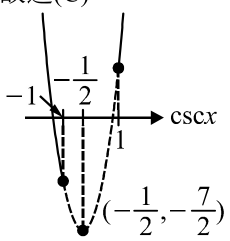
112 學年度四技二專第五次聯合模擬考試
共同科目　數學(C)卷　詳解

數學(C)卷 112-5-C

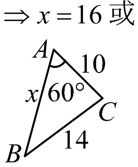
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	C	D	D	B	A	D	A	C	A	C	B	A	C	C	A	B	D	B	A	D	D	B	C	B

1. 設滿足題意之整數為 x，則
$\begin{cases}|x-1|\le 7\\|x-4|>3\end{cases}$
$\Rightarrow\begin{cases}-7\le x-1\le 7\\x-4<-3\text{或}x-4>3\end{cases}$
$\Rightarrow\begin{cases}-6\le x\le 8\\x<1\text{或}x>7\end{cases}$
$\Rightarrow -6\le x<1$ 或 $7<x\le 8$
$\Rightarrow$ $x=-6$、-5、-4、-3、-2、-1、0、8 共 8 個
故選(A)

2. $f(x)=2(\csc^2 x-1)+2\csc x-1$
$=2\csc^2 x+2\csc x-3$
$=2[\csc^2 x+\csc x+(\frac{1}{2})^2]-3-\frac{1}{2}$
$=2(\csc x+\frac{1}{2})^2-\frac{7}{2}$
$\because \csc x\le -1$ 或 $\csc x\ge 1$
$\therefore$當 $\csc x=-1$時，$f(x)$ 有最小值 $2(-1+\frac{1}{2})^2-\frac{7}{2}=-3$
故選(C)



3. 設 $\overline{AB}=x$，由餘弦定理可知
$14^2=x^2+10^2-2\times x\times 10\times\cos 60°$
$\Rightarrow 196=x^2+100-10x$
$\Rightarrow x^2-10x-96=0$
$\Rightarrow (x-16)(x+6)=0$
$\Rightarrow x=16$ 或 -6 (不合)，故選(D)



4. $\because \vec{a}\,//\,\vec{b}$ 且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-10<0$
$\therefore \vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 夾角為 180°
$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 180°$
$\Rightarrow -10=|\vec{a}|\times\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2}\times(-1)\Rightarrow|\vec{a}|=5$
可知 $|\vec{a}+2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=25-40+16=1$
即 $|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{1}=1$，故選(D)
[另解]
$\because \vec{a}\,//\,\vec{b}$　$\therefore$設 $\vec{a}=t\vec{b}$
又 $\vec{a}\cdot\vec{b}=(t\vec{b})\cdot\vec{b}=t|\vec{b}|^2=t(\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2})^2=-10$
$\Rightarrow t=-\frac{5}{2}$，得 $|\vec{a}+2\vec{b}|=\left|-\frac{5}{2}\vec{b}+2\vec{b}\right|=\left|-\frac{1}{2}\vec{b}\right|$
$=\frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=1$，故選(D)

5. 由一次因式檢驗法可知 $x=1$ 為原式之一根，利用綜合除法
$$\begin{array}{l|l}1+0+1-2 & 1\\ \quad +1+1+2 & \\ \hline 1+1+2 \mid +0 & \end{array}$$
得 $x^3+x-2=(x-1)(x^2+x+2)$
令 $x^2+x+2=0$ 解之得 $x=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}i$
即 $|z|=\sqrt{(-\frac{1}{2})^2+(\pm\frac{\sqrt{7}}{2})^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{7}{4}}=\sqrt{2}$，故選(B)

6. $\because (x+2)^2=x^2+4x+4$　$\therefore$由長除法
$$\begin{array}{r}1+(m-4)\qquad\qquad\qquad\\ 1+4+4\overline{)1+\quad m\quad+\quad n\quad+1}\\ 1+\quad 4\quad+\quad 4\qquad\qquad\\ \hline (m-4)+\ (n-4)\quad +1\\ (m-4)+\ (4m-16)\ +(4m-16)\\ \hline (n-4m+12)+(17-4m)\end{array}$$
可知 $n-4m+12=-6$ 且 $17-4m=1$
解得 $m=4$、$n=-2$，即 $m+n=2$，故選(A)
[另解]
設商式為 $Q(x)$
則 $x^3+mx^2+nx+1=(x+2)^2Q(x)-6x+1\cdots$①
左右對x微分
$\Rightarrow$　$3x^2+2mx+n=(x+2)P(x)-6\cdots$②
其中 $P(x)$ 為一多項式，分別令 $x=-2$ 代入①、②
可得 $4m-2n-7=13$ 且 $12-4m+n=-6$
解得 $m=4$、$n=-2$，即 $m+n=2$，故選(A)

7. $\because x^2+y^2-2x-4y-20=0\Rightarrow(x-1)^2+(y-2)^2=25$
$\therefore$圓心在 $A(1,2)$，直線 AP 斜率 $m_{AP}=\frac{6-2}{4-1}=\frac{4}{3}$，可知切線斜率為 $-\frac{3}{4}$，則切線方程式為 $y-6=-\frac{3}{4}(x-4)$

$\Rightarrow 3x+4y=36$ 分別將選項各點代入得

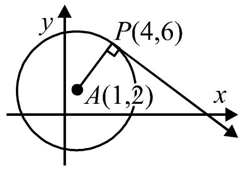
(A) $3\times6+4\times4=34\neq36$

(B) $3\times0+4\times9=36$

(C) $3\times8+4\times4=40\neq36$

(D) $3\times12+4\times0=36$

其中(B) $(0,9)$ 並不在沿順時鐘方向繞行所發射之切線射線上，故選(D)



[另解]

由圓心 $A(1,2)$ 得直線 AP 斜率 $m_{AP}=\dfrac{4}{3}$，分別檢驗選項各點與 P 點連線斜率與 m_{AP} 乘積是否爲 -1，即選項各點與 P 點連線斜率爲 $-\dfrac{3}{4}$，再考慮是否在順時鐘的切線方向上亦可求出，故選(D)

8. $(x+2)^2+(y-1)^2=9\Rightarrow$ 圓心 $A(-2,1)$、半徑 $r=3$，若直線與圓相交時，圓心與直線距離 d 越小者弦長越大

(A) $d=\dfrac{|-6-4+10|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=0$

(B) $d=\dfrac{|-8+3-9|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{14}{5}$

(C) $d=\dfrac{|-24+5-7|}{\sqrt{12^2+5^2}}=2$

(D) $d=\dfrac{|-10-12-18|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\dfrac{40}{13}>r\Rightarrow$ 不相交

故選(A)

9. 由題意可得 $a_n=-4+(n-1)\times3=3n-7$

令 $x=3n-7$ 代入 $2x+3y=7$ 得 $2(3n-7)+3y=7$

$\Rightarrow y=7-2n$

可知交點的 y 坐標爲一首項 5、公差 -2 的等差數列，

即所求爲 $S_{10}=\dfrac{10[2\times5+(10-1)\times(-2)]}{2}=-40$

故選(C)

10. 設經過 n 天，依題意可知

$1+10+10^2+\cdots+10^n>23000000$

$\Rightarrow \dfrac{1\times(10^{n+1}-1)}{10-1}>2.3\times10^7$

$\Rightarrow 10^{n+1}>2.07\times10^8+1\approx2.07\times10^8$

$\Rightarrow \log10^{n+1}>\log(2.07\times10^8)$

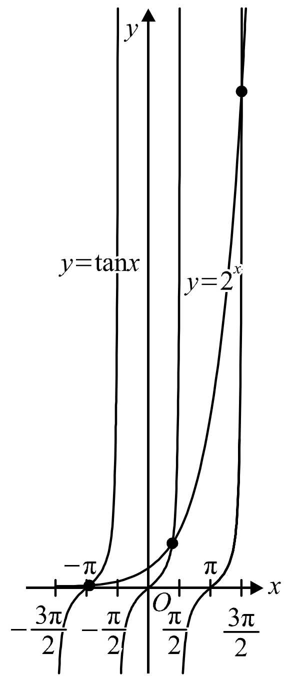
$\Rightarrow n+1>8+\log2.07\approx8+\log2\approx8.3010$

$\Rightarrow n>7.301$，取最小整數 $n=8$ 天，故選(A)

[另解]

經過 1 天有 11 人，經過 2 天有 111 人，經過 3 天有 1111 人，經過 4 天有 11111 人，所以要超過 23000000 人，至少要 $\underbrace{111111111}_{9個1}$ 人，所以只要 8 天即可，故選(A)

11. 如圖所示，共有 3 個交點，故選(C)



12. 取 E_1、E_2 之法向量分別爲 $\overrightarrow{n_1}=(1,-1,1)$、$\overrightarrow{n_2}=(2,1,0)$，可得平面 E 之法向量爲

$\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=(\begin{vmatrix}-1&1\\1&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\0&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix})=(-1,2,3)$

又 E 過點 $(1,2,3)$

可知 $E：-x+2y+3z=12$

即 $a+b+c=-1+2+3=4$，故選(B)

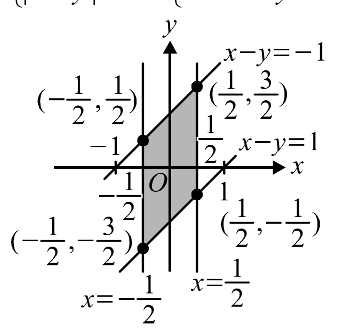
13. 原方程組 $\Rightarrow\begin{cases}cx+dy=-1\\ax+by=2\end{cases}$

將方程組用矩陣表示爲 $\begin{bmatrix}c&d\\a&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c&d\\a&b\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&3\\2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\-6\end{bmatrix}$

即 $(x,y)=(7,-6)$，故選(A)

14. $\begin{cases}|x|\le\dfrac{1}{2}\\|x-y|\le1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{1}{2}\\-1\le x-y\le1\end{cases}$ 作圖如下



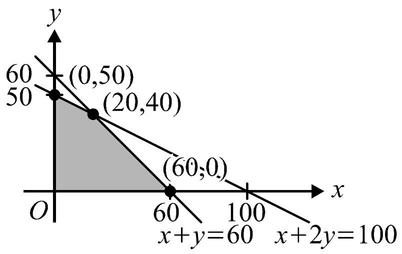
可知所求面積爲 $[\dfrac{1}{2}-(-\dfrac{3}{2})]\times[\dfrac{1}{2}-(-\dfrac{1}{2})]=2\times1=2$

故選(C)

15. 設甲、乙分別購買 x、y 台，則可列出限制條件爲

$$\begin{cases} x\ge 0\,,\,y\ge 0 \\ 100x+100y\le 6000 \\ x+2y\le 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0\,,\,y\ge 0 \\ x+y\le 60 \\ x+2y\le 100 \end{cases}$$

目標函數為每天產量 $f(x\,,\,y)=20x+30y$ 個，畫出可行解區域如下



$\because f(0\,,\,50)=1500$ 、 $f(20\,,\,40)=1600$

$f(60\,,\,0)=1200$

$\therefore$當購買甲 20 台、乙 40 台時，每天產量最多為 1600 個，故選(C)

16. 首位排孕婦方法 1 種，再將三位學生與一位長者視為 4 個□之相同物，與兩位上班族一起排列的方法有 $\frac{6!}{4!}$ 種，最後將長者排入最左邊之□，三位學生排入其它三個□中，方法有 $1\times 3!$ 種

孕□$\underbrace{□□□}_{1\,\times\,3!}$上$_1$上$_2$

即所求為 $1\times\frac{6!}{4!}\times 1\times 3!=180$ 種，故選(A)

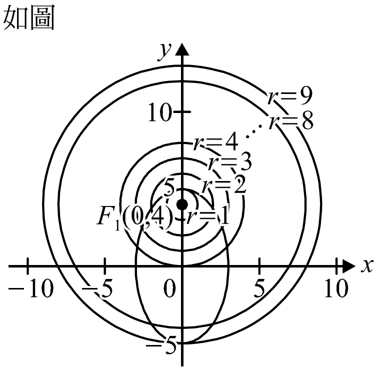
[另解]

孕婦排首不用排，後面的六位先排三位學生與長者，長者在前，三位學生在後，所以是 1(長者)$\times$3!(三位學生)，再把二位上班族插入空位，共 $5\times 6=30$，所以全部是 $1\times(1\times 3!)\times 5\times 6=180$ 種，故選(A)

17. combination 中含有 1 個字母的有 c、m、b、a、t，含有 2 個字母的有 o、i、n，可知取出 3 個字母組合有下列兩種情形：

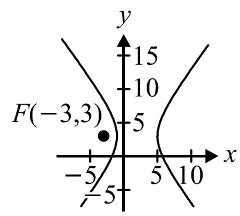
(1) 三個字母相異有 $C^8_3=56$ 種，(2) 二個字母相同一個相異有 $C^3_1\times C^7_1=21$ 種，則共有 77 種，故選(B)

18. 此橢圓為直立式，中心$(0\,,\,0)$，長軸長 $=2\sqrt{25}=10$，短軸長 $=2\sqrt{9}=6$，$c=\sqrt{25-9}=4$，且不失一般性可設焦點 $F_1(0\,,\,4)$ 、 $F_2(0\,,\,-4)$，長軸頂點 $(0\,,\,5)$ 、 $(0\,,\,-5)$，以 F_1 為圓心分別作半徑 1、2、3、4、⋯、8、9 的圓分別交橢圓於 1、2、2、2、⋯、2、1 個點如圖



可知共有 $1+2\times 7+1=16$ 個點，故選(D)

19. 此軌道為雙曲線的左半分支，其中心$(2\,,\,3)$，貫軸長 $=2\sqrt{9}=6$，共軛軸長 $=2\sqrt{16}=8$，$c=\sqrt{9+16}=5$，所求即為左半分支之焦點 $(2-5\,,\,3)=(-3\,,\,3)$，故選(B)



20. 如圖，設 $\angle AOE=\theta$ ($0<\theta<90°$)，則木條總長為

$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}=2\overline{AE}+2\overline{DF}+2\overline{EO}=4\overline{AE}+2\overline{EO}$

$=4(60\sin\theta)+2(60\cos\theta)=120(2\sin\theta+\cos\theta)$

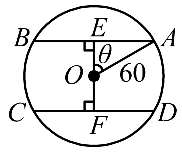
$\because -\sqrt{5}\le 2\sin\theta+\cos\theta\le\sqrt{5}$

$\therefore -120\sqrt{5}\le 120(2\sin\theta+\cos\theta)\le 120\sqrt{5}$，則最長為 $120\sqrt{5}$ 公分，且此時 $2\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{5}$

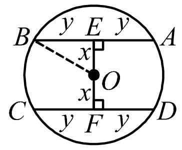
$\Rightarrow\frac{2}{\sqrt{5}}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{5}}\cos\theta=1\Rightarrow\sin(\theta+\phi)=1$

(其中 $\begin{cases}\cos\phi=\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \sin\phi=\frac{1}{\sqrt{5}}\end{cases}$，且 $0°<\phi<90°$)

$\Rightarrow\theta+\phi=90°\Rightarrow 0°<\theta<90°$ (合)，故選(A)



[另解]



如圖，設 $\overline{OE}=\overline{OF}=x$ 、 $\overline{BE}=\overline{AE}=\overline{CF}=\overline{DF}=y$，且 $x^2+y^2=60^2$，求工字型木條總長為 $2x+4y$。利用柯西不等式：$(x^2+y^2)(2^2+4^2)\ge(2x+4y)^2$

$\Rightarrow 60^2\times 20\ge(2x+4y)^2\Rightarrow -120\sqrt{5}\le 2x+4y\le 120\sqrt{5}$

$\therefore$最長為 $120\sqrt{5}$ 公分，且此時 $\frac{x}{2}=\frac{y}{4}\Rightarrow y=2x$

又 $2x+4y=120\sqrt{5}\Rightarrow 10x=120\sqrt{5}$

$\therefore x=12\sqrt{5}$ 、 $y=24\sqrt{5}$ (合)，故選(A)

21. $\because Z_1=2(\cos 60°+i\sin 60°)$

$Z_2=\cos(-45°)+i\sin(-45°)$ 、 $Z_3=\cos 150°+i\sin 150°$

$\therefore Arg(Z)=60°+(-45°)+150°=165°$，故選(D)

22. $\because f(x)$ 為連續函數　$\therefore f(x)$ 在 $x=3$ 連續

可知 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+a}-b}=6\cdots$①

$\because\lim\limits_{x\to 3}(x-3)=0$　$\therefore\lim\limits_{x\to 3}(\sqrt{x+a}-b)=0$

$\Rightarrow\sqrt{3+a}-b=0\Rightarrow b=\sqrt{3+a}$ 代入①

得 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+a}-\sqrt{3+a}}=6$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)(\sqrt{x+a}+\sqrt{3+a})}{(x+a)-(3+a)}=6$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to3}\dfrac{\cancel{(x-3)}(\sqrt{x+a}+\sqrt{3+a})}{\cancel{x-3}}=6$

$\Rightarrow \sqrt{3+a}+\sqrt{3+a}=6 \Rightarrow \sqrt{3+a}=3 \Rightarrow a=6$

可得 $b=\sqrt{3+6}=3$，即 $a+b=6+3=9$，故選(D)

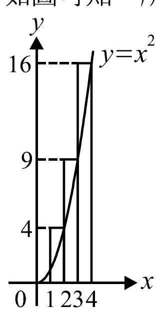
23. $\because f(x)=\dfrac{-x}{(x^2+2)^2}$

$\therefore f'(x)=\dfrac{-(x^2+2)^2-(-x)\cdot 2(x^2+2)\cdot 2x}{(x^2+2)^4}$

$=\dfrac{-(x^2+2)^2+4x^2(x^2+2)}{(x^2+2)^4}$

可得 $f'(1)=\dfrac{-9+12}{3^4}=\dfrac{1}{27}$，故選(B)

24. 如圖可知，所求 $=1\times4+1\times9+1\times16=29$，故選(C)



25. 令 $u=x-1$ 可得當 $x=2$ 時 $u=1$，且當 $x=5$ 時 $u=4$，

$\dfrac{du}{dx}=1 \Rightarrow dx=du$

又 $x=u+1$，原式 $=\int_1^4 \dfrac{u+1}{u^{\frac{1}{2}}}du=\int_1^4 (u^{\frac{1}{2}}+u^{-\frac{1}{2}})du$

$=\left(\dfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+2u^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^4=\left(\dfrac{2}{3}\times4^{\frac{3}{2}}+2\times4^{\frac{1}{2}}\right)-\left(\dfrac{2}{3}\times1^{\frac{3}{2}}+2\times1^{\frac{1}{2}}\right)$

$=\left(\dfrac{16}{3}+4\right)-\left(\dfrac{2}{3}+2\right)=\dfrac{20}{3}$，故選(B)