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}\right)$$

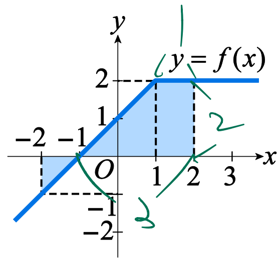
$$=3+2\times9$$

$$=3+18$$

$$=21\ (m)\ \#$$

155. 函數 $f(x)$ 的圖形如圖所示，則 $\int_{-2}^{2} f(x)dx$ 之值等於？

(A)2　(B)$\frac{5}{2}$　(C)3　**(D)**$\frac{7}{2}$ 。



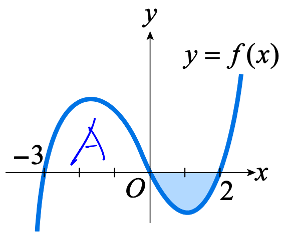
$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{2} f(x)dx$$

$$= -\left(\frac{1}{2} \times 1 \times 1\right) + \frac{(1+3)\times 2}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{8}{2}$$

$$= \frac{7}{2} \#$$

156. 多項式函數 $f(x)$ 的圖形如右，鋪色區域面積為 2，且 $\int_{-3}^{2} f(x)\,dx = 6$，則下列何者正確？



(A) $\int_{0}^{2} f(x)\,dx = 2$

(B) $\int_{-3}^{0} f(x)\,dx = 4$

(C) $f(x)$ 的函數圖形和 x 軸在 $[-3,0]$ 所圍區域面積為 8

(D) $f(x)$ 的函數圖形和 x 軸在 $[-3,2]$ 所圍區域面積為 6。

(A) $\int_{0}^{2} f(x)dx = -2$

(B) $\int_{-3}^{0} f(x)dx = \int_{-3}^{2} f(x)dx - \int_{0}^{2} f(x)dx$

$= 6-(-2)$

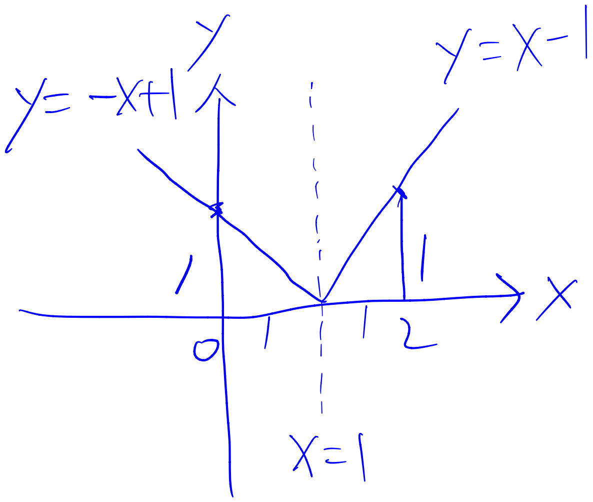
$= 6+2$

$= 8$

(C) $\int_{-3}^{0} f(x)dx = A = 8$

(D) 所求 $= 8+2 = 10$

157. $\int_0^2 |x-1|\,dx = ?$ (A)$\frac{1}{2}$ **(B)**1 (C)2 (D)4。



$$\int_0^2 |x-1|\,dx = \frac{1}{2}\times 1 \times 1 + \frac{1}{2}\times 1 \times 1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= 1 \ \#$$

158. 設 $f(x)=\begin{cases} x^2+1，x\ge 1 \\ 2x，x<1 \end{cases}$，則 $\int_0^2 f(x)dx=$? (A)$\frac{11}{3}$ **(B)$\frac{13}{3}$** (C)5 (D)$\frac{17}{3}$。

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$$

$$=\int_0^1 (2x)dx+\int_1^2 (x^2+1)dx$$

$$=x^2\Big|_0^1+\left(\frac{1}{3}x^3+x\right)\Big|_1^2$$

$$=1+\left(\frac{8}{3}+2\right)-\left(\frac{1}{3}+1\right)$$

$$=\frac{3}{3}+\frac{14}{3}-\frac{4}{3}$$

$$=\frac{13}{3} \#$$

159. 設 $f(x)=6x^2-2x\int_0^1 f(x)dx$，則 $f(x)=$？

(A) $6x^2-2x$ (B) $6x^2-4x$ (C) $3x^2-2x$ (D) $3x^2-4x$。

設 $\int_0^1 f(x)dx=k$ (常數)

則 $f(x)=6x^2-2kx$

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(6x^2-2kx)dx$$

$$k=(2x^3-kx^2)\Big|_0^1=2-k$$

$2k=2 \to k=1$

故 $f(x)=6x^2-2x\cdot 1$

$=6x^2-2x$ ※

160. $\int_0^1 x^2\left(x^3+1\right)^6 dx=$? **(A)** $\frac{127}{21}$ (B) $\frac{128}{21}$ (C) $\frac{127}{7}$ (D) $\frac{128}{7}$ 。

設 $u = x^3 + 1$

則 $\frac{du}{dx} = 3x^2 \rightarrow x^2 dx = \frac{1}{3} du$

$$原式 = \int_1^2 u^6 \cdot \frac{1}{3} du$$

$$= \frac{1}{21} u^7 \Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{21}\left(2^7 - 1^7\right)$$

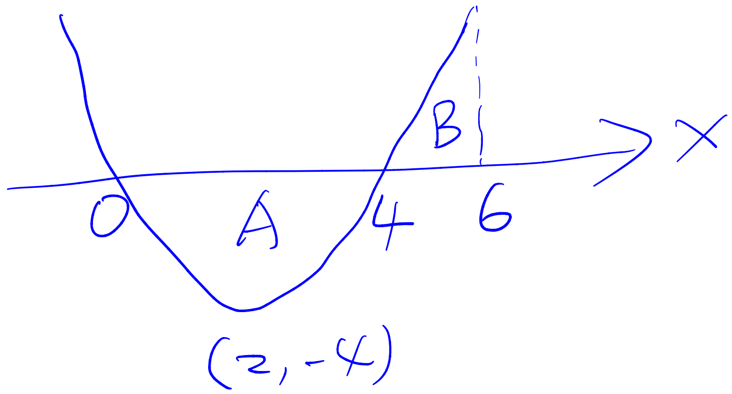
$$= \frac{1}{21} \times 127$$

$$= \frac{127}{21}$$ ※

161. 函數 $f(x)=x^2-4x$ 的圖形在 $[0,6]$ 內和 x 軸所圍成區域的面積為何？

(A) $\frac{20}{3}$ (B) $\frac{32}{3}$ (C) $\frac{40}{3}$ **(D)** $\frac{64}{3}$ 。

$$f(x)=x^2-4x$$
$$=(x^2-4x+4)-4$$
$$=(x-2)^2-4 \rightarrow V(2,-4)$$



$$A+B=\int_0^4[0-(x^2-4x)]dx+\int_4^6(x^2-4x)dx$$
$$=\left(-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right)\Big|_0^4+\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2\right)\Big|_4^6$$
$$=-\frac{64}{3}+32+\cancel{72}-\cancel{72}-\frac{64}{3}+32$$
$$=\frac{192-128}{3}=\frac{64}{3}\ \#$$

162. 拋物線 $y=x^2$ 與直線 $y=2x+3$ 所圍成區域面積為？

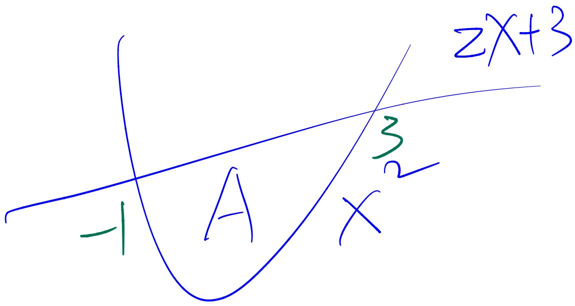
(A)11 **(B)** $\frac{32}{3}$ (C) $\frac{31}{3}$ (D)10。

$x^2=2x+3$

$x^2-2x-3=0$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \diagdown\!\!\!\diagup & +1 \\ 1 & & -3 \end{array}$$

$x=-1$ or 3



$$A=\int_{-1}^{3}[(2x+3)-x^2]\,dx$$

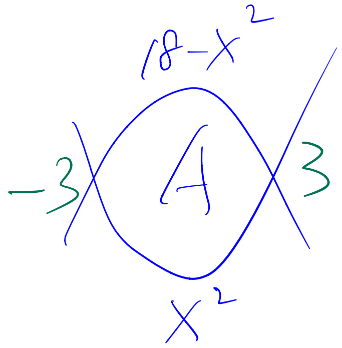
$$=\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)\,dx$$

$$=\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right)\Big|_{-1}^{3}$$

$$=\cancel{-9}\cancel{+9}+9-\frac{1}{3}-1+3$$

$$=\frac{32}{3}\ \#$$

163. 曲線 $y=x^2$ 與 $y=18-x^2$ 所圍區域面積為？ (A)9　(B)18　(C)36　**(D)**72。



$$x^2=18-x^2$$

$$2x^2=18$$

$$x^2=9$$

$$x=\pm 3$$

$$A=\int_{-3}^{3}(18-x^2-x^2)\,dx$$

$$=\int_{-3}^{3}(18-2x^2)\,dx$$

$$=\left(18x-\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_{-3}^{3}$$

$$=54-18+54-18$$

$$=108-36$$

$$=72$$ ※