111 學年度四技二專第四次聯合模擬考試
共同科目　數學(C)卷　詳解

數學(C)卷　111-4-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	A	D	B	A	B	C	A	C	C	D	D	A	C	D	B	A	B	B	B	D	B	C	A	D

1. 由題意可知：
$f(0)=f(1-1)=\dfrac{f(1)}{f(1)}=\dfrac{2}{2}=1$
且 $f(2-1)=\dfrac{f(2)}{f(1)}$
$\Rightarrow f(2)=f(1)\times f(1)=2\times 2=4$
$\therefore f(2)+f(0)=4+1=5$，故選(C)

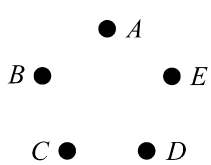
2. 點 $(2,-3)$ 代入直線 $3x+ay=9$
$\Rightarrow 3\times 2+a(-3)=9\Rightarrow a=-1$
∴直線方程式為 $3x-y=9$
$\Rightarrow \dfrac{3x}{9}-\dfrac{y}{9}=1\Rightarrow \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-9}=1$
故 x 截距為 3，y 截距為 -9
得截距和為 $3+(-9)=-6$，故選(A)

3. 若 a,b,c 均為實數且 $a^2+|b|+\sqrt{c}=0\Rightarrow a=b=c=0$
$\Rightarrow \begin{cases} x-2=0\cdots\cdots① \\ x-3y+1=0\cdots\cdots② \\ 2x-y+k=0\cdots\cdots③ \end{cases}$
由第①、②式可知 $x=2$，$y=1$
代回第③式可得 $k=-3$，故選(D)

4. (A) ×：利用角度轉換 $\sec(\dfrac{3}{2}\pi-\theta)=-\csc\theta\neq\cos\theta$
(B) ○：利用和角公式
$\sin 1\cos\dfrac{3}{4}+\cos\dfrac{3}{4}\sin\dfrac{1}{4}=\sin(\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4})=\sin 1$
(C) ×：週期為 $\dfrac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$
(D) ×：$3\sin x+2\cos x+1$ 的最大值為
$\sqrt{3^2+2^2}+1=\sqrt{13}+1$
故選(B)

5. 利用餘式定理可知：$f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 $f(1)$
由 $5f(1)-3f(1^2)+2f(1^3)+5=4\times 1^6+9$
$\Rightarrow 4f(1)=8\Rightarrow f(1)=2$，故選(A)

6. 如右圖
設 5 點為 A、B、C、D、E
密碼可能有 3 點或 4 點或 5 點
∴方法數為 $P_3^5+P_4^5+P_5^5$
$=60+120+120=300$
故選(B)



7. (A) ×：$\log_\pi \pi=1$
(B) ×：$\log_5 3+\log_5 4=\log_5(3\times 4)$
(C) ○：$\log_{\sqrt{2}}\sqrt{3}=\log_2 3=\log_4 9$
(D) ×：$\log_3(-5)^2=\log_3 25=\log_3 5^2=2\log_3 5$
故選(C)

8. 由題意可知 $AB=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$
$\Rightarrow \begin{bmatrix}4a+2b & 4c+2d\\ 3a+b & 3c+d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$
$\Rightarrow \begin{cases}4a+2b=2\\ 3a+b=0\end{cases}$ 且 $\begin{cases}4c+2d=0\\ 3c+d=2\end{cases}$
$\Rightarrow a=-1$，$b=3$，$c=2$，$d=-4$
$\Rightarrow B=\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix}$
$\det B=(-1)(-4)-2\times 3=-2$
故選(A)
[另解]
$AB=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=2I$
$\Rightarrow B=2A^{-1}=2\times\dfrac{1}{-2}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix}$
則 $\det B=(-1)(-4)-2\times 3=-2$
故選(A)

9. 設公比為 r
$\Rightarrow \begin{cases}a_1+a_2+a_3=224\\ a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=252\end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases}\dfrac{a_1(r^3-1)}{r-1}=224\\ \dfrac{a_1(r^6-1)}{r-1}=252\end{cases}$
二式相除得 $\dfrac{1}{r^3+1}=\dfrac{8}{9}\Rightarrow r^3=\dfrac{1}{8}\Rightarrow r=\dfrac{1}{2}$
代回第一式得到 $a_1=128$
$\therefore a_5=a_1\times r^4=128\times(\dfrac{1}{2})^4=8$
故選(C)

10. 由正弦定理可知 $\sin B=\dfrac{b}{2R}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$
由餘弦定理可知 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$
代回原式 $\Rightarrow 2\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\times\dfrac{b}{2R}=\dfrac{c}{2R}$
$\Rightarrow b^2-a^2=0\Rightarrow a=b$，故選(C)

[另解]

原式 $\Rightarrow 2\cos A\sin B=\sin(\pi-(A+B))$

$\Rightarrow 2\cos A\sin B=\sin(A+B)$

$\Rightarrow 2\cos A\sin B=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$\Rightarrow \cos A\sin B=\sin A\cos B$

$\Rightarrow \dfrac{\sin B}{\cos B}=\dfrac{\sin A}{\cos A}\Rightarrow \tan B=\tan A\Rightarrow \angle A=\angle B$

故選(C)

11. 由 $\tan\theta+\cot\theta=3\Rightarrow \sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{1}{3}$

由根與係數和

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{p}{3}$ 且 $\sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{q}{3}\Rightarrow q=1$

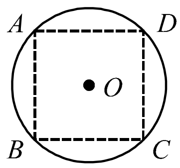
又 $\dfrac{p^2}{9}=(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{5}{3}$

$\Rightarrow p^2=15\quad \therefore p^2+3q=15+3=18$

故選(D)

12. 求式 $=|(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}|=2|\overrightarrow{AC}|$

$=2\times 2=4$，故選(D)



13. 設 $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$

$\dfrac{1}{|z|}=\dfrac{1\cdot(\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ)}{|z|(\cos\theta+i\sin\theta)}=\dfrac{1}{|z|}[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]$

$\because \dfrac{1}{|z|}<1\Rightarrow |z|>1\quad \therefore$在圓外

又 θ 與 $-\theta$ 對稱實軸，可知 z 在 M 點，故選(A)

[另解]

設 $z=a+bi$ (a 、 b 均為實數) $\Rightarrow \dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a+bi}=\dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$

實部為 $\dfrac{a}{a^2+b^2}>0$，虛部為 $\dfrac{-b}{a^2+b^2}<0$

$\Rightarrow a>0$， $b>0$

又 $\dfrac{1}{|z|}<1\Rightarrow |z|>1$，所以複數 z 最可能是 M 點

故選(A)

14. 取 E_1 之法向量為 $(1,-3,-2)$，E_2 之法向量為 $(2,1,3)$

設兩平面之夾角為 θ，則

$\cos\theta=\dfrac{1\times 2+(-3)\times 1+(-2)\times 3}{\sqrt{1^2+(-3)^2+(-2)^2}\sqrt{2^2+1^2+3^2}}$

$=\dfrac{2-3-6}{14}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow \theta=120^\circ$

$\therefore$銳夾角為 60°，故選(C)

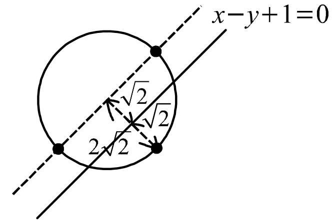
15. C：$x^2+y^2+2x-4y-3=0$

$\Rightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=8$

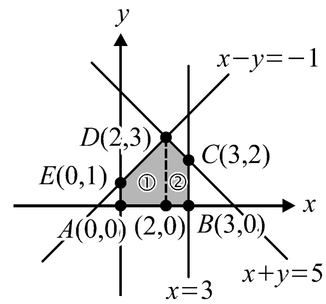
圓心為 $(-1,2)$，半徑為 $2\sqrt{2}$

又圓心到直線 L：$x-y+1=0$ 距離為

$\dfrac{|-1-2+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，故選(D)



16. 滿足聯立不等式方程組 $\begin{cases}0\le x\le 3\\ y\ge 0\\ x+y\le 5\\ x-y\ge -1\end{cases}$ 的圖形如下圖



區域面積為① + ② $=\dfrac{(1+3)\times 2}{2}+\dfrac{(3+2)\times 1}{2}=\dfrac{8+5}{2}=\dfrac{13}{2}$

故選(B)

17. 由 $F(-2,-2)$， $F'(8,-2)\Rightarrow$ 中心為 $(3,-2)$

由題意可知貫軸平行 x 軸

$\because$漸近線斜率為 $\dfrac{3}{4}\quad \therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{4}$

設 $a=4k$ ， $b=3k(k>0)$

$\because 2c=\overline{FF'}=10\quad \therefore c=5$

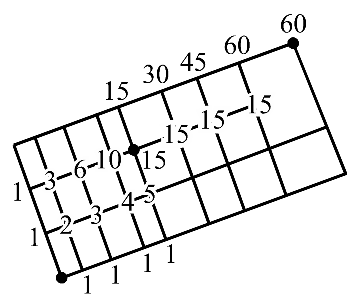
由 $c^2=a^2+b^2\Rightarrow 25=16k^2+9k^2\Rightarrow k=1$

可得 $a=4$， $b=3$

$\therefore$雙曲線方程式為 $\dfrac{(x-3)^2}{16}-\dfrac{(y+2)^2}{9}=1$

故選(A)

18. 利用累加法即可得到共 60 種方法，故選(B)



19. 原式 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{x}}-2}{\sqrt{x}-2}$

$=\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{x}}-2}{\sqrt{x}-2}\times\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{x}}+2}{\sqrt{2+\sqrt{x}}+2}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(\sqrt{2+\sqrt{x}})^2-2^2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{2+\sqrt{x}}+2)}$

$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{2+\sqrt{x}+2})}$

$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{x}}+2}=\dfrac{1}{4}$

故選(B)

20. $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$

$\Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b \Rightarrow f''(x)=6x+2a$

$\because$反曲點$(2,-8)$

$\therefore f''(2)=0$ 且 $f(2)=-8$

$\Rightarrow f''(2)=6\times 2+2a=0 \Rightarrow a=-6$

又 $f(2)=2^3-6\cdot 2^2+b\cdot 2+2=-8 \Rightarrow b=3$

$\therefore a+2b=-6+3\times 2=0$，故選(B)

21. 設點 P $(2\cos\theta, 4\sin\theta)$，其中 $0°<\theta<90°$

則 $\overrightarrow{OP}=(2\cos\theta, 4\sin\theta)$，$\overrightarrow{AP}=(2\cos\theta, 4\sin\theta-4)$

$\because \overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{AP}$

$\therefore (2\cos\theta, 4\sin\theta)\cdot(2\cos\theta, 4\sin\theta-4)=0$

$\Rightarrow 4\cos^2\theta+16\sin^2\theta-16\sin\theta=0$

$\Rightarrow 4(1-\sin^2\theta)+16\sin^2\theta-16\sin\theta=0$

$\Rightarrow 12\sin^2\theta-16\sin\theta+4=0$

$\Rightarrow 3\sin^2\theta-4\sin\theta+1=0$

$\Rightarrow (3\sin\theta-1)(\sin\theta-1)=0$

$\Rightarrow \sin\theta=\dfrac{1}{3}$ 或 $\sin\theta=1$ (不合)

則 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，得 $P(\dfrac{4\sqrt{2}}{3},\dfrac{4}{3})$

$\therefore \overline{OP}=\sqrt{(\dfrac{4\sqrt{2}}{3}-0)^2+(\dfrac{4}{3}-0)^2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

故選(D)

22. 設至少 n 天才打通，則

$\dfrac{[2\times 100+(n-1)\times 50]\times n}{2}+\dfrac{[2\times 50+(n-1)\times 30]\times n}{2}\geq 2000$

$\Rightarrow \dfrac{n}{2}(8n+22)\geq 200 \Rightarrow 4n^2+11n-200\geq 0$

$\Rightarrow n\geq\dfrac{-11+\sqrt{11^2-4\cdot 4\cdot(-200)}}{2\cdot 4}$

$=\dfrac{-11+\sqrt{3321}}{8}\doteq\dfrac{46.6}{8}=5.8$

$\Rightarrow$ 至少要 6 天才會打通隧道，故選(B)

[另解]

天數	1	2	3	4	5	6
大鑽	100	150	200	250	300	350
小鑽	50	80	110	140	170	200
累計總和	150	380	690	1080	1550	2100

23. $\begin{cases} y=-x^2 \\ y=mx \end{cases} \Rightarrow x(x+m)=0 \Rightarrow x=0$ 或 $x=-m$

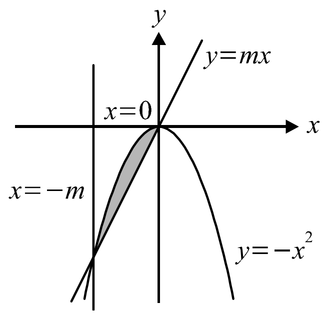
所以圍成面積為

$\int_{-m}^{0}[(-x^2)-(mx)]dx=(-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{m}{2}x^2)\Big|_{-m}^{0}$

$=(0+0)-(\dfrac{m^3}{3}-\dfrac{m^3}{2})=-\dfrac{m^3}{3}+\dfrac{m^3}{2}=\dfrac{m^3}{6}$

則 $\dfrac{m^3}{6}=\dfrac{4}{3}\Rightarrow m^3=8\Rightarrow m=2$

$\therefore C_2^6=\dfrac{6\times 5}{2!}=15$，故選(C)



24. $\because 3^{\frac{1}{x}}\cdot 3^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=3^4 \Rightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=4$

由算幾不等式可知：

$\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}\geq\sqrt{\dfrac{1}{x\cdot y}} \Rightarrow \dfrac{4}{2}\geq\dfrac{1}{\sqrt{x\cdot y}} \Rightarrow \sqrt{x\cdot y}\geq\dfrac{1}{2} \Rightarrow x\cdot y\geq\dfrac{1}{4}$

$\therefore \log_2 x+\log_2 y=\log_2(x\cdot y)\geq\log_2\dfrac{1}{4}=-2$

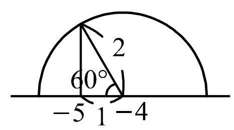
故選(A)

25. $\int_{-5}^{10}f(x)dx$ 的值即為灰底之 x 軸上方面積和 $-$ x 軸下方面積和 $=A-B+C$，如下圖

$A=\dfrac{1}{2}\times 1\times 2\times\sin 60°+\dfrac{1}{2}\times 2^2\times\dfrac{2}{3}\pi$

(三角形面積＋扇形面積)

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{4\pi}{3}$



$B=\dfrac{1}{2}\times 6\times 2=6$，$C=\dfrac{1}{2}\times(2+6)\times 2=8$

$\therefore \int_{-5}^{10}f(x)dx=(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{4\pi}{3})-6+8=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{4\pi}{3}+2$

故選(D)