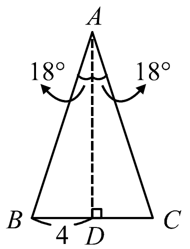
109 學年度四技二專第三次聯合模擬考試
共同科目　數學(C)卷　詳解

數學(C)卷 109-3-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	D	C	B	C	D	D	D	A	B	D	B	A	B	A	B	C	A	C	B	C	D	C	D	A

1. L_1 的斜率為 $a=\dfrac{0-(-3)}{1-0}=3$，L_1 的 y 截距為 $b=-3$，
L_2 的斜率為 $c=\dfrac{2-0}{0-1}=-2$，L_2 的 y 截距為 $d=2$
故選(A)

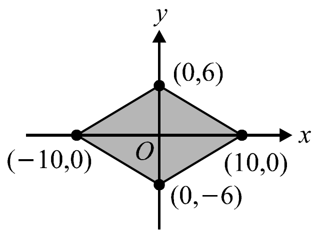
2. 如右圖
作等腰 ΔABC 的頂角平分線 $\overline{AD}$
直角 ΔABD 中
$\sin 18^\circ=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AB}}=\dfrac{4}{\overline{AB}}$
$\Rightarrow \overline{AB}=\dfrac{4}{\sin 18^\circ}=4\csc 18^\circ$
∴腰長 $=4\csc 18^\circ$，故選(D)



3. (A) 虛數不能比較大小
(B) 必須 a 、b 皆為實數時方成立
(C) $|4+3i|=\sqrt{4^2+3^2}=5$
$|3+2i|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$
$\therefore |4+3i|=5>\sqrt{13}=|3+2i|$
(D) $\overline{3i-1}=-3i-1$
故選(C)

4. $\because (\dfrac{k-5}{k+1},\dfrac{k+1}{k+2})$ 在第四象限
$\Rightarrow \begin{cases}\dfrac{k-5}{k+1}>0\\ \dfrac{k+1}{k+2}<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(k-5)(k+1)>0\\ (k+1)(k+2)<0\end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases}k<-1 \text{ 或 } k>5\\ -2<k<-1\end{cases} \Rightarrow -2<k<-1$，故選(B)

5. 不等式組
$\begin{cases}-30\le 3x+5y\le 30\\ -30\le 3x-5y\le 30\end{cases}$ 之
圖形如右
則可行解區域的頂點
為 $(10,0)$ 、$(0,6)$
$(-10,0)$ 、$(0,-6)$



分別代入 $f(x,y)=2x+5y$ 可得 $f(10,0)=20$，
$f(0,6)=30$，$f(-10,0)=-20$，$f(0,-6)=-30$
∴最大值為 30，故選(C)

6. 單位長 1 的正方形有 8^2 個
單位長 2 的正方形有 7^2 個
單位長 3 的正方形有 6^2 個
……
單位長 8 的正方形有 1^2 個
∴共有正方形 $8^2+7^2+\cdots+1^2=\sum_{k=1}^{8}k^2=\dfrac{8\times 9\times 17}{6}=204$ 個，故選(D)
[另解] $64+49+36+25+16+9+4+1=204$ 個
故選(D)

7. (A) $\log_6 2\times\log_6 3\ne\log_6 2\times 3$
(B) $5^{3\log_5 2}=5^{\log_5 2^3}=2^3=8$
(C) $[(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}]^2=(\sqrt{2})^{2\sqrt{2}}\ne 2=(\sqrt{2})^2$
(D) $16^{0.25}=(2^4)^{0.25}=2^1=2$
故選(D)

8. $a=(\dfrac{1}{3})^{30}=(3^{-1})^{3\times 10}=(3^{-3})^{10}=(\dfrac{1}{27})^{10}$
$b=2^{-30}=(2^{-3})^{10}=(\dfrac{1}{8})^{10}$
$c=(\dfrac{1}{5})^{10}$
$\because \dfrac{1}{5}>\dfrac{1}{8}>\dfrac{1}{27} \Rightarrow (\dfrac{1}{5})^{10}>(\dfrac{1}{8})^{10}>(\dfrac{1}{27})^{10}$
$\therefore c>b>a$，故選(D)

9. 選法 $=$ 任意選選法 -2 位女生同時被選上選法
$=10\times 9\times 8-P^3_2\times 8=720-48=672$，故選(A)

10. 所求 $=$ 染病且驗出染病 $+$ 未染病且驗出染病
$0.05\times 0.92+0.95\times 0.02=0.065=6.5\%$，故選(B)

11. $\because \Delta ABD$ 的面積：ΔACD 的面積 $=1:2$
$\therefore \overline{BD}:\overline{CD}=1:2$
由分點公式可得
$(a,b)=(\dfrac{1\times 7+2\times(-5)}{1+2},\dfrac{1\times 18+2\times 12}{1+2})=(-1,14)$
$\therefore a+b=-1+14=13$，故選(D)

12. 設 $f(x)=4x^4-4x^3-5x^2+8x-2$，所求即 $f(\dfrac{\sqrt{2}+1}{2})$
令 $x=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\Rightarrow 2x=\sqrt{2}+1\Rightarrow(2x-1)^2=(\sqrt{2})^2$
$\Rightarrow 4x^2-4x+1=2\Rightarrow 4x^2-4x-1=0$
$\because f(x)=4x^4-4x^3-5x^2+8x-2$
$=(4x^2-4x-1)(x^2-1)+4x-3$
$\therefore f(\dfrac{\sqrt{2}+1}{2})=0+4(\dfrac{\sqrt{2}+1}{2})-3=-1+2\sqrt{2}$
$\Rightarrow a=-1$，$b=2\Rightarrow a+2b=-1+4=3$
故選(B)

13. $\because \begin{cases} x+ky-z=0 \\ 2x+(k-1)y-z=0 \\ 3x+3y-2z=0 \end{cases}$ 有異於 $(0,0,0)$ 的解

$\therefore$聯立方程組有無限多組解

$\Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 2 & k-1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2) \\ (-3) \end{matrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 0 & -k-1 & 1 \\ 0 & 3-3k & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow -k-1-3+3k=0 \Rightarrow k=2$，故選(A)

14. 設第 n 列有 a_n 個數

$a_n = 1+(n-1)\cdot 2$

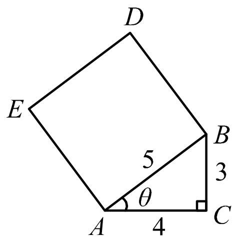
$S_n = \dfrac{(a_1+a_n)\times n}{2} = \dfrac{[1+1+2(n-1)]\times n}{2} = n^2$

令 $n^2 \ge 200 \Rightarrow n \ge 14.14$，取最小整數 $n=15$

$\therefore$200 在第 15 列，故選(B)

15. 如下圖，$\overline{AB}=5$

$\sec\angle CAE = \sec(90^\circ+\theta) = -\csc\theta = -\dfrac{5}{3}$，故選(A)



16. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 60^\circ = 3\times 4\times\dfrac{1}{2} = 6$

$|t\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|^2 = (t\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\cdot(t\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$

$= t|\overrightarrow{AB}|^2 - 2t\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AC}|^2$

$= 9t^2-12t+16 = 9(t-\dfrac{2}{3})^2+12$

故當 $t=\dfrac{2}{3}$ 時，$|t\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$ 有最小值爲 $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

故選(B)

17. 由除法原理知存在兩多項式 $p(x)$ 與 $q(x)$，使得

$f(x) = (x^2-3x-4)p(x)+3x-1$

$\quad = (x-4)(x+1)p(x)+3x-1$

$g(x) = (x^2-2x-8)q(x)+2x+3$

$\quad = (x-4)(x+2)q(x)+2x+3$

$\Rightarrow \begin{cases} f(4)=3\cdot 4-1=11 \\ g(4)=2\cdot 4+3=11 \end{cases}$

由餘式定理知 $x^2 f(x)-2g(x)$ 被 $x-4$ 除之餘式

$=4^2\cdot f(4)-2g(4) = 16\times 11-2\times 11 = 154$，故選(C)

18. 令 $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

則 $\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=3$，$\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=-1$

又 $\Delta' = \begin{vmatrix} 3a_1 & 2b_1 \\ 3a_2 & 2b_2 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 6\Delta$

$\Delta'_x = \begin{vmatrix} -4c_1 & 2b_1 \\ -4c_2 & 2b_2 \end{vmatrix} = -8\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = -8\Delta_x$

$\Delta'_y = \begin{vmatrix} 3a_1 & -4c_1 \\ 3a_2 & -4c_2 \end{vmatrix} = -12\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = -12\Delta_y$

故所求方程組之解

$x = \dfrac{\Delta'_x}{\Delta'} = \dfrac{-8\Delta_x}{6\Delta} = -\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{\Delta_x}{\Delta} = -\dfrac{4}{3}\times 3 = -4$

$y = \dfrac{\Delta'_y}{\Delta'} = \dfrac{-12\Delta_y}{6\Delta} = -2\cdot\dfrac{\Delta_y}{\Delta} = -2\times(-1) = 2$

故選(A)

[另解]$\begin{cases} 3a_1-b_1=c_1 \cdots\cdots ① \\ 3a_2-b_2=c_2 \cdots\cdots ② \end{cases}$

$① \Rightarrow 3a_1-b_1-c_1=0$

乘(-4)

$\Rightarrow \quad -12a_1+4b_1+4c_1=0$

$\Rightarrow 3a_1\times(-4)+2b_1\times 2+4c_1=0$

同理$② \Rightarrow 3a_2\times(-4)+2b_1\times 2+4c_1=0$

即$\begin{cases} 3a_1\times(-4)+2b_1\times 2+4c_1=0 \\ 3a_2\times(-4)+2b_2\times 2+4c_2=0 \end{cases}$

與$\begin{cases} 3a_1x+2b_1y+4c_1=0 \\ 3a_2x+2b_2y+4c_2=0 \end{cases}$同義

$\therefore x=-4$，$y=2$，故選(A)

19. 設三邊長爲 $a-d$ 、 a 、 $a+d$

$(a-d)+a+(a+d)=15 \Rightarrow 3a=15 \Rightarrow a=5$

$\therefore$三邊長爲 $5-d$ 、5、 $5+d$

再由餘弦定理可得：

$(5+d)^2 = (5-d)^2+5^2-2\cdot(5-d)\cdot 5\cdot\cos 120^\circ$

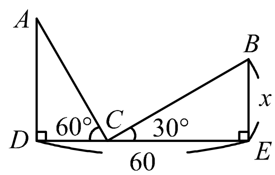
$\Rightarrow 25+10d+d^2 = 25-10d+d^2+25+25-5d$

$\Rightarrow 25d=50 \Rightarrow d=2$

$\therefore$最短邊長爲 $5-2=3$，故選(C)

20. 如右圖，設 B 塔的高度 $\overline{BE}$ 爲 x

$\Rightarrow$ A 塔的高度 $\overline{AD}$ 爲 $\dfrac{3}{2}x$



$\Rightarrow \overline{CE} = \sqrt{3}x$

$\overline{CD} = \dfrac{\frac{3}{2}x}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

$\Rightarrow \overline{DE} = \sqrt{3}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x = 60 \Rightarrow \dfrac{3\sqrt{3}}{2}x = 60$

$\Rightarrow x = 60\times\dfrac{2}{3\sqrt{3}} = \dfrac{40}{\sqrt{3}}$

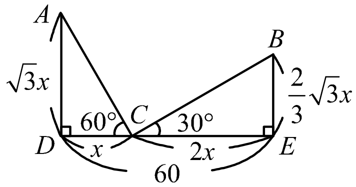
$\therefore$與 A 塔的距離爲 $\overline{CD} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{40}{\sqrt{3}} = 20$，故選(B)

[另解]設所求 $\overline{CD}=x$，則 ΔACD 中，$\overline{AD}=\sqrt{3}x$

已知 $\dfrac{3}{2}\overline{BE} = \overline{AD} \Rightarrow \overline{BE} = \dfrac{2}{3}\sqrt{3}x$

得 ΔBCE 中，$\overline{CE}=\sqrt{3}\overline{BE}=2x$

又 $\overline{CD}+\overline{CE}=60 \Rightarrow x+2x=60 \Rightarrow x=20$，故選(B)



21. $(\log 3x)(\log 2x)=4$

$\Rightarrow (\log 3+\log x)(\log 2+\log x)=4$

$\Rightarrow (\log x)^2+(\log 3+\log 2)\cdot\log x+(\log 3)(\log 2)-4=0$

令 $t=\log x$

原式 $\Rightarrow t^2+(\log 3+\log 2)t+(\log 3)(\log 2)-4=0$

二根爲 $\log\alpha$ 、 $\log\beta$

$\Rightarrow$ 二根和 $\log\alpha+\log\beta=-(\log 3+\log 2)$

$\Rightarrow \log\alpha\beta=-\log 6=\log 6^{-1}=\log\frac{1}{6}$

$\Rightarrow \alpha\beta=\frac{1}{6}$，故選(C)

22. $(1-x)+(1-x)^2+(1-x)^3+\cdots+(1-x)^8$

$=\frac{(1-x)[(1-x)^8-1]}{(1-x)-1}=\frac{(1-x)^9+x-1}{-x}$

又 $(1-x)^9=\sum_{r=0}^{9}C_r^9(1)^{9-r}(-x)^r=\sum_{r=0}^{9}C_r^9(-1)^r x^r$

故 x^2 項係數 $=\frac{C_3^9(-1)^3}{-1}=84$，故選(D)

23. ∵第一次調整成績是將原始成績減 10 而得

$\therefore S=S_1$

∵第二次調整成績是將原始成績乘以 0.8 而得

$\therefore S_2=0.8S$

故 $S=S_1>S_2$，故選(C)

24. $\sin^2\theta=\cos\theta \Rightarrow 1-\cos^2\theta=\cos\theta$

$\Rightarrow \cos^2\theta+\cos\theta-1=0 \Rightarrow \cos\theta=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ (負不合)

所求 $=\frac{1}{1-\cos\theta}+\frac{1}{1+\cos\theta}=\frac{1+\cos\theta}{1-\cos^2\theta}+\frac{1-\cos\theta}{1-\cos^2\theta}$

$=\frac{2}{1-\cos^2\theta}=\frac{2}{\sin^2\theta}=\frac{2}{\cos\theta}=\frac{2}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{4}{\sqrt{5}-1}$

$=\sqrt{5}+1$，故選(D)

25. $3+i=\sqrt{10}(\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{10}}i)=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$

$\Rightarrow \tan\theta_1=\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1}=\frac{\frac{1}{\sqrt{10}}}{\frac{3}{\sqrt{10}}}=\frac{1}{3}$

$2+i=\sqrt{5}(\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}i)=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

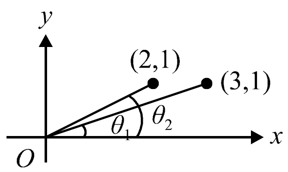
$\Rightarrow \tan\theta_2=\frac{\sin\theta_2}{\cos\theta_2}=\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}}=\frac{1}{2}$

又 $0<\theta_1<\frac{\pi}{2}$，$0<\theta_2<\frac{\pi}{2} \Rightarrow 0<\theta_1+\theta_2<\pi$

$\tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}=1$

$\therefore \theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{4}$，故選(A)

[另解]將複數平面對應到直角坐標



$\tan\theta_1=\frac{y}{x}=\frac{1}{3}$，$\tan\theta_2=\frac{y}{x}=\frac{1}{2}$

$\tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}=1$

$0<\theta_1<\frac{\pi}{2}$，$0<\theta_2<\frac{\pi}{2} \Rightarrow 0<\theta_1+\theta_2<\pi$

$\therefore \theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{4}$，故選(A)