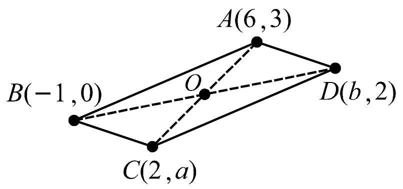
109 學年度四技二專第二次聯合模擬考試
共同科目　數學(C)卷　詳解

數學(C)卷　109-2-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	C	D	A	C	B	A	C	A	D	D	C	A	B	C	B	B	D	B	A	D	A	C	D	B

1. 如下圖，O 是平行四邊形 $ABCD$ 兩對角線交點
$O(\frac{6+2}{2},\frac{0+2}{2})=(4,1)$



將平行四邊形 $ABCD$ 面積平分的直線 L：$y=cx-3$ 必通過 O 點
∴將 $O(4,1)$ 代入 L 得 $1=4c-3$　∴ $c=1$
故選(B)

2. 設直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的 x 截距為 a，表 $\overleftrightarrow{AB}$ 過 $C(a,0)$
即 $A(-2,4)$、$B(4,1)$、$C(a,0)$ 三點共線
$\therefore m_{AB}=m_{BC}\Rightarrow\frac{1-4}{4-(-2)}=\frac{0-1}{a-4}\Rightarrow\frac{-3}{6}=\frac{-1}{a-4}$
$\Rightarrow a-4=2$　$\therefore a=6$，故選(C)

3. 平移後新函數為 $y=f(x)=a(x+3)^2-4a(x+3)+b$ 通過 $(3,18)$、$(-2,-12)$
代入得 $\begin{cases}18=36a-24a+b\\-12=a-4a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}12a+b=18\cdots\cdots①\\-3a+b=-12\cdots\cdots②\end{cases}$
①−②得 $15a=30\Rightarrow a=2$，$b=-6$
$\therefore a-b=2-(-6)=8$，故選(D)

4. $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$
$=\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{2}{3}\pi+\cos\frac{3}{3}\pi+\cos\frac{4}{3}\pi+\cos\frac{5}{3}\pi+\cos\frac{6}{3}\pi$
$=\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})+(-1)+(-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}+1=0$
又 $f(7)=\cos\frac{7}{3}\pi=\cos(2\pi+\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}=f(1)$
同理 $f(8)=f(2)$，$f(9)=f(3)$，$f(10)=f(4)$，$f(11)=f(5)$，$f(12)=f(6)$
$\therefore f(7)+f(8)+f(9)+f(10)+f(11)+f(12)=0$
∴週期為 6，每連續 6 個之和為 0
又 $75\div6=12\cdots\cdots3$
所求 $f(1)+f(2)+\cdots+f(75)$
$=0\times12+f(1)+f(2)+f(3)$
$=\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})+(-1)=-1$，故選(A)

5. 由圖形知週期為 $\frac{3}{2}\pi=\frac{2\pi}{|b|}$，又 $b>0$，$\frac{3}{2}\pi=\frac{2\pi}{b}$
$\Rightarrow 3b=4$　$\therefore b=\frac{4}{3}$，故選(C)

6. $\tan A$、$\tan B$ 為方程式 $x^2-(2a+1)x+3a=0$ 的二根，由根與係數知
$\begin{cases}二根和 \tan A+\tan B=2a+1\\二根積 \tan A\tan B=3a\end{cases}$
又 $\tan C=-\frac{1}{4}$
$\Rightarrow\tan[180^\circ-(A+B)]=-\frac{1}{4}\Rightarrow-\tan(A+B)=-\frac{1}{4}$
$\Rightarrow\tan(A+B)=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{2a+1}{1-3a}=\frac{1}{4}$
$\Rightarrow 8a+4=1-3a\Rightarrow 11a=-3\Rightarrow a=-\frac{3}{11}$，故選(B)

7. ΔABC 滿足 $2\cos A\sin B=\sin C$
即 $2\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\times\frac{b}{2R}=\frac{c}{2R}$
其中 R 是 ΔABC 外接圓半徑　$\therefore\frac{b^2+c^2-a^2}{c}=c$
即 $b^2+c^2-a^2=c^2\Rightarrow a^2=b^2\Rightarrow a=b$
$\therefore\Delta ABC$ 為等腰三角形，故選(A)

8. $\because\vec{a}\,//\,\vec{b}$　$\therefore\frac{5}{\cos\theta}=\frac{4}{\sin\theta}$，即 $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{4}{5}$
$\Rightarrow\tan\theta=\frac{4}{5}$，故選(C)

9. $\overrightarrow{OA}$ 以 O 為定點，逆時針旋轉 $\frac{\pi}{2}$ 得向量 $\overrightarrow{OB}$
可知 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$ 且 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$　$\therefore\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$
$|3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}|=\sqrt{7^2+4^2}=\sqrt{65}$
兩邊同時平方 $\Rightarrow|3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}|^2=65$
展開得 $9|\overrightarrow{OA}|^2+12\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+4|\overrightarrow{OB}|^2=65$
又 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$ 且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$
可得 $13|\overrightarrow{OB}|^2=65\Rightarrow|\overrightarrow{OB}|^2=5$　$\therefore|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{5}$
故選(A)

10. ΔABC 面積 $=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$
$=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2}$
$=\frac{1}{2}\sqrt{52\times13-10^2}=\frac{1}{2}\sqrt{576}=\frac{1}{2}\times24=12$，故選(D)

11. 由餘式定理知
$\because f(x)$ 除以 $x-\sin75^\circ$ 餘式為 $f(\sin75^\circ)$
∴餘式 $f(\sin75^\circ)=2\sin^2 75^\circ-1=2\cos^2 15^\circ-1$

$=\cos 2\times 15^\circ=\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ，故選(D)

12. $f(x)+2$ 可被 $(x+1)^2$ 整除
由因式定理知 $f(-1)+2=0$ ……①
$x+3$ 爲 $f(x)+7$ 的因式
由因式定理知 $f(-3)+7=0$ ……②
由①知 $f(-1)=-2$ ，由②知 $f(-3)=-7$
$\therefore f(-1)-f(-3)=-2-(-7)=5$ ，故選(C)

13. $\sqrt{17-\sqrt{288}}=\sqrt{17-2\sqrt{72}}=\sqrt{9+8-2\sqrt{9\times 8}}=\sqrt{9}-\sqrt{8}$
$\therefore x=9$ ， $y=8$
$\therefore 2x+3y=2\times 9+3\times 8=42$ ，故選(A)

14. $y=f(x)=x^3-5x^2+5x+11$ 圖形與 x 軸交點個數
相當於求 $x^3-5x^2+5x+11=0$ 的實根個數
$\because f(-1)=-1-5-5+11=0$
$\therefore x+1$ 爲 $x^3-5x^2+5x+11$ 的因式，由綜合除法

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -5 & +5 & +11 & -1 \\ & -1 & +6 & -11 & \\ \hline 1 & -6 & +11 & ,\ 0 & \end{array}$$

可將 $x^3-5x^2+5x+11=0$ 因式分解成
$(x+1)(x^2-6x+11)=0$
得 $x=-1$ 或 $x=\dfrac{6\pm\sqrt{-8}}{2}=\dfrac{6\pm 2\sqrt{2}i}{2}$
∴實根數爲 1 個，所以 $f(x)$ 與 x 軸交 1 點，故選(B)

15. 各項係數和 $a=f(1)=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$
$=(-60)+4+70-28+6-100=-108$ ，故選(C)

16. $\begin{vmatrix} 1 & x^2+7 & x(x^2-1) \\ 1 & y^2+7 & y(y^2-1) \\ 1 & z^2+7 & z(z^2-1) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3-x \\ 1 & y^2 & y^3-y \\ 1 & z^2 & z^3-z \end{vmatrix}$
$\times(-7)$
$=\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x \\ 1 & y^2 & y \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix}$
$=\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$
$\therefore \begin{vmatrix} 1 & x^2+7 & x(x^2-1) \\ 1 & y^2+7 & y(y^2-1) \\ 1 & z^2+7 & z(z^2-1) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$
$\Rightarrow 12=21+\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}=12-21=-9$
故選(B)

17. 將所求三階行列式依第二列降階展開可得
$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 1 & 2 & 3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+2\times\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}-3\times\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$
$=-6+2\times 5-3\times 3=-6+10-9=-5$ ，故選(B)

18. $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=4$ ， $\Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-16$
$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}=12$ ， $\Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}=20$
$\therefore x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{-16}{4}=-4$
$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{12}{4}=3$
$z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}=\dfrac{20}{4}=5$
可得 $p+2q+3r=(-4)+2\times 3+3\times 5=-4+6+15=17$
故選(D)

19. $z=\cos 40^\circ+i\sin 70^\circ$
$\overline{z}=\cos 40^\circ-i\sin 70^\circ=\cos 40^\circ+i\sin(180^\circ+70^\circ)$
$\therefore \overline{z}=\cos 40^\circ+i\sin 250^\circ$ ，故選(B)

20. $\because a+b-2i=4+abi$ 　 $\therefore \begin{cases} a+b=4 \\ ab=-2 \end{cases}$
$\because ab=-2<0\Rightarrow \dfrac{b}{a}<0$ ， $\dfrac{a}{b}<0$
$\therefore (\sqrt{\dfrac{b}{a}}+\sqrt{\dfrac{a}{b}})^2=\dfrac{b}{a}+2\sqrt{\dfrac{b}{a}}\times\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}-2\sqrt{\dfrac{b}{a}\times\dfrac{a}{b}}$
$\Rightarrow (\sqrt{\dfrac{b}{a}}+\sqrt{\dfrac{a}{b}})^2=\dfrac{a^2+b^2}{ab}-2=\dfrac{(a+b)^2-2ab}{ab}-2$
$=\dfrac{16+4}{-2}-2=-12$ ，故選(A)

21. $|z_1\times z_2\times z_3|=|z_1|\times|z_2|\times|z_3|=\cancel{\sqrt{10}}^{\sqrt{2}}\times 5\times\dfrac{\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{5}}}=10$
故選(D)

22. (1) $\because i^1=i$ ， $i^2=-1$ ， $i^3=-i$ ， $i^4=1$
可知 i 的週期爲 4 且 $i^1+i^2+i^3+i^4=0$
$\therefore (i^{14}+i^{15}+i^{16}+i^{17})+(i^{18}+i^{19}+i^{20}+i^{21})+\cdots i^{98}$
$=(i^2+i^3+i^4+i)+(i^2+i^3+i^4+i)+\cdots i^{98}$
$=[-1+(-i)+1+i]+[-1+(-i)+1+i]+\cdots$
每 4 個相加的和爲 0
又 $(98-13)\div 4=85\div 4=21\cdots\cdots 1$
$\therefore i^{14}+i^{15}+\cdots i^{98}=i^{98}=i^2=-1$
(2) $\because \omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ， $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ， $\omega^3=1$
可知 ω 的週期爲 3 且 $\omega+\omega^2+\omega^3=0$
$\therefore (\omega^{99}+\omega^{100}+\omega^{101})+(\omega^{102}+\omega^{103}+\omega^{104})+\cdots\omega^{199}$
$=(\omega^3+\omega+\omega^2)+(\omega^3+\omega+\omega^2)+\cdots$
每 3 個相加的和爲 0

又 $(199-98)\div 3=101\div 3=33\cdots\cdots 2$

$\therefore \omega^{99}+\omega^{100}+\omega^{101}+\cdots\omega^{199}=\omega^{198}+\omega^{199}$

$=\omega^{3}+\omega=1+\omega$

$\therefore i^{14}+i^{15}+\cdots i^{98}+\omega^{99}+\omega^{100}+\cdots\omega^{199}$

$=-1+1+\omega=\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，故選(A)

23. $\dfrac{x+5}{(x-1)^2}\ge 2$ 兩邊同乘 $(x-1)^2$ 得 $x+5\ge 2(x-1)^2$

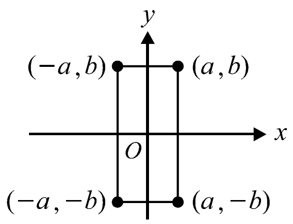
$\Rightarrow x+5\ge 2x^2-4x+2$ 且 $x\ne 1$

$\Rightarrow 2x^2-5x-3\le 0 \Rightarrow (2x+1)(x-3)\le 0$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{2}\le x\le 3$ 且 $x\ne 1$，又 x 為整數

$\therefore x=0,2,3$，共 3 個，故選(C)

24. 圖解不等式 $\begin{cases}-a\le x\le a\\ -b\le y\le b\end{cases}$ 如下圖



目標函數 $f(x,y)=3x-y$，當 $(x,y)=(a,-b)$ 時，有最大值 21，即 $3a+b=21\cdots\cdots$①

目標函數 $g(x,y)=y-2x$，當 $(x,y)=(-a,b)$ 時，有最大值 17，即 $2a+b=17\cdots\cdots$②

解①②得 $a=4$，$b=9$

$\therefore 2a+3b=2\times 4+3\times 9=8+27=35$，故選(D)

25. θ 為銳角

$4\csc^2\theta+9\sec^2\theta=\dfrac{4}{\sin^2\theta}+\dfrac{9}{\cos^2\theta}=(\dfrac{2}{\sin\theta})^2+(\dfrac{3}{\cos\theta})^2$

由柯西不等式知 $[(\dfrac{2}{\sin\theta})^2+(\dfrac{3}{\cos\theta})^2][\sin^2\theta+\cos^2\theta]$

$\ge(\dfrac{2}{\sin\theta}\times\sin\theta+\dfrac{3}{\cos\theta}\times\cos\theta)^2$

$\Rightarrow (4\csc^2\theta+9\sec^2\theta)\times 1\ge(2+3)^2$

$\Rightarrow 4\csc^2\theta+9\sec^2\theta\ge 25$

∴最小值為 25，故選(B)

[另解]

$4\csc^2\theta+9\sec^2\theta=4(1+\cot^2\theta)+9(1+\tan^2\theta)$

$=4\cot^2\theta+9\tan^2\theta+13$

由算幾不等式知

$\dfrac{4\cot^2\theta+9\tan^2\theta}{2}\ge\sqrt{36\cot^2\theta\cdot\tan^2\theta}=6$

$\Rightarrow 4\cot^2\theta+9\tan^2\theta\ge 12$

所求 $=4\cot^2\theta+9\tan^2\theta+13\ge 12+13=25$，故選(B)