111 學年度四技二專第三次聯合模擬考試
共同科目　數學(C)卷　詳解

數學(C)卷 111-3-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	A	A	C	D	B	C	D	B	D	B	C	A	D	B	D	B	A	A	C	A	D	B	C	B

1. 所求 $=(4^{\frac{1}{2}})^3+3-\log_3 3^4$
$=2^3+3-4=8+3-4=7$，故選(C)

2. $x\le -\dfrac{2}{3}$ 或 $x\ge 1$
$\Rightarrow (3x+2)(x-1)\ge 0$
$\Rightarrow 3x^2-x-2\ge 0$
$\Rightarrow -3x^2+x+2\le 0$ 與不等式 $kx^2+x+2\le 0$ 比較係數
得 $k=-3$，故選(A)

3. 依題意所求即首項為 3，公比為 2，項數為 $\dfrac{55}{5}+1=12$ 的等比級數
故所求 $=\dfrac{3\times(2^{12}-1)}{2-1}=12285$，約有 12000 人，選(A)

4. 所求 $=\left|\begin{vmatrix}2&4&1\\3&5&-2\\1&-3&1\end{vmatrix}\right|$
$=|10+(-8)+(-9)-5-12-12|=36$
故選(C)

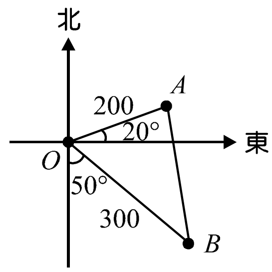
5. (1) 3 男 2 女，有 $C_3^6\times C_2^5=20\times 10=200$ 種
(2) 2 男 3 女，有 $C_2^6\times C_3^5=15\times 10=150$ 種
共有 $200+150=350$ 種
故選(D)

6. 設需加入 x 毫升的 95%酒精
則 $\dfrac{95\%\cdot x+50\%\cdot 400}{x+400}=75\%$
$\Rightarrow 0.95x+200=0.75x+300$
$\Rightarrow 0.2x=100$
$\Rightarrow x=500$，故選(B)

7. $t\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=t(2,-1)+(4,3)=(2t+4,-t+3)$
$2\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}=2(4,3)-(3,-2)=(5,8)$
因 $t\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 與 $2\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}$ 平行
得 $\dfrac{2t+4}{5}=\dfrac{-t+3}{8}\Rightarrow 16t+32=-5t+15$
$\Rightarrow 21t=-17\Rightarrow t=-\dfrac{17}{21}$，故選(C)

8. $Z_1=-\sin 20^\circ-i\cos 20^\circ=-\cos 70^\circ-i\sin 70^\circ$
$=\cos 250^\circ+i\sin 250^\circ$
$Z_2=1+i=\sqrt{2}(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i)=\sqrt{2}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$
$\therefore Z_1Z_2=(\cos 250^\circ+i\sin 250^\circ)\cdot[\sqrt{2}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)]$
$=\sqrt{2}(\cos 295^\circ+i\sin 295^\circ)$
得 $\mathrm{Arg}(Z_1Z_2)=295^\circ$，故選(D)

9. 如下圖，O 為觀測點，$\angle AOB=60^\circ$，利用餘弦定理可知
$\overline{AB}^2=200^2+300^2-2\times 200\times 300\times\cos 60^\circ=70000$
得 $\overline{AB}=100\sqrt{7}$ 公尺，故選(B)



10. $\overrightarrow{f_S}$ 即為 $\overrightarrow{f}$ 在 $\overrightarrow{s}$ 上的正射影
$\overrightarrow{f_S}=\dfrac{4\times 2+7\times 1}{2^2+1^2}\times(2,1)=3\times(2,1)=(6,3)$
故選(D)

11. 依題意可知第 1 天最高高度為 17，第 2 天最高高度為 $17-9+17=25$，第 3 天最高高度為 $25-9+17=33$，即首項為 17，公差為 8 的等差數列。又 $17+8(n-1)<200\Rightarrow 8(n-1)<183\Rightarrow n<23.\sim$
則 $17+8\times(23-1)=193$，則第 23 天最高高度為 193
$\therefore$第 24 天可爬上藤架頂，故選(B)

12. 英文字各有 26 個選擇，前 3 個數字各有 10 個選擇，第 4 個數字不可以是 7，有 9 個選擇
故最多有 $26\times 26\times 10\times 10\times 10\times 9=6084000$ 張
選(C)

13. $AB=\begin{bmatrix}1&9\\9&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&29\\17&42\end{bmatrix}$
故密碼為 10291742，故選(A)

14. 由矩陣 $\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&-2\\0&1&2&5\\0&0&1&2\end{array}\right]$ 對應方程組 $\begin{cases}x+2y-z=-2\\y+2z=5\\z=2\end{cases}$
解得 $x=-2$，$y=1$，$z=2$
將 $(x,y,z)=(-2,1,2)$ 代入 $2x+5y+az=1$
得 $-4+5+2a=1\Rightarrow a=0$
將 $(x,y,z)=(-2,1,2)$ 代入 $3x+y+z=b$
得 $-6+1+2=b\Rightarrow b=-3$
$\therefore a+b=0+(-3)=-3$
故選(D)

15. 設芮氏規模 5 的地震所釋放的能量為 E_1
設芮氏規模 4 的地震所釋放的能量為 E_2

則 $\log E_1 = 4.8 + 1.5 \times 5$，$\log E_2 = 4.8 + 1.5 \times 4$

得 $\log E_1 - \log E_2 = 1.5 \Rightarrow \log \dfrac{E_1}{E_2} = 1.5$

$\Rightarrow \dfrac{E_1}{E_2} = 10^{1.5} = 10^{\frac{3}{2}} = 10\sqrt{10}$，故選(B)

16. 設 $f(x) = (x^2 + x - 2) \cdot Q(x) + ax + b$

$= (x-1)(x+2) \cdot Q(x) + ax + b$

則 $f(1) = a + b = 5$，$f(-2) = -2a + b = -1$

解得 $a = 2$，$b = 3$，即所求餘式為 $2x + 3$

故選(D)

17. 設圓心為 O，$\angle BOC = \theta$

則 $2 \times \theta = \dfrac{2}{3}\pi \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3}$

故 $\angle BAC = \dfrac{1}{2}\theta = \dfrac{\pi}{6}$

由正弦定理可知

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin A} = 2R \Rightarrow \dfrac{\overline{BC}}{\sin\dfrac{\pi}{6}} = 2 \times 2 \Rightarrow \overline{BC} = 2$

故選(B)

18. 由振幅 2，得新方程式為 $y = 2\sin x$

再由最大值 3，得新方程式為 $y = 2\sin x + 1$

再由週期 4π，$\dfrac{2\pi}{|\alpha|} = 4\pi \Rightarrow \alpha = \pm\dfrac{1}{2}$

得新方程式為 $y = 2\sin(\pm\dfrac{1}{2})x + 1$，故選(A)

19. [法一]

由綜合除法

$$
\begin{array}{l}
3-4+5+1\,|\,1 \\
\quad +3-1+4 \\
\hline
3-1+4\,|\,+5 \\
\quad +3+2 \\
\hline
3+2\,|\,+6 \\
\quad +3 \\
\hline
3\,|\,+5
\end{array}
$$

得 $a = 3$，$b = 5$，$c = 6$，$d = 5$

所求 $= 3 + 5 + 6 + 2 \times 5 = 24$

故選(A)

[法二]

令 $x = 2$ 代入，得 $19 = a + b + c + d$

令 $x = 1$ 代入，得 $5 = d$

$\therefore a + b + c + 2d = (a + b + c + d) + d = 19 + 5 = 24$

故選(A)

20. 取 E_1 的法向量為 $\overrightarrow{n_1} = (4, 5, 3)$

$|\overrightarrow{n_1}| = \sqrt{4^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{50}$

取 E_2 的法向量為 $\overrightarrow{n_2} = (3, 5, -4)$

$|\overrightarrow{n_2}| = \sqrt{3^2 + 5^2 + (-4)^2} = \sqrt{50}$

則 $\cos\theta = \dfrac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = \dfrac{|12 + 25 - 12|}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{50}} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \theta = 60^\circ$，故選(C)

21. $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 2)$，$\overrightarrow{AC} = (3, 2, 4)$

得 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) = (4, 2, -4)$

取平面 E 的法向量為 $(2, 1, -2)$

$\therefore E：2(x-1) + 1 \cdot (y-3) - 2(z-1) = 0$

$\Rightarrow E：2x + y - 2z - 3 = 0$

所求 $d(P, E) = \dfrac{|2 \times (-1) + (-3) - 2 \times 2 - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}}$

$= \dfrac{|-12|}{3} = 4$，故選(A)

22. $\sin 2\theta = \cos\theta$

$\Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta = \cos\theta$

$\Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$

$\Rightarrow \cos\theta(2\sin\theta - 1) = 0$

$\Rightarrow \cos\theta = 0$ 或 $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$

$\cos\theta = 0$，得 $\theta = 90^\circ$ 或 270°

$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$，得 $\theta = 30^\circ$ 或 150°

故總和為 $90^\circ + 270^\circ + 30^\circ + 150^\circ = 540^\circ$

故選(D)

23. 將 $P(3, k)$ 代入圓 C

得 $3^2 + (k-1)^2 = 13 \Rightarrow (k-1)^2 = 4$

$\Rightarrow k - 1 = \pm 2 \Rightarrow k = 3$ 或 -1

$\because$ 點 $P(3, k)$ 在第四象限　$\therefore k = -1$

圓 C 的圓心為 $Q(0, 1)$

得 $\overline{PQ}$ 的斜率為 $\dfrac{-1-1}{3-0} = -\dfrac{2}{3}$

則所求切線 L 的斜率為 $m = \dfrac{3}{2}$

得 $k + m = (-1) + \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2}$，故選(B)

24. [法一]

可知 $\overline{AC} \perp \overline{BQ}$，設 $\overline{AC}$ 中點為 M

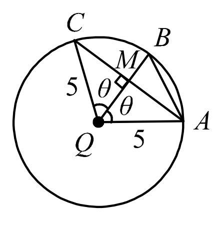
得 $\overline{AM} = 4$，則 $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$，$\cos\theta = \dfrac{3}{5}$

ΔABQ 面積：ΔACQ 面積

$= \dfrac{1}{2} \times 5^2 \times \sin\theta：\dfrac{1}{2} \times 5^2 \times \sin 2\theta$

$= \sin\theta：2\sin\theta\cos\theta = 1：2\cos\theta$

$= 1：2 \times \dfrac{3}{5} = 5：6$，故選(C)



[法二]

ΔAQM 中，$\overline{AM} = 4$、$\overline{QM} = 3$

$\overline{BM} = \overline{BQ} - \overline{QM} = 5 - 3 = 2$

$\therefore \Delta ABM$ 面積：ΔAQM 面積 $= 2：3$

$\therefore \Delta ABQ$ 面積：ΔACQ 面積

$= (\Delta ABM + \Delta AQM)$ 面積：$2\Delta AQM$ 面積

$= (2+3)：(2 \times 3) = 5：6$，故選(C)

25. [法一]

圓 C 的圓心 $Q(0,0)$，半徑 $r=2$

令直線 L：$3x-4y+2=k \Rightarrow L$：$3x-4y+2-k=0$

則 $d(Q,L)\le r \Rightarrow \dfrac{|2-k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}<2 \Rightarrow |k-2|<10$

$\Rightarrow -10<k-2<10 \Rightarrow -8<k<12$

故 $3x-4y+2$ 的最大值為 12，選(B)

[法二]

由柯西不等式：$(x^2+y^2)[3^2+(-4)^2]\ge(3x-4y)^2$

$\Rightarrow 4\times 25\ge(3x-4y)^2 \Rightarrow -10\le 3x-4y\le 10$

$\Rightarrow -8\le 3x-4y+2\le 12$

故 $3x-4y+2$ 的最大值為 12，選(B)

[法三]

利用圓的參數式可知 $\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases}$，$0\le\theta<2\pi$

則 $3x-4y+2=3(2\cos\theta)-4(2\sin\theta)+2$

$=6\cos\theta-8\sin\theta+2\le\sqrt{6^2+(-8)^2}+2=12$

故選(B)