

109 學年度四技二專第五次聯合模擬考試 共同科目 數學(C)卷 詳解

數學(C)卷

109-5-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	B	A	B	C	D	C	B	D	B	C	D	D	A	C	C	D	A	D	A	B	B	B	C	A

1. $\vec{a} + \vec{b} = (2 + (-3), -1 + 4) = (-1, 3)$
 $\vec{a} - 2\vec{b} = (2 - (-6), -1 - 8) = (8, -9)$
 $\Rightarrow (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = (-1, 3) \cdot (8, -9)$
 $= -1 \times 8 + 3 \times (-9) = -35$ ，故選(A)
2. 直線 AB 的斜率為 $\frac{4 - (-3)}{8 - 1} = 1$
 \Rightarrow 選項(A)的斜率為 -1，其他選項斜率皆為 1
 斜率為 1 的直線圖形若要經過第二象限，x 截距須小於零，y 截距須大於零，故選(B)
3. $27^{1-a} = (3^3)^{1-a} = (3^{1-a})^3 = (\frac{3}{4})^3 = \frac{27}{64}$ ，故選(A)
4. 首項為 $\frac{3}{4}$ ，公比為 $-\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = -\frac{2}{3}$ ，前 7 項的和為
 $\frac{\frac{3}{4}[1 - (-\frac{2}{3})^7]}{1 - (-\frac{2}{3})} = \frac{3}{4} \times \frac{2315}{2187} \times \frac{3}{5} = \frac{463}{972} \approx 0.48$ ，故選(B)
5.
$$\begin{array}{ccc} & \times(-1) & \\ \left| \begin{array}{ccc} 110 & 109 & 108 \\ 2021 & 2020 & 2019 \\ 502 & 501 & 600 \end{array} \right| & = & \left| \begin{array}{ccc} 110 & -1 & -2 \\ 2021 & -1 & -2 \\ 502 & -1 & 98 \end{array} \right| \\ & \times(-1) & \end{array}$$

$$= 100 \cdot \left| \begin{array}{cc} 110 & -1 \\ 2021 & -1 \end{array} \right|$$

$$= 100 \cdot [-110 - (-2021)] = 191100$$
，故選(C)
6. (A) $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \times 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$
 $\therefore -1 \leq \sin 2\theta \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \sin 2\theta \leq \frac{1}{2}$
 (B) 若 $\theta \in \text{II}$ ， $\tan \theta < 0$ ， $\sec \theta < 0$ ， $\sin \theta > 0$
 $\Rightarrow \tan \theta + \sec \theta < \sin \theta$
 (C) 若 $\theta \in \text{II}$ ， $\csc \theta > 0$ ， $\cot \theta < 0 \Rightarrow \csc \theta \cot \theta < 0$
 (D) $\sin \theta + \cos \theta = \cos \theta + \sin \theta$
 $= \sqrt{1^2 + 1^2} (\cos \theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin \theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}})$
 $= \sqrt{2} (\cos \theta \cos \frac{\pi}{4} + \sin \theta \sin \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos(\theta - \frac{\pi}{4})$
 故選(D)
7. $f(-\frac{1}{2}) = 8 \times \frac{1}{16} - 4 \times (-\frac{1}{8}) + 6 \times (-\frac{1}{2}) + 4$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 3 + 4 = 2$$

或利用綜合除法

$$\begin{array}{r|l} 8 & -4 & 0 & 6 & 4 \\ -4 & 4 & -2 & -2 & \\ \hline 8 & -8 & 4 & 4 & 2 \end{array} - \frac{1}{2}$$

則 $f(-\frac{1}{2}) = 2$ ，故選(C)

8. (A) 圓心 (2, 1) 代入直線 $x + 2y = 0 \Rightarrow 2 + 2 \cdot 1 \neq 0$ 不在直線 $x + 2y = 0$ 上
 (B) 圓心 (2, -1) 代入直線 $x + 2y = 0 \Rightarrow 2 + 2 \cdot (-1) = 0$ 有在直線 $x + 2y = 0$ 上，點 (-2, -4) 代入圓 $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25 \Rightarrow (-2-2)^2 + (-4+1)^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow$ 點在圓上
 (C) 原式 $= (x^2 - 8x + 4^2) + (y + 4y + 2^2) = -12 + 16 + 4 \Rightarrow (x-4)^2 + (y+2)^2 = 8$ ，圓心 (4, -2) 代入直線 $x + 2y = 0 \Rightarrow 4 + 2 \cdot (-2) = 0$ 有在直線 $x + 2y = 0$ 上，點 (-2, -4) 代入圓 $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 8 \Rightarrow (-2-4)^2 + (-4+2)^2 = 36 + 4 \neq 8 \Rightarrow$ 點不在圓上
 (D) 原式 $= (x^2 + 4x + 2^2) + (y^2 - 8y + 4^2) = 44 + 4 + 16 \Rightarrow (x+2)^2 + (y-4)^2 = 64$ ，圓心 (-2, 4) 代入直線 $x + 2y = 0 \Rightarrow -2 + 2 \cdot 4 \neq 0$ 不在直線 $x + 2y = 0$ 上
 故選(B)
9. $f(x)$ 除以 $(x+2)$ 餘式為 -3，根據餘式定理， $f(-2) = -3$ ，令 $f(x) = (x^2 - 3x - 10) \cdot Q(x) + (2x + k)$
 $\Rightarrow f(-2) = 0 + 2(-2) + k = -3 \Rightarrow k = 1$
 即 $f(x) = (x^2 - 3x - 10) \cdot Q(x) + (2x + 1)$
 則 $f(5) = 0 + 2 \cdot 5 + 1 = 11$ ，故選(D)
10. 分式不等式分母不可為 0 $\Rightarrow 2 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \dots \dots \textcircled{1}$
 移項後得 $\frac{3x}{2-x} + 2 \leq 0 \Rightarrow \frac{3x}{2-x} + \frac{2(2-x)}{2-x} \leq 0$
 $\Rightarrow \frac{x+4}{2-x} \leq 0 \Rightarrow (x+4)(2-x) \leq 0 \Rightarrow (x+4)(x-2) \geq 0$
 $\Rightarrow x \geq 2$ 或 $x \leq -4 \dots \dots \textcircled{2}$
 由 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2} \Rightarrow x > 2$ 或 $x \leq -4$ ，故選(B)
11. 將 10 個數據由小而大排列得：
 2, 3, 3, 4, 4, 6, 6, 6, 7, 9
 算術平均數 $= \frac{1}{10} (2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 6 + 6 + 6 + 7 + 9) = 5$
 樣本標準差
 $= \sqrt{\frac{1}{10-1} [(2-5)^2 + 2 \cdot (3-5)^2 + 2 \cdot (4-5)^2 + 3 \cdot (6-5)^2 + (7-5)^2 + (9-5)^2]}$

$$= \frac{\sqrt{42}}{3}, \text{ 故選(C)}$$

12. 假設小智期末考考 x 分，則依題意可列出
 $(72+38+x) \cdot 20\% + 50 \cdot 30\% + 84 \cdot 10\% \geq 60$
 $\Rightarrow 22+0.2x+15+8.4 \geq 60 \Rightarrow 0.2x \geq 14.6 \Rightarrow x \geq 73$
 故選(D)

13.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}-4}{3^n} = \frac{2^2-4}{3} + \frac{2^3-4}{3^2} + \frac{2^4-4}{3^3} + \dots$$

$$= \left(\frac{2^2}{3} + \frac{2^3}{3^2} + \frac{2^4}{3^3} + \dots\right) - \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots\right)$$

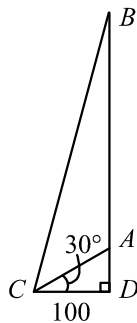
$$= \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{2}{3}} - \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{4}{3} \times \frac{3}{1} - \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} = 4 - 2 = 2, \text{ 故選(D)}$$

14. 理賠金為保險費的 200 倍 = $500 \times 200 = 100000$
 保險公司預期獲利 = 收入減去支出
 $= 500 - 100000 \times \frac{1}{1000} = 500 - 100 = 400$ 元，故選(A)

15. 軌跡的位移函數為 $f(x) = x^3 + 9x^2 + 15x + 23$
 瞬時速度函數為 $f'(x) = 3x^2 + 18x + 15$
 瞬時加速度函數為 $f''(x) = 6x + 18$
 (A) 由於在 $0 \leq x \leq 5$ 之間，加速度函數 $f''(x)$ 的值為正
 代表速度函數 $f'(x)$ 的值為遞增，故速度越來越快
 (B) 在 $x = 4$ 的瞬時速度 = $f'(4)$
 $= 3 \cdot 4^2 + 18 \cdot 4 + 15 = 135$
 (C) 在 $x = 2$ 的瞬時加速度 = $f''(2) = 6 \cdot 2 + 18 = 30$
 (D) 在 $x = 1$ 到 $x = 3$ 之間的平均速度 = $\frac{f(3)-f(1)}{3-1}$
 $= \frac{(3^3+9 \cdot 3^2+15 \cdot 3+23)-(1+9+15+23)}{2} = \frac{128}{2} = 64$

故選(C)

16. 如圖， $\overline{AB} = \overline{BD} - \overline{AD}$
 $= 100 \tan 75^\circ - 100 \tan 30^\circ$
 $= 100(2 + \sqrt{3}) - 100 \times \frac{1}{\sqrt{3}}$
 $= 100 \times (2 + \frac{2}{3}\sqrt{3}) \div 100 \times 3.13 = 313$
 故介於 300~350 公尺之間，選(C)



17. $\log M = 2 + 0.4487 = 2.4487$
 (A) 首數 = 2，整數部分位數 = $2 + 1 = 3$
 (B) $\log 100M = \log 100 + \log M = 2 + 2.4487 = 4.4487$ ，
 首數 = 4
 (C) $\log \frac{M}{1000} - \log M = \log(\frac{M}{1000} \div M) = \log \frac{1}{1000} = -3$
 (D) $\log \frac{1}{M} = \log M^{-1} = -\log M = -2.4487$
 $= -3 + 0.5513$ ，尾數為 0.5513
 故選(D)

18. $3x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x+2)(3x-4) = 0 \Rightarrow x = -2$ 或 $\frac{4}{3}$

可令兩直線之斜率 $m_1 = -2, m_2 = \frac{4}{3}$ ，兩直線交角為 θ

$$\Rightarrow \tan \theta = \pm \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2} = \pm \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \pm \frac{-2 - \frac{4}{3}}{1 + (-2) \cdot \frac{4}{3}}$$

$= \pm 2$ ，則 $\tan^2 \theta = (\pm 2)^2 = 4$ ，故選(A)

19. 原式 = $\sec^2 \theta \cdot \frac{1 - \csc^2 \theta}{\sec^2 \theta} - \frac{-\sin \theta}{-\sin \theta} + \frac{\sec \theta}{-\sec \theta}$
 $= 1 - \csc^2 \theta - 1 - 1 = -1 - \csc^2 \theta$ ，故選(D)

20. 由於函數 $f(x)$ 的圖形是以 y 軸為對稱軸，則

$$\int_{-3}^0 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx = -18$$

$$\int_{-5}^{-3} f(x) dx = \int_3^5 f(x) dx = \frac{44}{3}$$

$$\text{所求面積} = \int_{-5}^3 |f(x)| dx$$

$$= \int_{-5}^{-3} f(x) dx + \int_{-3}^0 |f(x)| dx + \int_0^3 |f(x)| dx$$

$$= \frac{44}{3} + 18 + 18 = \frac{152}{3}$$
，故選(A)

21. (A) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 3x - 4) = 2^3 - 3 \cdot 2 - 4 = 8 - 6 - 4 = -2$

(B) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x-3|}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{x-3} = 1$

(C) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x+2)^2}{|x+2|} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x+2)^2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} (x+2)$
 $= -2 + 2 = 0$

$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x+2)^2}{|x+2|} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x+2)^2}{-(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2^-} -(x+2)$
 $= -(-2+2) = 0 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)^2}{|x+2|} = 0$

(D) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x+2}-\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{6}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{6}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6})}{x+2-6}$
 $= \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x+2}+\sqrt{6}) = \sqrt{6}+\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$

故選(B)

22. 大年初一確定排小樺：1 種排法
 除夕不排小全，也不能再排小樺：5 種排法
 其他三天就從剩下 5 人之中排 3 人
 以乘法原理計算： $1 \times 5 \times 5 \times 4 \times 3 = 300$ ，故選(B)

23. 雙曲線之貫軸平行 x 軸 \Rightarrow 左右開口
 中心坐標 $(2, 1)$ 及貫軸長為 16 $\Rightarrow 2a = 16 \Rightarrow a = 8$

$$\text{假設標準式} \frac{(x-2)^2}{8^2} - \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1$$

則漸近線為 $b(x-2) \pm 8(y-1) = 0 \Rightarrow$ 斜率為 $\pm \frac{b}{8}$

已知一漸近線為 $3x + 4y - 10 = 0 \Rightarrow$ 斜率為 $-\frac{3}{4}$

利用 $\frac{b}{8} = \frac{3}{4}$ 可得 $b = 6$ ，則正焦弦長為 $\frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 6^2}{8} = 9$

故選(B)

$$24. z_1 = 3 + 3\sqrt{3}i = 6\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

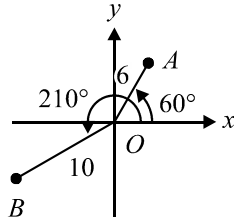
$$= 6(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$$

$$z_2 = 10(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$$

$$\overline{OA} = |z_1| = 6, \overline{OB} = |z_2| = 10$$

$$\angle AOB = 210^\circ - 60^\circ = 150^\circ$$

$$\Delta OAB \text{ 面積} = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OB} \cdot \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 15$$



故選(C)

25. 依據題意，樣本空間為 11 人之中任選 3 人，即為

$$C_3^{11} = \frac{11!}{3!8!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 165$$

要符合選出來的 3 個人都有來自南區北區，且有男有女，可能性如下列所示：南區 2 男生與北區 1 女生、南區 2 女生與北區 1 男生、南區 1 男 1 女與北區任 1 人、南區 1 男生與北區 2 女生、南區 1 女生與北區 2 男生、南區任 1 人與北區 1 男 1 女，機率為

$$\frac{C_2^3 \cdot C_1^4 + C_2^2 \cdot C_1^2 + C_1^3 \cdot C_1^2 \cdot C_1^6 + C_1^3 \cdot C_1^4 + C_1^2 \cdot C_1^2 + C_1^5 \cdot C_1^2 \cdot C_1^4}{C_3^{11}}$$

$$= \frac{12 + 2 + 36 + 18 + 2 + 40}{165} = \frac{110}{165} = \frac{2}{3}, \text{ 故選(A)}$$

[另解]

$$n(S) = C_3^{11} = 165$$

符合題意之情形數 = 任意選 3 人 - 3 人皆南區 - 3 人皆北區 - 3 人皆男 - 3 人皆女 + 南區 3 男 + 北區 3 女

$$= 165 - C_3^5 - C_3^6 - C_3^5 - C_3^6 + C_3^3 + C_3^4$$

$$= 165 - 10 - 20 - 10 - 20 + 1 + 4 = 110$$

$$\text{所求} = \frac{110}{165} = \frac{2}{3}, \text{ 故選(A)}$$