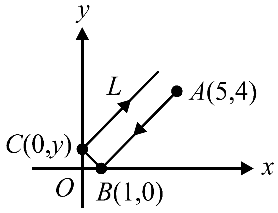
109 學年度四技二專第四次聯合模擬考試
共同科目　數學(C)卷　詳解

數學(C)卷 109-4-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
D	B	A	B	C	B	B	B	A	D	C	D	A	C	A	B	A	A	C	D	C	B	D	C	D

1. 作圖如下



設光束於 $C(0\,,y)$ 碰到 y 軸，且光束經 y 軸反射後沿直線 L 前進，則 $\overleftrightarrow{AB}$ 斜率與 $\overleftrightarrow{BC}$ 斜率等值異號，即 $m_{AB}=-m_{BC}\Rightarrow\dfrac{4-0}{5-1}=-\dfrac{y-0}{0-1}\Rightarrow y=1$，可知 $C(0\,,1)$，同理，L 直線斜率 $m_L=-m_{BC}=-\dfrac{1-0}{0-1}=1$，可得 L 直線方程式爲 $y-1=1\times(x-0)\Rightarrow y=x+1$

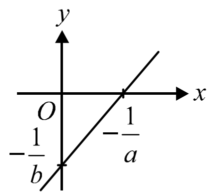
分別將選項中四點代入 L 直線方程式，可知 $(4\,,5)$ 在 L 上，故選(D)

2. $\because (ab^2\,,a+b)\in \text{II}$　$\therefore ab^2<0$ 且 $a+b>0$

由 $ab^2<0\Rightarrow a<0$，再由 $a+b>0$ 可知 $b>0$

分別令 $x=0$ 和 $y=0$ 代入直線 $ax+by+1=0$

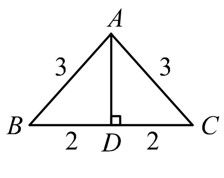
可得 y 截距 $-\dfrac{1}{b}<0$ 和 x 截距 $-\dfrac{1}{a}>0$，作圖如右



可知直線不通過第二象限，故選(B)

3. 如右圖，作高 $\overline{AD}$ 得 $\overline{BD}=\overline{CD}=2$

且 $\overline{AD}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$



可知 $\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{2}{3}$ 且 $\cos\dfrac{A}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

由二倍角公式得

$\sin A=2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$

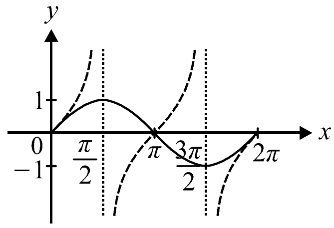
$=2\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\sqrt{5}}{3}=\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$

故選(A)

4. 地球在半年時間內於軌道上，行進了約軌道的半圓周長，即 $\dfrac{1}{2}\times 2\pi r=\dfrac{1}{2}\times 2\pi\times 1=\pi$ (AU)

故選(B)

5. [法一]作 $y=\sin x$ 與 $y=\tan x$ 的圖形於同一坐標平面上，且取 $0\le x\le 2\pi$



可知有三個交點，即 $\sin x=\tan x$ 有三個實根

[法二] $\sin x=\tan x\Rightarrow \sin x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ ……①

(1) 當 $\sin x=0$，①式成立，此時 $x=0\,,\pi\,,2\pi$ (皆不使分母 $\cos x=0$)

(2) 當 $\sin x\neq 0$，① $\Rightarrow 1=\dfrac{1}{\cos x}\Rightarrow \cos x=1$

即 $x=0\,,2\pi$

由(1)(2)可知 $x=0\,,\pi\,,2\pi$ 共三個實根，故選(C)

6. 設圓半徑爲 R，則 $\pi R^2=3\pi\Rightarrow R=\sqrt{3}$

由正弦定理可知

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=2R\Rightarrow\dfrac{\overline{BC}}{\sin 150^\circ}=2\sqrt{3}\Rightarrow\overline{BC}=2\sqrt{3}\times\sin 150^\circ$

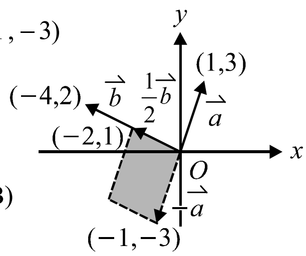
$\Rightarrow\overline{BC}=2\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=\sqrt{3}$，故選(B)

7. 如下圖，所求即 $-\overrightarrow{a}=(-1\,,-3)$

與 $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{b}=(-2\,,1)$

所張成的平行四邊形面積

$=\left|\begin{vmatrix}-1 & -3\\ -2 & 1\end{vmatrix}\right|=7$，故選(B)



8. 利用連續綜合除法將 $f(x)$ 化爲 $x-1$ 的次冪

$$
\begin{array}{l|l}
3-6+1+2 & 1\\
\quad +3-3-2 & \\
\hline
3-3-2 & +0\\
\quad +3+0 & \\
\hline
3+0 & -2\\
\quad +3 & \\
\hline
3 & +3
\end{array}
$$

可得 $f(x)=3(x-1)^3+3(x-1)^2-2(x-1)$

所以 $f(0.999)=3(-0.001)^3+3(-0.001)^2-2(-0.001)$

$\fallingdotseq 0.002$，故選(B)

9. $\because$除式 x^2-2x-3 爲二次式

$\therefore$可設餘式 $r(x)=ax+b$

由除法原理知 $f(x)=(x^2-2x-3)Q(x)+ax+b$

$\because f(x)$ 除以 $x+1$ 的餘式為 4

$\therefore f(-1)=[(-1)^2-2\times(-1)-3]Q(-1)+a(-1)+b=4$

$\Rightarrow -a+b=4 \cdots\cdots$①

又 $x-1$ 是 $Q(x)$ 與 $f(x)$ 的因式 $\Rightarrow Q(1)=f(1)=0$

可得 $f(1)=(1^2-2\times1-3)Q(1)+a+b=0$

$\Rightarrow a+b=0\cdots\cdots$②

解①②得 $a=-2$ ， $b=2$

即 $r(x)=-2x+2$ ，故選(A)

10. 令 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ， $\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ， $\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

由克拉瑪公式知，若 $\Delta\neq0$ ，則 $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$ ， $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$

(1) $\because \begin{vmatrix} a_1 & 2b_1 \\ a_2 & 2b_2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=2\Delta\overset{\text{已知}}{=}4$

$\therefore \Delta=2$

(2) $\because \begin{vmatrix} b_1 & c_1-b_1 \\ b_2 & c_2-b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=-\Delta_x\overset{\text{已知}}{=}2$

$\therefore \Delta_x=-2$

(3) $\because \begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 \\ a_2 & b_2+c_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

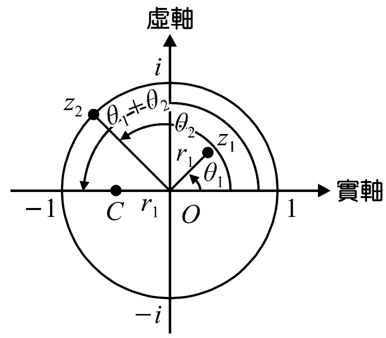
$=2+\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=2+\Delta_y\overset{\text{已知}}{=}3\quad \therefore \Delta_y=1$

由(1)(2)(3)可得 $x=\dfrac{-2}{2}=-1$ ， $y=\dfrac{1}{2}$

即 $(x\,,y)=(-1,\dfrac{1}{2})$ ，故選(D)

11. $\because z_2$ 在單位圓上， $|z_2|=1$

$\therefore$ 可設 z_1 與 z_2 的極式分別為 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_2)$ 與 $z_2=\cos\theta_2+i\sin\theta_2$ ，如下圖所示



又 $z_1\times z_2=r_1[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

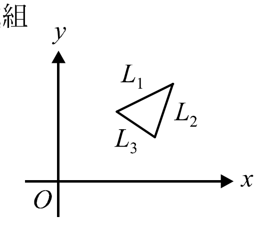
可知 C 點最有可能是 $z_1\times z_2$ 的位置，故選(C)

12. 由 L_1 、 L_2 、 L_3 的斜率分別為 $\dfrac{1}{2}$ 、3、 $-\dfrac{2}{3}$

可判斷三角形三邊所在的直線如下圖所示

且三角形內部的點滿足不等式組

$\begin{cases} x-2y>-6 \\ 3x-y<18 \\ 2x+3y>24 \end{cases}$



將 $(6\,,t)$ 代入可得

$\begin{cases} 6-2t>-6 \\ 18-t<18 \\ 12+3t>24 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} t<6 \\ t>0 \\ t>4 \end{cases}$ ，即 $4<t<6$ ，故選(D)

13. 設此無窮等比級數的首項為 a ，公比為 r ，且 $|r|<1$ ，

可知 $S=a+ar+ar^2+\cdots=\dfrac{a}{1-r}=\dfrac{4}{3}\cdots\cdots$①

將其每一項立方之後，可得首項為 a^3 ，公比為 r^3 的無窮等比級數

即 $S'=a^3+a^3r^3+a^3r^6+\cdots=\dfrac{a^3}{1-r^3}=\dfrac{64}{9}\cdots\cdots$②

由① $\Rightarrow(\dfrac{a}{1-r})^3=(\dfrac{4}{3})^3\Rightarrow\dfrac{a^3}{(1-r)^3}=\dfrac{64}{27}\cdots\cdots$③

可得 $\dfrac{②}{③}\Rightarrow\dfrac{\dfrac{a^3}{1-r^3}}{\dfrac{a^3}{(1-r)^3}}=\dfrac{\dfrac{64}{9}}{\dfrac{64}{27}}\Rightarrow\dfrac{(1-r)^3}{1-r^3}=3$

$\Rightarrow\dfrac{(1-r)^3}{(1-r)(1+r+r^2)}=3\Rightarrow\dfrac{(1-r)^2}{1+r+r^2}=3$

$\Rightarrow 1-2r+r^2=3+3r+3r^2\Rightarrow 2r^2+5r+2=0$

$\Rightarrow(2r+1)(r+2)=0$

$\Rightarrow r=-\dfrac{1}{2}$ 或 -2 ($\because |r|<1\quad\therefore$ 不合)，故選(A)

14. $\because f(x)=\log_2 x^2=2\log_2 x$

$\therefore f(x)\times g(x)=(2\log_2 x)\times(\log_2 x+8\log_x 2-8)$

$=2(\log_2 x)^2-16\log_2 x+16$

$=2[(\log_2 x)^2-8\log_2 x+4^2]+16-32$

$=2(\log_2 x-4)^2-16$

當 $\log_2 x=4$ ，即 $x=2^4=16$ 時， $f(x)\times g(x)$ 有最小值 -16 ，可知 $n+m=16+(-16)=0$ ，故選(C)

15. 原式 $\Rightarrow\log_6(4^x-2)+1=\log_6 2^x$

$\Rightarrow\log_6(4^x-2)+\log_6 6=\log_6 2^x$

$\Rightarrow\log_6 6(4^x-2)=\log_6 2^x\Rightarrow 6(4^x-2)=2^x$

$\Rightarrow 6\times(2^x)^2-2^x-12=0\Rightarrow[2(2^x)-3][3(2^x)+4]=0$

$\Rightarrow 2^x=\dfrac{3}{2}$ 或 $-\dfrac{4}{3}$ (不合) $\quad\therefore x=\log_2\dfrac{3}{2}=\log_2 3-1$

故選(A)

16. 設三人共同好友為 x 人，即 $n(A\cap B\cap C)=x$

則所求為 $n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(A\cap C)+x$

$=200+120+350-20-40-50+x=560+x$

又 $\begin{cases} 0\le n(A\cap B\cap C)\le n(A\cap B)=20 \\ 0\le n(A\cap B\cap C)\le n(B\cap C)=40 \\ 0\le n(A\cap B\cap C)\le n(A\cap C)=50 \end{cases}$

可知 $0\le x\le 20\Rightarrow 560\le 560+x\le 580$

即 $560\le n(A\cup B\cup C)\le 580$ ，故選(B)

17. 在 A 、 B 、 C 、 D 四種選項中，選擇一種出 7 題，方法有 $C^4_1=4$ 種

所求即可視為四種選項各有 7、6、6、6 個之不完全

相異物的直線排列，可知共有

$4\times\frac{25!}{7!6!6!6!}=\frac{4}{7}\times\frac{25!}{(6!)^4}$ 種情形，故選(A)

18. 所求 $=P$ (第一次紅球且第二次白球) $+P$ (第一次白球且第二次紅球) $=\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}+\frac{3}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{1}{3}$ ，故選(A)

19. (1) Γ_1：$y=-2(x-1)^2+1\Rightarrow(x-1)^2=-\frac{1}{2}(y-1)$

可知 Γ_1 爲拋物線，且 $\ell_1=\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$

(2) Γ_2：$4x^2+3y^2=12\Rightarrow\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$

可知 Γ_2 爲橢圓，其半長軸長 $a=\sqrt{4}=2$

其半短軸長爲 $b=\sqrt{3}\Rightarrow\ell_2=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times3}{2}=3$

(3) Γ_3：$9y^2-4x^2=1\Rightarrow\frac{y^2}{\frac{1}{9}}-\frac{x^2}{\frac{1}{4}}=1$

可知 Γ_3 爲雙曲線，其半貫軸長 $a=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$

半共軛軸長 $b=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\ell_3=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$

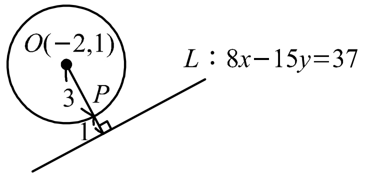
由(1)(2)(3)可得 $\ell_1\times\ell_2\times\ell_3=\frac{1}{2}\times3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$ ，故選(C)

20. 圓 C 之圓心 $O(\frac{4}{-2},\frac{-2}{-2})=(-2,1)$

半徑 $r=\frac{1}{2}\sqrt{16+4-4\times(-4)}=3$

而圓心 O 到直線 L 的距離爲

$d(O,L)=\frac{|-16-15-37|}{\sqrt{8^2+(-15)^2}}=\frac{|-68|}{17}=4$



可知所求爲 $d(O,L)-r=4-3=1$ ，故選(D)

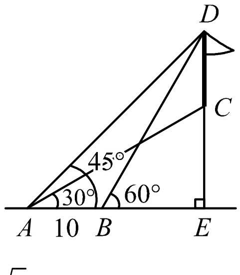
21. [法一]如下圖，設高台底部爲 E 點，且 $\overline{DE}=x$ 公尺，則 ΔADE 中，$\overline{AE}=\overline{DE}=x$

ΔBDE 中，$\overline{BE}=\frac{\overline{DE}}{\sqrt{3}}=\frac{x}{\sqrt{3}}$

又 $\overline{AE}-\overline{BE}=10\Rightarrow x-\frac{x}{\sqrt{3}}=10$

$\Rightarrow(\sqrt{3}-1)x=10\sqrt{3}$

$\Rightarrow x=15+5\sqrt{3}$

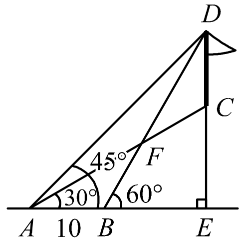


在 ΔACE 中，$\overline{CE}=\frac{\overline{AE}}{\sqrt{3}}=\frac{15+5\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=5\sqrt{3}+5$

可知所求旗桿長 $\overline{CD}=\overline{DE}-\overline{CE}$

$=(15+5\sqrt{3})-(5\sqrt{3}+5)=10$ 公尺

[法二]如下圖



設高台底部爲 E 點，且 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 F 點

在 ΔBDE 中，$\angle BDE=30°$

在 ΔADF 中，$\angle DAF=45°-30°=15°$

$\angle ADF=\angle ADE-\angle BDE=45°-30°=15°$

$\Rightarrow\Delta ADF$ 爲等腰 $\Delta\Rightarrow\overline{AF}=\overline{DF}$

在 ΔABF 與 ΔDCF 中，$\angle BAF=\angle CDF=30°$

$\overline{AF}=\overline{DF}$ ，$\angle AFB=\angle DFC$ (對頂角)

$\Rightarrow\Delta ABF\cong\Delta DCF$ (ASA 全等性質)

可知 $\overline{CD}=\overline{AB}=10$ 公尺，故選(C)

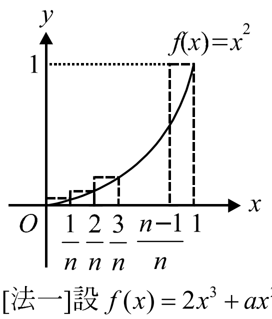
22. $\because f'(x)=2(\frac{x^2+1}{x-1})\times\frac{2x(x-1)-(x^2+1)\times1}{(x-1)^2}+1$

$\therefore f'(2)=2\times5\times(4-5)+1=-9$ ，故選(B)

23. [法一] $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}(\frac{k}{n})^2$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

[法二] $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$ 爲 $f(x)=x^2$ 在 $[0,1]$ 之間將 $[0,1]$ 作 n 等分之上和，其極限即爲 $f(x)=x^2$ 在 $[0,1]$ 之間的定積分 $\int_0^1x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}$ ，故選(D)



24. [法一]設 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+6$

$f'(x)=6x^2+2ax+b$ ⋯⋯①

又 $f(x)$ 在 $x=1$ 與 $x=-1$ 有極値

$\Rightarrow f'(x)=6(x-1)(x+1)=6x^2-6$

由①式比較係數知 $a=0$ ，$b=-6$

即 $f(x)=2x^3-6x+6$ ，又 $f''(x)=12x=0\Rightarrow x=0$

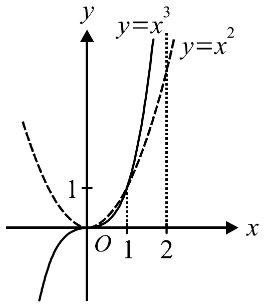
而 $f(0)=6$ ，可得 $f(x)$ 的反曲點爲 $(0,f(0))=(0,6)$

[法二] $\because\deg f(x)=3$ 且在 $x=1$ 與 $x=-1$ 有極値

$\therefore f(x)$ 的圖形關於反曲點對稱，即在 $x=0$ 有反曲點，又 $f(0)$ 即爲 $f(x)$ 的常數項，$f(0)=6$ ，即反曲點爲 $(0,f(0))=(0,6)$ ，故選(C)

25. 令 $x^3 = x^2 \Rightarrow x^3 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0$ 或 1

作圖如下



可知所求爲

$\int_0^2 |x^3 - x^2|\, dx = \int_0^1 (x^2 - x^3) dx + \int_1^2 (x^3 - x^2) dx$

$= (\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4})\Big|_0^1 + (\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3})\Big|_1^2$

$= [(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) - 0] + [(4 - \frac{8}{3}) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{3})] = \frac{1}{12} + \frac{17}{12} = \frac{3}{2}$

故選(D)