110 學年度四技二專第四次聯合模擬考試
共同科目　數學(C)卷　詳解

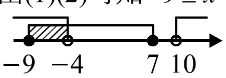
數學(C)卷 110-4-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	D	A	D	B	C	C	B	A	A	C	C	D	B	B	A	D	C	B	D	A	D	D	A	B

1. $\because f(x)=-x^2-2x=-(x^2+2x+1^2)+1=-(x+1)^2+1$
$\therefore$拋物線頂點為 $(-1,1)$
由圖可知直線 $y=g(x)$ 的斜率為正，且點 $(-1,1)$ 在直線 $y=g(x)$ 上方　$\therefore g(-1)<1$
(A) $g(-1)=-\dfrac{3}{2}+3=\dfrac{3}{2}>1$(不合)
(B) $g(-1)=-1+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}<1$
(C) $g(-1)=-\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{3}=1$(不合)
(D) 直線 $y=g(x)$ 的斜率為 $-1<0$(不合)
故選(B)

2. (A) 反例：當 $a=-1$、$b=-2$、$c=-3$ 時，$ab=2$、$ac=3\Rightarrow ab<ac$
(B) $\because \dfrac{3a+2b}{5}-\dfrac{3a+b}{4}=\dfrac{(12a+8b)-(15a+5b)}{20}$
$=\dfrac{3}{20}(b-a)<0$　$\therefore \dfrac{3a+2b}{5}<\dfrac{3a+b}{4}$
(C) 反例：當 $a=-2$、$b=-2$ 時，$\dfrac{a+b}{2}=-2$、$\sqrt{ab}=\sqrt{4}=2\Rightarrow \dfrac{a+b}{2}<\sqrt{ab}$
(D) 由柯西不等式可知
$(a^2+b^2)(b^2+c^2)=(a^2+b^2)(c^2+b^2)\geq(ac+b^2)^2$
當等號成立時，需 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{b}=1$，但 $a>c$　$\therefore \dfrac{a}{c}\neq 1$
等號不會成立，即 $(a^2+b^2)(b^2+c^2)>(ac+b^2)^2$
故選(D)

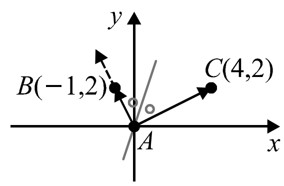
3. (1) $|x-3|>7\Rightarrow x-3<-7$ 或 $x-3>7$
$\Rightarrow x<-4$ 或 $x>10$
(2) $|x+1|\leq 8\Rightarrow -8\leq x+1\leq 8\Rightarrow -9\leq x\leq 7$
由(1)(2)可知 $-9\leq x<-4$



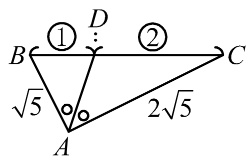
即 $a=-5$、$b=-9\Rightarrow a-b=-5-(-9)=4$，故選(A)

4. 設圓心為 $O(h,0)$，由 $\overline{OA}=\overline{OB}$
$\Rightarrow \sqrt{(h+1)^2+(0-4)^2}=\sqrt{(h-1)^2+(0-2)^2}$
$\Rightarrow h^2+2h+17=h^2-2h+5\Rightarrow h=-3$
$\therefore$圓心 $O(-3,0)$，且半徑為 $\overline{OA}=\sqrt{(-3+1)^2+(0-4)^2}$
$=\sqrt{20}$，可得圓方程式為 $(x+3)^2+y^2=20$
$\Rightarrow x^2+y^2+6x-11=0$　$\therefore f=-11$，故選(D)

5. [法一]



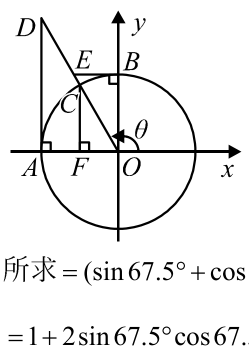
由 $\overrightarrow{AB}=(-1,2)$、$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{5}$
$\overrightarrow{AC}=(4,2)$、$|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{5}=2|\overrightarrow{AB}|$
可知所求向量平行於 $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2(-1,2)+(4,2)$
$=(2,6)=2(1,3)$
[法二]



ΔABC 中，設 $\angle BAC$ 的角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D 點
$\because \overline{AB}=\sqrt{5}$、$\overline{AC}=2\sqrt{5}$
$\therefore \overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}=1:2$
由分點公式可知
$D(\dfrac{1\times 4+2\cdot(-1)}{1+2},\dfrac{1\times 2+2\times 2}{1+2})=(\dfrac{2}{3},2)$
可知所求向量平行於 $\overrightarrow{AD}=(\dfrac{2}{3},2)=\dfrac{2}{3}(1,3)$，故選(B)

6. 所求體積 $=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|(3,-1,2)\cdot(-2,5,1)|$
$=|-6-5+2|=9$，故選(C)

7. 考慮 θ 終邊上 E 點，設 E 點坐標為 (x,y)，則由定義可知 $\cot\theta=\dfrac{x}{y}$　$\Rightarrow|\cot\theta|=|\dfrac{x}{y}|$，又 $x=-\overline{BE}$、$y=\overline{OB}=1$　$\therefore|\cot\theta|=\left|\dfrac{-\overline{BE}}{\overline{OB}}\right|=\overline{BE}$，故選(C)



8. 所求 $=(\sin 67.5^\circ+\cos 67.5^\circ)^2-\tan 67.5^\circ\times\cot 67.5^\circ$
$=1+2\sin 67.5^\circ\cos 67.5^\circ-1=\sin 135^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故選(B)

9. 原式 $\Rightarrow 2\sin^3\theta-(1-\sin^2\theta)-5\sin\theta+3=0$
$\Rightarrow 2\sin^3\theta+\sin^2\theta-5\sin\theta+2=0$

再由一次因式檢驗法及綜合除法

$$\begin{array}{l|l} 2+1-5+2 & 1 \\ \quad +2+3-2 & \\ \hline 2+3-2 & +0 \end{array}$$

可得 $(\sin x-1)(2\sin^2 x+3\sin x-2)=0$

$\Rightarrow(\sin x-1)(2\sin x-1)(\sin x+2)=0$

$\Rightarrow\sin x=1$、$\dfrac{1}{2}$或-2(不合)

(1) 當 $\sin x=1\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}$

(2) 當 $\sin x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{6}$、$\dfrac{5\pi}{6}$

∴所求為$\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{5\pi}{6}=\dfrac{3\pi}{2}$，故選(A)

10. 原式等號兩側同乘 $(x+2)^4$

得 $x^3+4x^2+5x-1=A(x+2)^3+B(x+2)^2+C(x+2)+D$

由連續綜合除法可得

$$\begin{array}{l|l} 1+4+5-1 & -2 \\ \quad -2-4-2 & \\ \hline 1+2+1 & -3=D \\ \quad -2+0 & \\ \hline 1+0 & +1=C \\ \quad -2 & \\ \hline A=1 & -2=B \end{array}$$

∴ $A\times B\times C\times D=1\times(-2)\times1\times(-3)=6$，故選(A)

11. 所求 $=100000(1+1.25\%)^5-100000(1+1\%)^5$

$=100000(1.0125^5-1.01^5)$

$\fallingdotseq 100000(1.064-1.051)=1300$ 元，故選(C)

12. [法一]

原式 $\Rightarrow 2+3+4+\cdots+n=65$

上式為首項是 2、末項是 n、項數是 $n-1$ 的等差級數

$\therefore\dfrac{(n-1)(2+n)}{2}=65\Rightarrow n^2+n-132=0$

$\Rightarrow(n-11)(n+12)=0\Rightarrow n=11$ 或 -12(不合)

[法二]

由巴斯卡定理

原式 $\Rightarrow C_0^2+C_1^2+C_2^3+C_3^4+\cdots+C_{n-1}^n=C_0^2+65$

$\Rightarrow C_1^3+C_2^3+C_3^4+\cdots+C_{n-1}^n=66$

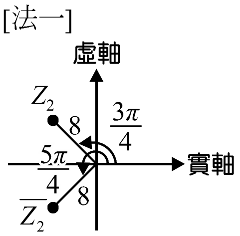
⋮　　　⋮

$\Rightarrow C_{n-1}^{n+1}=66\Rightarrow C_2^{n+1}=66\Rightarrow\dfrac{(n+1)\cdot n}{2}=66$

$\Rightarrow n^2+n-132=0$

$\Rightarrow n=11$ 或 -12(不合)，故選(C)

13. [法一]



$\because Z_1=2(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4})$

又 $\overline{Z_2}=8(\cos\dfrac{5\pi}{4}+i\sin\dfrac{5\pi}{4})\Rightarrow Z_2=8(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4})$

$\therefore\dfrac{Z_2}{Z_1}=\dfrac{8}{2}[\cos(\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4})+i\sin(\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4})]$

$=4(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2})=4i$

[法二]

由 $\overline{Z_2}=8(\cos\dfrac{5\pi}{4}+i\sin\dfrac{5\pi}{4})=8(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i)=-4\sqrt{2}-4\sqrt{2}i$

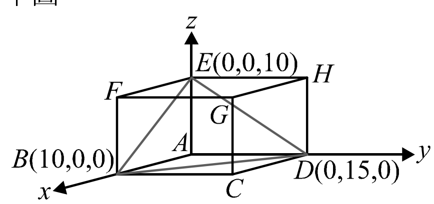
$\Rightarrow Z_2=-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i$，可得 $\dfrac{Z_2}{Z_1}=\dfrac{-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}=4i$，故選(D)

14. (1) 若第一、三列為女生，第二列為男生，則有 $P_4^6\times P_2^4=4320$ 種

(2) 若第一、三列為男生，第二列為女生，則有 $P_4^4\times P_2^6=720$ 種

∴所求為 $4320+720=5040$ 種，故選(B)

15. 將長方體之 A 點置於空間坐標系之原點，並坐標化如下圖



可得平面 BDE 之方程式為 $\dfrac{x}{10}+\dfrac{y}{15}+\dfrac{z}{10}=1$

$\Rightarrow 3x+2y+3z-30=0$，所求即原點 A 到平面 BDE 之距離 $=\dfrac{|-30|}{\sqrt{3^2+2^2+3^2}}=\dfrac{15\sqrt{22}}{11}$ 公分，故選(B)

16. 原式 $\Rightarrow\log_2 2^x+\log_2(2^x-\dfrac{1}{2})=\log_2 3-\log_2 2$

$\Rightarrow\log_2[2^x(2^x-\dfrac{1}{2})]=\log_2\dfrac{3}{2}\Rightarrow 2^{2x}-\dfrac{1}{2}\cdot 2^x=\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow 2(2^x)^2-(2^x)-3=0\Rightarrow[2(2^x)-3](2^x+1)=0$

$\Rightarrow 2^x=\dfrac{3}{2}$ 或 -1(不合)$\Rightarrow x=\log_2\dfrac{3}{2}$

∴所求為 $4^{\log_2\frac{3}{2}}=4^{\log_4\frac{9}{4}}=\dfrac{9}{4}$，故選(A)

17. 3351 億 $=335{,}100{,}000{,}000=3.351\times10^{11}$，可得 $a=3.351$、$n=11$，而 $\log3<\log3.351<\log4=2\log2$

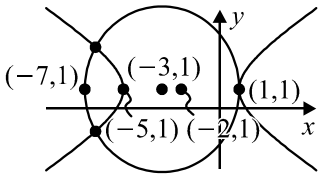
$\Rightarrow 0.4771<\log3.351<0.602\Rightarrow 0.4771<\log a<0.602$

$10^{0.4771}<a<10^{0.61}$，故選(D)

18. Γ_1 為一貫軸平行 x 軸的雙曲線，中心 $(-2,1)$，半貫軸長為 3，半共軛軸長為 2

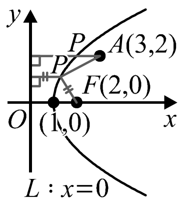
Γ_2 為一長軸平行 y 軸的橢圓，中心 $(-3,1)$，半長軸長為 $\sqrt{17}$，半短軸長為 4

作圖如下，可知有三個交點，故選(C)



19. 由 Γ：$y^2=4(x-1)$ 可知拋物線開口向右，焦距 $=1$、頂點 $(1\,,0)$、焦點 $F(2\,,0)$、準線 L：$x=0$

且 $\overline{PF}=d(P\,,L)$，並作圖如下



$\because \overline{AP}+\overline{PF}=\overline{AP}+d(P\,,L)\ge d(A\,,L)$

$\therefore$ 所求 $=d(A\,,L)=3$，故選(B)

20. 原增廣矩陣代表的三元一次方程組爲

$\begin{cases}(a-1)x+y-z=1\\ ax+ay-z=-1\\ (a-3)z=0\end{cases}$　$\because$ 恰一組解 $\Rightarrow \Delta\ne 0$

又 $\Delta=\begin{vmatrix}a-1 & 1 & -1\\ a & a & -1\\ 0 & 0 & a-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a-2 & 1 & -1\\ 0 & a & -1\\ 0 & 0 & a-3\end{vmatrix}$

(−1)

$=a(a-2)(a-3)\ne 0$　$\therefore a\ne 0$、2、3，故選(D)

21. $\because A^3\cdot A=A^4\Rightarrow A=(A^3)^{-1}\cdot A^4$

$=-\dfrac{1}{8}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 3 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16 & 0\\ -5 & 1\end{bmatrix}=-\dfrac{1}{8}\begin{bmatrix}-16 & 0\\ 8 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix}$

$\therefore a+b+c+d=2+(-1)+0+(-1)=0$，故選(A)

22. $2+2r+2r^2+\cdots=3r+4\Rightarrow \dfrac{2}{1-r}=3r+4$

$\Rightarrow 2=(1-r)(3r+4)\Rightarrow 3r^2+r-2=0$

$\Rightarrow (3r-2)(r+1)=0\Rightarrow r=\dfrac{2}{3}$ 或 -1 (不合　$\because |r|<1$)

$\therefore r=\dfrac{2}{3}$，故選(D)

23. 所求 $=2\lim\limits_{2h\to 0}\dfrac{f(2+2h)-f(2)}{2h}=2f'(2)$

$=2\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=2\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\dfrac{x(x+1)(x-2)}{(x-1)(x-3)}-0}{x-2}$

$=2\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x+1)}{(x-1)(x-3)}=2\times\dfrac{2\times 3}{1\times(-1)}=-12$，故選(D)

24. 設 $F'(x)=f(x)$，則 $\int_1^x f(t)dt=F(x)-F(1)$

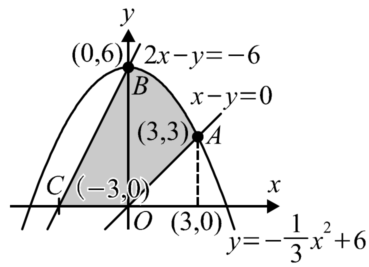
$\Rightarrow \dfrac{2x+1}{x-1}=F(x)-F(1)\Rightarrow F(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}+F(1)$

$\Rightarrow F'(x)=\dfrac{2(x-1)-(2x+1)}{(x-1)^2}\Rightarrow f(x)=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$

$\therefore f(2)=\dfrac{-3}{(2-1)^2}=-3$，故選(A)

25. 作圖如下，並解得 $x-y=0$ 與 $y=-\dfrac{1}{3}x^2+6$

在第一象限的交點爲 $A(3\,,3)$



所求即區域 $OABC$ 面積 $=\Delta OBC$ 面積 $+$ 區域 OAB 面積

$=\dfrac{1}{2}\times 3\times 6+\int_0^3(-\dfrac{1}{3}x^2+6-x)dx$

$=9+(-\dfrac{x^3}{9}-\dfrac{x^2}{2}+6x)\Big|_0^3=9+(-3-\dfrac{9}{2}+18)=\dfrac{39}{2}$

故選(B)