112 學年度四技二專第三次聯合模擬考試
共同科目　數學(C)卷　詳解

數學(C)卷 112-3-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
D	C	D	C	B	C	B	A	D	D	A	D	C	B	C	B	B	A	D	C	A	A	C	A	B

1. 一個 x 值不能對應到兩個 y 值，所以只有(D)是對的
2. (A) $|(100,-99)|=\sqrt{100^2+(-99)^2}>1$

   (B) $|(\tan 2024^\circ,\sec 2024^\circ)|=\sqrt{\tan^2 2024^\circ+\sec^2 2024^\circ}$
   $=\sqrt{\tan^2 2024^\circ+(1+\tan^2 2024^\circ)}=\sqrt{1+2\tan^2 2024^\circ}>1$

   (C) $\left|(\log_2\sqrt{2},\frac{\sqrt{3}}{2})\right|=\left|(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})\right|=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=1$

   (D) $|(2^{100},2^{-99})|=\sqrt{(2^{100})^2+(2^{-99})^2}=\sqrt{2^{200}+\frac{1}{2^{198}}}>1$

   故選(C)
3. 令 $\overline{BC}=a$

   由餘弦定理知 $(\sqrt{15})^2=a^2+(2\sqrt{6})^2-2a\times2\sqrt{6}\cos\frac{\pi}{4}$

   得 $a^2-4\sqrt{3}a+9=0$ 兩根為 a_1 、 a_2

   由根與係數關係知 $a_1\times a_2=9$

   故選(D)
4. 令 P 的坐標為 (s,t) ，因為 P 點在拋物線上，可得 $t=s^2$ ……①

   又令 G 的坐標為 (x,y)，因為 G 為 ΔABP 之重心，可知 $G=(\frac{-5+7+s}{3},\frac{-3-1+t}{3})=(\frac{s+2}{3},\frac{t-4}{3})=(x,y)$

   $\Rightarrow s=3x-2$ ，$t=3y+4$，代入①

   $3y+4=(3x-2)^2\Rightarrow y=3x^2-4x$

   即 $a+b+c=3-4+0=-1$

   故選(C)
5. 直線 $y=ax$ 與最右邊的圓(稱為 C_5)相切，所以 C_5 的圓心 $(9,0)$ 到直線 $ax-y=0$ 的距離為半徑，即 $\frac{|9a-0|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=1$，平方整理得 $a=\frac{1}{\sqrt{80}}=\frac{\sqrt{5}}{20}$

   故選(B)
6. 如下圖，$\overline{CD}=110+120=230$

   直角 ΔABD 中

   $\overline{AD}=\overline{AC}+\overline{CD}=100+230=330$

   $\overline{BD}=130$

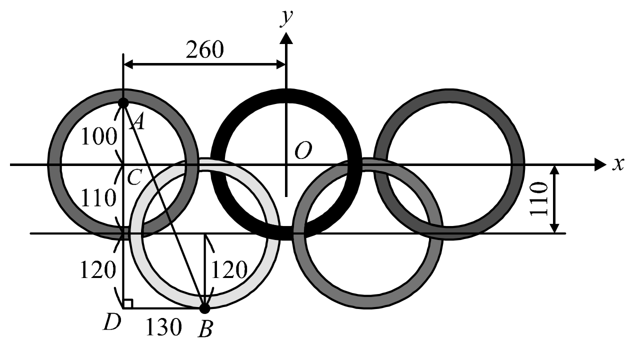
   $\therefore k=\overline{AB}=\sqrt{330^2+130^2}=10\sqrt{1258}$

   $\because 35^2=1225<1258<1296=36^2$

   $\therefore 35<\sqrt{1258}<36$

   $\Rightarrow 350<10\sqrt{1258}<360$

   故選(C)



7. $m_1=\sqrt{3}=\tan 60^\circ\Rightarrow\theta=60^\circ$，可知 L_2 的斜角是 $2\theta=120^\circ$，$m_2=\tan120^\circ=-\sqrt{3}$，故選(B)
8. 一副撲克牌「10 點」有 4 張，「半點」有 12 張

   各挑一張為 $C^4_1\times C^{12}_1=4\times12=48$ ，故選(A)
9. 全部塗法：$P^7_3=7\times6\times5=210$

   最上層塗黃色：$P^6_2=6\times5=30$

   最下層塗綠色：$P^6_2=6\times5=30$

   最上層塗黃色且最下層塗綠色：$P^5_1=5$

   利用排容原理(或是取捨原理)知：

   所求＝全部－上黃－下綠＋(上黃且下綠)

   $=210-30-30+5=155$ 種方法，故選(D)
10. 因為三數成等差

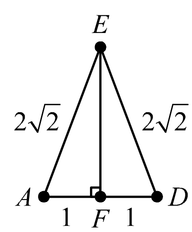
    所以 $2\log_{\frac{1}{3}}3=\log_{\frac{1}{3}}1+\log_{\frac{1}{3}}x=\log_{\frac{1}{3}}x$

    可知 $\log_{\frac{1}{3}}3^2=\log_{\frac{1}{3}}x$ ，$x=9$ ，故選(D)
11. 在 ΔABE 中，$\because \overline{AE}\perp\overline{BE}$　$\therefore \overline{AE}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$

    同理 $\overline{DE}=2\sqrt{2}$

    如下圖所示，在 ΔEAF 中，$\overline{EF}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-1^2}=\sqrt{7}$

    可知 $\cos(\angle AEF)=\frac{\overline{EF}}{\overline{AE}}=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{14}}{4}$ ，故選(A)



12. $\det(A)=\begin{vmatrix}3&2\\5&4\end{vmatrix}=12-10=2$

    所以 $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix}4&-2\\-5&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1\\-\frac{5}{2}&\frac{3}{2}\end{bmatrix}$

由 $AB=C$ 可得 $A^{-1}AB=A^{-1}C$

$$\Rightarrow B=A^{-1}C=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -2\\ 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -8\\ 3 & 11\end{bmatrix}$$

$x+y=-8+11=3$

故選(D)

[另解]

$\because AB=C \quad \therefore \begin{bmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ 4\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases}3x+2y=-2\cdots\cdots①\\ 5x+4y=4\cdots\cdots②\end{cases}$

$\Rightarrow ②-① \Rightarrow 2x+2y=6 \Rightarrow x+y=3$

故選(D)

13. $\because -1\le \sin(120\pi t)\le 1$

$\therefore -110\sqrt{2}\le 110\sqrt{2}\sin(120\pi t)\le 110\sqrt{2}$

$V(t)$ 最大値爲 $110\sqrt{2}=a$

$V(t)$ 的週期爲 $b=\dfrac{2\pi}{120\pi}=\dfrac{1}{60}$

$\therefore \dfrac{ab}{\sqrt{2}}=\dfrac{110\sqrt{2}\times\frac{1}{60}}{\sqrt{2}}=\dfrac{11}{6}$，故選(C)

14. $\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}=-2 \Rightarrow 2^x-2^{-x}=-4$，令 $a=2^x>0$

則 $a-\dfrac{1}{a}=-4 \Rightarrow a^2+4a-1=0$

$a=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+4}}{2}=-2\pm\sqrt{5}$ (負不合)

得 $2^x=-2+\sqrt{5}=\sqrt{5}-2$，即 $x=\log_2(\sqrt{5}-2)$

故選(B)

15. $a_4=a_{2+2}=a_2+a_2=-8+(-8)=-16$

$a_8=a_4+a_4=-16+(-16)=-32$

得 $a_{10}=a_8+a_2=-32+(-8)=-40$

故選(C)

16. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2024}(\frac{1}{3})^{k-1}=1+\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^2+\cdots+(\frac{1}{3})^{2023}=\frac{1-(\frac{1}{3})^{2024}}{1-\frac{1}{3}}$

所以首項爲 1，公比爲 $\dfrac{1}{3}$，末項爲 $(\dfrac{1}{3})^{2024-1}=(\dfrac{1}{3})^{2023}$，

項數爲 2024

而 $\dfrac{1-(\frac{1}{3})^{2024}}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}[1-(\dfrac{1}{3})^{2024}]<\dfrac{3}{2}[1-0]=\dfrac{3}{2}$

故選(B)

17. $6\sin\theta\times(6\cos\theta-6\sin\theta)=18\sin 2\theta+18\cos 2\theta-18$

由正餘弦疊合公式知

$18\sin 2\theta+18\cos 2\theta-18\le\sqrt{18^2+18^2}-18=18(\sqrt{2}-1)$

故選(B)

18. $(2-\sqrt{3})a+(1-\sqrt{3})b=(2a+b)+(-a-b)\sqrt{3}$

可得 $\begin{cases}2a+b=17\\ -a-b=-12\end{cases}$，則 $\begin{cases}a=5\\ b=7\end{cases}$，$3a+b=22$

故選(A)

19. $f(x)=x^4+x^3+x^2+4(x^2+x+1)$

$=x^2(x^2+x+1)+4(x^2+x+1)$

$=(x^2+x+1)(x^2+4)$，其中 x^2+x+1 與 x^2+4 在實數係中皆爲二次質式

(A) $f(4)\ne 0$

(B) $f(-4)\ne 0$

(C) $f(i)=i^4+i^3+5i^2+4i+4=1-i-5+4i+4=3i\ne 0$

故選(D)

20. $A^2=A\times A=\begin{bmatrix}\cos 40° & \sin 40°\\ -\sin 40° & \cos 40°\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 40° & \sin 40°\\ -\sin 40° & \cos 40°\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\cos^2 40°-\sin^2 40° & 2\sin 40°\cos 40°\\ -2\sin 40°\cos 40° & \cos^2 40°-\sin^2 40°\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\cos 80° & \sin 80°\\ -\sin 80° & \cos 80°\end{bmatrix}$

$\therefore A^3=A^2A=\begin{bmatrix}\cos 80° & \sin 80°\\ -\sin 80° & \cos 80°\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 40° & \sin 40°\\ -\sin 40° & \cos 40°\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\cos 80°\cos 40°-\sin 80°\sin 40° & \sin 40°\cos 80°+\cos 40°\sin 80°\\ -\sin 80°\cos 40°-\cos 80°\sin 40° & \cos 80°\cos 40°-\sin 80°\sin 40°\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\cos 120° & \sin 120°\\ -\sin 120° & \cos 120°\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

故 $x^2-y^2=(-\dfrac{1}{2})^2-(\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2=-\dfrac{1}{2}$，選(C)

21. 點 C 所代表複數的實部爲 $5\cos(\theta+135°)$

$=5[\cos\theta\cos 135°-\sin\theta\sin 135°]$

$=5[\dfrac{4}{5}\times(-\dfrac{\sqrt{2}}{2})-\dfrac{3}{5}\times(\dfrac{\sqrt{2}}{2})]=-\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$，故選(A)

[另解]

點 C 所代表之複數爲 $(4+3i)\times(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i)$

展開後實部爲 $4\times(-\dfrac{1}{\sqrt{2}})-3\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{7}{\sqrt{2}}=-\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$

故選(A)

22. $\dfrac{\sin 2A}{a}=\dfrac{\sin 2B}{b}=\dfrac{2\sin C\sin\frac{C}{2}}{c}$ 可得

$\dfrac{2\sin A\cos A}{a}=\dfrac{2\sin B\cos B}{b}=\dfrac{2\sin C\sin\frac{C}{2}}{c}$

由正弦定理 $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$

可知 $\cos A=\cos B=\sin\dfrac{C}{2}$

$\cos A=\cos B$ 可知 $A=B$

故選(A)

23. 亮度數值越大的星體，其視星等數值就越小，所以 $E_c > E_a > E_b$，金星最亮，其次木星，再來健神星

$$\frac{E_a}{E_c} = 100^{\frac{-4.14-(-2.94)}{5}} = 100^{\frac{-1.2}{5}}$$

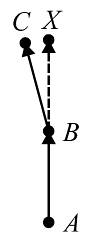
$$\frac{E_b}{E_c} = 100^{\frac{-4.14-8.94}{5}} = 100^{-2.616}$$

$$\frac{E_a}{E_b} = 100^{\frac{8.94-(-2.94)}{5}} = 100^{\frac{11.88}{5}} = 100^{2.376} = 10^{4.752}$$

得 $\log\frac{E_a}{E_b} = 4.752$

故選(C)

24. 將 $\overrightarrow{AB}$ 平移到 $\overrightarrow{BX}$，則 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 的夾角即爲 $\overrightarrow{BX}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 的夾角，$180°-165°=15°$，$\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 的內積爲 $|\overrightarrow{BX}|\times|\overrightarrow{BC}|\times\cos 15°$



又 $\cos 15° = \cos(180°-165°)$

$$= -\cos 165° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

可知所求 $= 2\times 2\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$

故選(A)

25. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD})$

可得 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{CN} = (\overrightarrow{CA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CB})\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD})$

$= \frac{1}{2}|\overrightarrow{CA}|^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD} - \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$，故選(B)