108 學年度四技二專第五次聯合模擬考試
共同科目　數學(C)卷　詳解

數學(C)卷 108-5-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
D	B	D	C	C	B	C	C	A	D	D	B	C	A	A	D	B	A	A	C	B	D	B	C	A

1. 設銳角三角形最大角為 C (對應邊為最大邊 c)

$\because 0° < \angle C < 90° \quad \therefore \cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} > 0$

$\Rightarrow a^2+b^2-c^2 > 0 \Rightarrow a^2+b^2 > c^2$

(A) $2^2+3^2=13<4^2 \Rightarrow 2$、$3$、$4$ 不是銳角三角形的三邊長

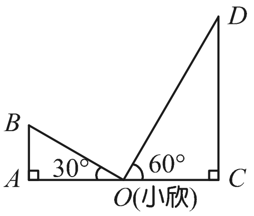
(B) $3^2+4^2=25<6^2 \Rightarrow 3$、$4$、$6$ 不是銳角三角形的三邊長

(C) $5^2+6^2=61<8^2 \Rightarrow 5$、$6$、$8$ 不是銳角三角形的三邊長

(D) $7^2+9^2=130>10^2 \Rightarrow 7$、$9$、$10$ 是銳角三角形的三邊長

故選(D)

2.



如上圖，小欣站在兩金字塔之間的中點 O 處，$\overline{AB}$ 為小金字塔高度、$\overline{CD}$ 為大金字塔高度

令 $\overline{OA}=\overline{OC}=h$

$\overline{AB}=h\tan 30°$，$\overline{CD}=h\tan 60°$

則 $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}}=\dfrac{h\tan 60°}{h\tan 30°}=\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=3$

故選(B)

3. (A) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$(第一列與第三列對調) $=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$(第二列與第三列對調)

(B) 行與列互換，所得新行列式之值和原來的相等

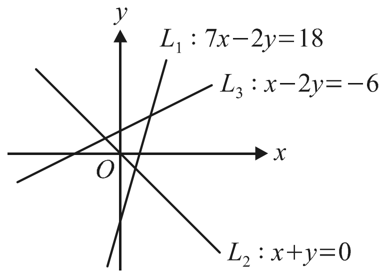
(C) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ -b_1+c_1 & -b_2+c_2 & -b_3+c_3 \end{vmatrix}$(將第二列 $\times(-1)$ 加到第三列)

$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ -b_1+c_1 & -b_2+c_2 & -b_3+c_3 \end{vmatrix}$(將第一列加到第二列)

(D) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{vmatrix}$(第一行與第三行對調，其值變號)

故選(D)

4.



如上圖，$\because$點 $P(a\,,b)$ 在三角形區域中

$\therefore 7a-2b \le 18$，$a+b \ge 0$，$a-2b \ge -6$

故選(C)

5. 設公差為 d，$a_1+a_3+\cdots+a_{29}=31$ ……①

$a_2+a_4+\cdots+a_{30}=76$ ……②

② − ①

$\Rightarrow (a_2+a_4+\cdots+a_{30})-(a_1+a_3+\cdots+a_{29})=76-31$

$\Rightarrow (a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{30}-a_{29})=45$

$\Rightarrow 15d=45 \Rightarrow d=3$

故選(C)

6. $a=\sqrt{\dfrac{1}{2}}=(\dfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}}=(\dfrac{1}{2})^{3\cdot\frac{1}{6}}=(\dfrac{1}{8})^{\frac{1}{6}}$

$b=\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}=(\dfrac{1}{3})^{\frac{1}{3}}=(\dfrac{1}{3})^{2\cdot\frac{1}{6}}=(\dfrac{1}{9})^{\frac{1}{6}}$

$c=\sqrt[6]{\dfrac{1}{6}}=(\dfrac{1}{6})^{\frac{1}{6}}$

$\because \dfrac{1}{9}<\dfrac{1}{8}<\dfrac{1}{6} \quad \therefore (\dfrac{1}{9})^{\frac{1}{6}}<(\dfrac{1}{8})^{\frac{1}{6}}<(\dfrac{1}{6})^{\frac{1}{6}}$

故 $b<a<c$，故選(B)

7. (A) $4^3=64$

(B) $P^4_3=24$

(C) $H^4_3=20$

(D) $C^4_3=4$

故選(C)

8. 甲沒有猜輸乙的機率 $=1-$ 甲猜輸乙的機率

$=1-\dfrac{3}{3\times 3}=\dfrac{2}{3}$，故選(C)

9. 期望值

$=\sum_{k=1}^{6}(\frac{1}{6}\times\frac{1}{k(k+1)})=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})$

$=\frac{1}{6}[(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{6}-\frac{1}{7})]$

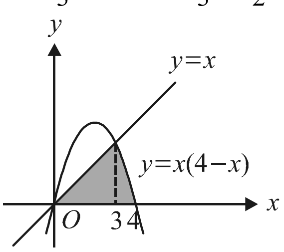
$=\frac{1}{6}(1-\frac{1}{7})=\frac{1}{7}$，故選(A)

10. (A) 乙科目的全距比甲科目的全距小
(B) 甲科目的算術平均數比乙科目的算術平均數小
(C) 甲科目的中位數比乙科目的中位數小
(D) 甲科目的標準差比乙科目的標準差大
故選(D)

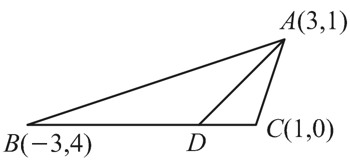
11. (A) 頂點是拋物線上與焦點距離最短的點
(B) $\overline{F_1F_2}=8=2c>2a=6$　∴不是橢圓
(C) $\overline{F_1F_2}=4=2c<2a=6$　∴不是雙曲線
(D) 等軸雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$
∴正焦弦長 $=\frac{2a^2}{a}=2a=$ 貫軸長
故選(D)

12. $\int_{-2}^{2}\sqrt{x^2+2x+1}\,dx=\int_{-2}^{2}\sqrt{(x+1)^2}\,dx$
$=\int_{-2}^{2}|x+1|\,dx=\int_{-2}^{-1}-(x+1)\,dx+\int_{-1}^{2}(x+1)\,dx$
$=-(\frac{x^2}{2}+x)\Big|_{-2}^{-1}+(\frac{x^2}{2}+x)\Big|_{-1}^{2}$
$=[-(\frac{1}{2}-1)+(2-2)]+[(2+2)-(\frac{1}{2}-1)]=5$，故選(B)

13. 解 $\begin{cases}y=x(4-x)\\y=0\end{cases}\Rightarrow x(4-x)=0\Rightarrow x=0$ 或 4
解 $\begin{cases}y=x(4-x)\\y=x\end{cases}\Rightarrow x(4-x)=x\Rightarrow 4x-x^2=x$
$\Rightarrow x^2-3x=0\Rightarrow x(x-3)=0\Rightarrow x=0$ 或 3
灰色區域面積 $=\int_0^4[x(4-x)-0]dx-\int_0^3[x(4-x)-x]dx$
$=\int_0^4(-x^2+4x)dx-\int_0^3(-x^2+3x)dx$
$=(-\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{2}x^2)\Big|_0^4-(-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2)\Big|_0^3$
$=(-\frac{64}{3}+32)-(-\frac{27}{3}+\frac{27}{2})=\frac{37}{6}$，故選(C)



14.



ΔABD 面積 $=3\cdot\Delta ACD$ 面積
∵ ΔABD 與 ΔACD 有相同的高
∴ $\overline{BD}:\overline{CD}=\Delta ABD$ 面積：ΔACD 面積 $=3:1$
由分點公式得 $D(\frac{1\times(-3)+3\times1}{1+3},\frac{1\times4+3\times0}{1+3})=(0,1)$
直線 L 通過 A 、 D 兩點，故斜率 $m=\frac{1-1}{3-0}=0$
故選(A)

15. 多項式 $f(x)$ 之各項係數和爲 $2\Rightarrow f(1)=2$
$f(x)=(x^2+x+1)\cdot q(x)+5x+3$
$\Rightarrow f(1)=(1^2+1+1)\cdot q(1)+5\cdot1+3=2$
$\Rightarrow 3q(1)+8=2\Rightarrow 3q(1)=-6\Rightarrow q(1)=-2$
∴ $x-1$ 除 $q(x)$ 之餘式爲 $q(1)=-2$
故選(A)

16. $\alpha=\sin15°-i\cos15°$
$=\cos75°-i\sin75°=\cos285°+i\sin285°$
$\alpha^{20}=(\cos285°+i\sin285°)^{20}$
$=\cos5700°+i\sin5700°=\cos300°+i\sin300°$
$=\cos60°+i(-\sin60°)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$
$\Rightarrow(x,y)=(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})\rightarrow$ 在第四象限，故選(D)

17. 設原分數爲 x 分，調整後分數爲 $12\sqrt{x}+16$
∴增加的分數爲 $f(x)=12\sqrt{x}+16-x=12x^{\frac{1}{2}}-x+16$
且 $0\le x\le 49$
$f'(x)=12\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-1=\frac{6}{\sqrt{x}}-1=\frac{6-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
令 $f'(x)=0\Rightarrow\frac{6-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=0$
$\Rightarrow 6-\sqrt{x}=0\Rightarrow\sqrt{x}=6\Rightarrow x=36$

x	0	$\cdots$	36	$\cdots$	49
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	16	↗	62	↘	51

∴當 $x=36$ 時， $f(x)$ 最大，即原始分數爲 36 分者，所加的分數最多，故選(B)

18. 設圓 O 半徑爲 r
∵ $\overline{AB}=1\Rightarrow B$ 點坐標爲 $(r,-1)$
$\Rightarrow\tan\theta=\frac{-1}{r}\Rightarrow r=\frac{-1}{\tan\theta}=-\cot\theta$，故選(A)

19. $\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$
$\theta=180°-\angle C$ ， $\sin\theta=\sin(180°-\angle C)=\sin C=\frac{3}{5}$
$\cos\theta=\cos(180°-\angle C)=-\cos C=-\frac{4}{5}$
故 $\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\frac{3}{5}\cdot(-\frac{4}{5})=-\frac{24}{25}$
故選(A)

20. $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BO}=-\overrightarrow{OB}=-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})$

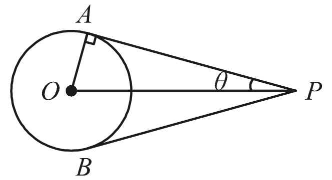
$=-[(2,0)+(2\cdot\cos 60^\circ,2\cdot\sin 60^\circ)]$

$=-[(2,0)+(1,\sqrt{3})]=(-3,-\sqrt{3})$，故選(C)

21. $\because$ 方程式 $x^3+ax^2+bx+3=0$ 有三個相異有理根
$\Rightarrow f(x)=x^3+ax^2+bx+3$ 有三個相異的整係數一次因式
由整係數一次因式檢驗法可得因式可能為 $x\pm 1$、$x\pm 3$，再由因式常數項乘積為 3 可知
$f(x)=(x+1)(x-1)(x-3)$
$\therefore$ 此方程式的三個根為 $\pm 1,3$
即最小根為 -1，故選(B)

22. 由二項式定理得：
$(1+x)^{10}=C_0^{10}+C_1^{10}x+C_2^{10}x^2+\cdots+C_9^{10}x^9+C_{10}^{10}x^{10}\cdots(*)$
令 $x=1$ 代入(*)式
$\Rightarrow C_0^{10}+C_1^{10}+C_2^{10}+C_3^{10}+\cdots+C_{10}^{10}=2^{10}\cdots\cdots$①
$x=-1$ 代入(*)式
$\Rightarrow C_0^{10}-C_1^{10}+C_2^{10}-C_3^{10}+\cdots+C_{10}^{10}=0\cdots\cdots$②
(A) 由①式
$C_0^{10}+C_1^{10}+C_2^{10}+C_3^{10}+\cdots+C_{10}^{10}=2^{10}$
$\Rightarrow C_1^{10}+C_2^{10}+C_3^{10}+\cdots+C_{10}^{10}=2^{10}-C_0^{10}=1023$
(B) 由②式
$C_0^{10}-C_1^{10}+C_2^{10}-C_3^{10}+\cdots+C_{10}^{10}=0$
$\Rightarrow -C_1^{10}+C_2^{10}-C_3^{10}+\cdots+C_{10}^{10}=-C_0^{10}$
$\Rightarrow C_1^{10}-C_2^{10}+C_3^{10}+\cdots-C_{10}^{10}=C_0^{10}=1$
(C) $\dfrac{①+②}{2}\Rightarrow C_0^{10}+C_2^{10}+C_4^{10}+C_6^{10}+C_8^{10}+C_{10}^{10}=2^9$
$\Rightarrow C_2^{10}+C_4^{10}+C_6^{10}+C_8^{10}+C_{10}^{10}=2^9-C_0^{10}=511$
(D) $\dfrac{①-②}{2}\Rightarrow C_1^{10}+C_3^{10}+C_5^{10}+C_7^{10}+C_9^{10}=2^9=512$
故選(D)

23. A 為切點，O 為圓心
$\Rightarrow \overline{OA}\perp\overline{AP}\Rightarrow \Delta OAP$ 為直角三角形
$\angle APB=2\theta\Rightarrow\angle OPA=\theta$
令 $f(x,y)=x^2+y^2-4x-2y$
切線段長 $\overline{AP}$ 為
$\sqrt{f(-2,4)}=\sqrt{4+16+8-8}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$
半徑 $\overline{OA}=\dfrac{\sqrt{(-4)^2+(-2)^2-4\times 0}}{2}=\sqrt{5}$
$\therefore \tan\theta=\dfrac{\overline{OA}}{\overline{AP}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=\dfrac{1}{2}$
$\Rightarrow \tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2\times\frac{1}{2}}{1-(\frac{1}{2})^2}=\dfrac{4}{3}$，故選(B)



24. $\because \lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{a\sqrt{x+2}+b}{x-2}$ 存在
$\therefore \lim\limits_{x\to 2}(a\sqrt{x+2}+6)=0$
$\Rightarrow a\sqrt{2+2}+b=0\Rightarrow 2a+b=0\Rightarrow b=-2a$ 代入原式
得 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{a\sqrt{x+2}-2a}{x-2}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{a(\sqrt{x+2}-2)}{x-2}=1$
$\Rightarrow\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{a(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}=1$
$\Rightarrow\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{a\,\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{x+2}+2)}=1\Rightarrow\dfrac{a}{4}=1\Rightarrow a=4$
故選(C)

25. 設 6 等星亮度為 F，則 1 等星的亮度為 $100F$
$$\Rightarrow\begin{cases}1=k\cdot\log\dfrac{100F}{F_0}\cdots\cdots①\\6=k\cdot\log\dfrac{F}{F_0}\cdots\cdots②\end{cases}$$
①−②得
$$-5=k\cdot(\log\frac{100F}{F_0}-\log\frac{F}{F_0})\Rightarrow -5=k\cdot\log\frac{\frac{100F}{F_0}}{\frac{F}{F_0}}$$
$\Rightarrow -5=k\cdot\log 100\Rightarrow -5=k\cdot 2\Rightarrow k=-\dfrac{5}{2}$
故選(A)