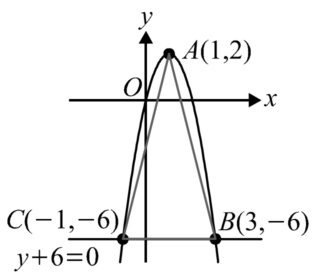
111 學年度四技二專第五次聯合模擬考試
共同科目　數學(C)卷　詳解

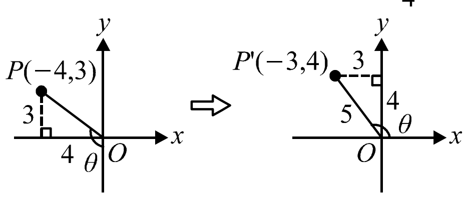
數學(C)卷 111-5-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	C	B	B	D	C	B	A	D	C	A	C	D	B	B	D	A	D	C	D	A	A	C	B	C

1. $\because f(x)=-2x^2+4x=-2(x-1)^2+2$
$\therefore$頂點 $A(1,2)$，又 $y+6=0\Rightarrow y=-6$
令 $-2x^2+4x=-6\Rightarrow x^2-2x-3=0$
$\Rightarrow(x-3)(x+1)=0\Rightarrow x=3$ 或 -1
可得 $B(3,-6)$ 、 $C(-1,-6)$
ΔABC 面積爲 $\dfrac{1}{2}\times|3-(-1)|\times|2-(-6)|=16$，故選(A)

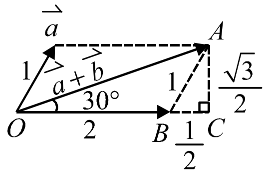


2. 將 θ 置於標準位置角如下圖，可知其終邊有一點 $P'(-3,4)$，又 $\overline{OP'}=5$　$\therefore\csc\theta=\dfrac{5}{4}$，故選(C)



3. $\overrightarrow{v}=(\sum\limits_{i=1}^{8}a_i,\sum\limits_{i=1}^{8}b_i)$
其中 $\sum\limits_{i=1}^{8}a_i=\dfrac{8[2\times\frac{1}{4}+7\times(-\frac{1}{2})]}{2}=-12$
$\sum\limits_{i=1}^{8}b_i=\dfrac{\frac{384}{85}[1-(\frac{1}{2})^8]}{1-\frac{1}{2}}=2\times\dfrac{384}{85}\times\dfrac{255}{256}=9$
$\therefore\overrightarrow{v}=(-12,9)$，$|\overrightarrow{v}|=\sqrt{(-12)^2+9^2}=15$，故選(B)

4. [法一]
作圖如下



ΔABC 中，$\overline{AB}=|\overrightarrow{a}|=1$ 、 $\overline{BC}=\dfrac{1}{2}$ 、 $\overline{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\therefore|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=\sqrt{\overline{OC}^2+\overline{AC}^2}=\sqrt{(2+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\sqrt{7}$

[法二]
$\because|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2$
$=1^2+2\times1\times2\times\cos60^\circ+2^2=7$
$\therefore|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=\sqrt{7}$，故選(B)

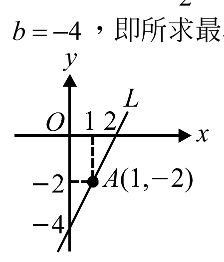
5. 所求 $=g(1)=g(99-98)=f(99)$，即 $f(x)$ 除以 $x-99$ 之餘式，由綜合除法

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 1 & -100 & +98 & +99 & -1 & +0 & 99 \\ & +99 & -99 & -99 & +0 & -99 & \\ \hline 1 & -1 & -1 & +0 & -1 & |-99 & \end{array}$$

可知 $g(x)$ 的所有項之係數和爲 -99，故選(D)

6. 令 $f(x)=2x^3+x^2-5x+2$
$\because f(1)=2+1-5+2=0$　$\therefore x-1\mid f(x)$
$\Rightarrow f(x)=(x-1)(2x^2+3x-2)=(x-1)(2x-1)(x+2)$
可知 $f(x)=0$ 之解爲 $x=1$ 、 $\dfrac{1}{2}$ 、 -2
即 $a+b=1+(-2)=-1$，故選(C)

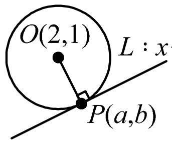
7. 設 L 的 x 、 y 截距分別爲 a 、 b（$a>0$，$b<0$），則 L：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$，以 $A(1,-2)$ 代入得 $\dfrac{1}{a}+(\dfrac{-2}{b})=1$，且所圍三角形面積爲 $\dfrac{1}{2}a\times(-b)=-\dfrac{ab}{2}$
由算幾不等式可知 $\dfrac{\frac{1}{a}+(\frac{-2}{b})}{2}\geq\sqrt{\frac{1}{a}\times(\frac{-2}{b})}$
$\Rightarrow\dfrac{1}{2}\geq\sqrt{-\dfrac{2}{ab}}\Rightarrow\dfrac{1}{4}\geq-\dfrac{2}{ab}\Rightarrow-\dfrac{ab}{2}\geq4$
檢驗當等號 $-\dfrac{ab}{2}=4$ 成立時 $\Rightarrow\dfrac{1}{a}=-\dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow a=2$ 、 $b=-4$，即所求最小値爲 4，故選(B)



8. 圓 C：$(x-2)^2+(y-1)^2=-k+5$
令圓心爲 $O(2,1)$
$\because P$ 在 L 上　$\therefore a-2b-5=0$……①
又$\because\overline{OP}\perp L$　$\therefore m_{OP}\times m_L=-1\Rightarrow\dfrac{b-1}{a-2}\times\dfrac{1}{2}=-1$
$\Rightarrow2a+b-5=0$……②
解①②得 $a=3$ 、 $b=-1$，將 $P(3,-1)$ 代入圓 C

可得 $9+1-12+2+k=0 \Rightarrow k=0$

$\therefore a+b+k=3-1+0=2$，故選(D)



9. (A) $\because y_1=y_2$ $\quad \therefore \log_a x_1=\log_{\frac{1}{a}} x_2$

$\Rightarrow \log_a x_1=-\log_a x_2 \Rightarrow \log_a x_1+\log_a x_2=0$

$\Rightarrow \log_a x_1x_2=0 \Rightarrow x_1x_2=1$

(B) $\because x_3=x_4$ $\quad \therefore y_3+y_4=\log_a x_3+\log_{\frac{1}{a}} x_4$

$=\log_a x_3-\log_a x_3=0$

(C) 由 $\log_a x=\log_{\frac{1}{a}} x \Leftrightarrow \log_a x=-\log_a x \Leftrightarrow 2\log_a x=0$

$\Leftrightarrow \log_a x=0 \Leftrightarrow x=1$，可知 Γ_1 、 Γ_2 只交於 $x=1$ 時，即交於點 $(1,\log_a 1)=(1,0)$

(D) 若 $0<a<1$，則 Γ_1 爲遞減函數且 Γ_2 爲遞增函數 → 錯誤，故選(D)

10. [法一]

所求 $=1\times3+2\times4+3\times5+\cdots+10\times12=\sum_{k=1}^{10}k(k+2)$

$=\sum_{k=1}^{10}k^2+2\sum_{k=1}^{10}k=\frac{10\times11\times21}{6}+2\times\frac{10\times(10+1)}{2}$

$=385+110=495$ 個

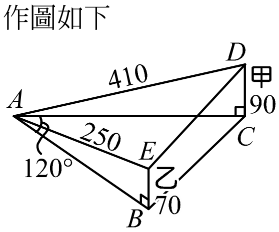
[法二]

直接列出相加

$1\times3+2\times4+3\times5+4\times6+5\times7+6\times8+7\times9+8\times10$

$+9\times11+10\times12=495$ 個，故選(C)

11. 作圖如下

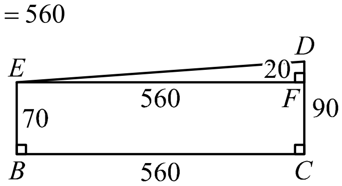


ΔABE 中，$\overline{AB}=\sqrt{250^2-70^2}=240$

ΔACD 中，$\overline{AC}=\sqrt{410^2-90^2}=400$

ΔABC 中，$\overline{BC}^2=240^2+400^2-2\times240\times400\cos120^\circ$

$=560$



四邊形 $BCDE$ 中，$\overline{DE}^2=560^2+(90-70)^2=314000$

所求即 $\overline{DE}=\sqrt{314000}=10\sqrt{3140}\fallingdotseq 560$ 公尺

故選(A)

12. $a=\frac{\sin80^\circ\cos30^\circ-\sin10^\circ\cos60^\circ}{2\sin20^\circ\cos20^\circ}$

$=\frac{\cos10^\circ\cos30^\circ-\sin10^\circ\sin30^\circ}{\sin40^\circ}=\frac{\cos40^\circ}{\sin40^\circ}=\cot40^\circ$

(A) $\frac{1}{a}=\frac{1}{\cot40^\circ}=\tan40^\circ<\tan45^\circ=1$

(B) $\frac{1}{a}=\tan40^\circ=\frac{對邊}{鄰邊}>\frac{對邊}{斜邊}=\sin40^\circ$

(C) $a=\cot40^\circ=\tan50^\circ$ → 錯誤

(D) $a=\cot40^\circ<\cot30^\circ=\sqrt{3}$

故選(C)

13. $\overrightarrow{AB}=(-1,0,1)$ 、 $\overrightarrow{AC}=(2,1,0)$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&-1\\0&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&0\\2&1\end{vmatrix})=(-1,2,-1)$

$=-(1,-2,1)$

可得平面 $E: 1\times(x-1)-2\times(y-0)+1\times(z-0)=0$

$\Rightarrow x-2y+z-1=0$

所求 $d(P,E)=\frac{|10+2+1-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{12}{\sqrt{6}}=2\sqrt{6}$，故選(D)

14. 令 $A=\begin{bmatrix}1&0\\2&0\end{bmatrix}$ 、 $B=\begin{bmatrix}0&0\\1&2\end{bmatrix}$ 、 $C=\begin{bmatrix}0&0\\2&1\end{bmatrix}$

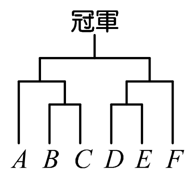
(A) 反例：$AB=O=AC$，但 $B\neq C$

(B) 正確

(C) 反例：$AB=O$，但 $A\neq O$ 且 $B\neq O$

(D) 反例：$A\neq O$ 且 $B\neq O$，但 $AB=O$，故選(B)

15. 將籤表命名如下圖



先將甲、乙 2 位種子選手排 A 與 $F \Rightarrow P_2^2$

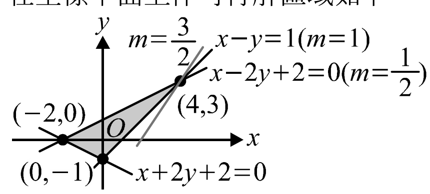
再選 2 位選手排入 B 、 C 對戰(BC 互換相同) $\Rightarrow C_2^4$

最後 2 位選手排入 D 、 E 對戰(DE 互換相同) $\Rightarrow C_2^2$

又籤表左半部 ABC 與右半部 DEF 爲對稱

可得所求爲 $\frac{1}{2}\times P_2^2\times C_2^4\times C_2^2=6$ 種

16. 在坐標平面上作可行解區域如下



令 $3x-2y+k=t$ (t 爲實數)爲一條斜率 $\frac{3}{2}$ 的直線，由斜率法可知最佳解爲 $(4,3)$，即 $f(4,3)=12-6+k=3$

$\Rightarrow k=-3$，故選(D)

17. 由圖可知振幅 $a=40$，週期 $\frac{2\pi}{b}=20 \Rightarrow b=\frac{\pi}{10}$

$\therefore y=40\sin\frac{\pi}{10}x+c$，以 $(5,100)$ 代入

可得 $100=40\sin\frac{\pi}{2}+c \Rightarrow c=60$

即 $a+b+c=40+\frac{\pi}{10}+60=100+\frac{\pi}{10}$，故選(A)

18. $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6}\boxed{7}$

先讓視障者與孕婦排 1、2 的位置 $\Rightarrow 2!$

再讓兩位長者排 3、4、5、6 的位置 $\Rightarrow P_2^4$

最後 3 人排剩下 3 個位置 $\Rightarrow 3!$

可得共 $2!\times P_2^4 \times 3! = 144$ 種方法，故選(D)

19. $\overline{AB}$ 與 L_1 相交 $\Rightarrow A$、B 在 L_1 的異側或 L_1 上

$\Rightarrow (2-2+k)(-1+2+k)\le 0 \Rightarrow k(k+1)\le 0$

$\Rightarrow -1\le k\le 0$ ……①

$\overline{AB}$ 與 L_2 不相交 $\Rightarrow A$、B 在 L_2 的同側

$\Rightarrow (2k-1+2)(-k+1+2)>0 \Rightarrow (2k+1)(k-3)<0$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}<k<3$ ……②

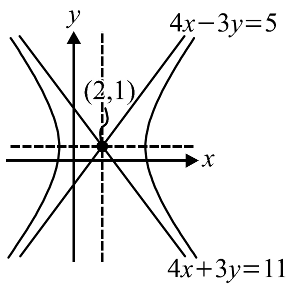
由①② $\Rightarrow -\frac{1}{2}<k\le 0$，故選(C)

20. 令 $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{16}=0 \Rightarrow (\frac{x-2}{3})^2-(\frac{y-1}{4})^2=0$

$\Rightarrow (\frac{x-2}{3}+\frac{y-1}{4})(\frac{x-2}{3}-\frac{y-1}{4})=0$

可得兩漸近線為 $4x+3y=11$ 或 $4x-3y=5$

又直線 $y-1=m(x-2)$ 為過雙曲線中心 $(2,1)$ 斜率為 m 的直線，可知 $m\le -\frac{4}{3}$ 或 $m\ge \frac{4}{3}$，故選(D)

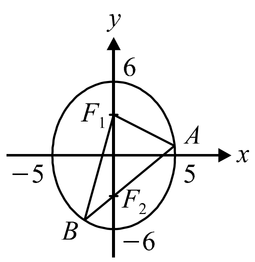


21. 由橢圓方程式可知半長軸長 $a=\sqrt{36}=6$

設光線分別在 A、B 兩點作一次與二次反射如下圖，

所求 $=\overline{F_1A}+\overline{AB}+\overline{BF_1}=\overline{F_1A}+\overline{AF_2}+\overline{F_2B}+\overline{BF_1}$

$=2a+2a=4a=4\times 6=24$，故選(A)

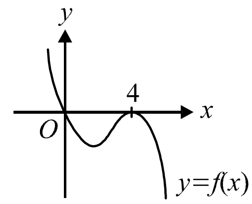


22. $f(x)$ 為遞增函數

$\Rightarrow$ 一階導函數 $f'(x)=3x^2+2x+a$ 恆不為負

$\Rightarrow$ 判別式 $2^2-4\times 3\times a\le 0 \Rightarrow a\ge \frac{1}{3}$，故選(A)

23. 由 $f(x)\ge 0$ 之解為 $x=4$ 或 $x\le 0$ 可知，$y=f(x)$ 圖形如下

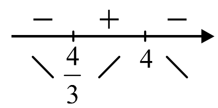


且 $f(x)=0$ 之解為 $x=0$ 或 4(重根)

$\therefore f(x)=ax(x-4)^2=ax^3-8ax^2+16ax$，其中 $a<0$

可得 $b=-8a>0$ 且 $c=16a<0$

$\because f'(x)=3ax^2-16ax+16a=a(3x-4)(x-4)$



$\therefore f(x)$ 在 $x=\frac{4}{3}$ 有極小值

又 $f''(x)=6ax-16a=a(6x-16)=0 \Rightarrow x=\frac{8}{3}$

可得反曲點為 $(\frac{8}{3}, f(\frac{8}{3}))$，故選(C)

24. $\because \lim_{x\to 0} x=0$

$\therefore \lim_{x\to 0}(\sqrt{a+bx}-2)=0 \Rightarrow \sqrt{a}-2=0 \Rightarrow a=4$

將 $a=4$ 代回原式得

$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4+bx}-2)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(4+bx)-2^2}{x(\sqrt{4+bx}+2)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{b}{\sqrt{4+bx}+2}=\frac{b}{4}$，可得 $\frac{b}{4}=3 \Rightarrow b=12$

$\therefore a+b=4+12=16$，故選(B)

25. $x^2+2|x|=\begin{cases} x^2+2x, & x\ge 0 \\ x^2-2x, & x<0 \end{cases}$

所求 $=\int_{-1}^{0}(x^2-2x)dx+\int_{0}^{1}(x^2+2x)dx$

$=(\frac{x^3}{3}-x^2)\Big|_{-1}^{0}+(\frac{x^3}{3}+x^2)\Big|_{0}^{1}=0-(-\frac{1}{3}-1)+(\frac{1}{3}+1)-0$

$=\frac{8}{3}$，故選(C)