# 108 學年度四技二專第四次聯合模擬考試
# 共同科目　數學(C)卷　詳解

**數學(C)卷**　　108-4-C

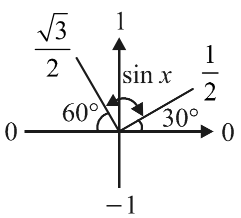
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | B | C | A | B | D | A | C | A | D | D | C | C | A | B | C | A | C | B | B | D | D | B | A | A |

1. 由點斜式可知
$L$：$y-0=\frac{1}{3}(x-0)\Rightarrow y=\frac{x}{3}$
解 $\begin{cases} y=x^2+x-\frac{5}{3} \\ y=\frac{x}{3} \end{cases}$，可得 $\frac{x}{3}=x^2+x-\frac{5}{3}$
$\Rightarrow 3x^2+2x-5=0\Rightarrow(3x+5)(x-1)=0$
$\Rightarrow x=-\frac{5}{3}$ 或 1，代回直線 $L$ 的方程式
可知交點為 $A(-\frac{5}{3},-\frac{5}{9})$、$B(1,\frac{1}{3})$
故 $\overline{AB}=\sqrt{(-\frac{5}{3}-1)^2+(-\frac{5}{9}-\frac{1}{3})^2}=\frac{8\sqrt{10}}{9}$，選(B)

2. 由圖(一)可知
(1) 拋物線開口向上 $\Rightarrow a>0$
(2) 拋物線頂點 $(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a})$ 在 $y$ 軸右側
$\Rightarrow -\frac{b}{2a}>0\Rightarrow b<0$
(3) 拋物線與 $y$ 軸上交點 $(0,c)$ 在 $y$ 軸正向 $\Rightarrow c>0$
(4) $\because x=1$ 與拋物線交於 $x$ 軸下方
$\therefore f(1)=a+b+c<0\Rightarrow a+b<-c<0$ 且 $b+c<-a<0$
(A) 圖中直線斜率為 $a>0$，$y$ 截距 $b<0$ (合)
(B) 圖中直線斜率為 $a+b>0$ (不合)
(C) 圖中直線斜率為 $b+c<0$，$y$ 截距 $a>0$ (合)
(D) 圖中直線斜率為 $a+c>0$，$y$ 截距 $b<0$ (合)
故選(B)

3. 所求 $=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+1\times(-1)+(-1)\times(-1)$
$=\frac{3}{4}-1+1=\frac{3}{4}$，故選(C)

4. $\because \frac{\pi}{6}\le x\le\frac{2\pi}{3}$
$\therefore \frac{1}{2}\le\sin x\le 1$

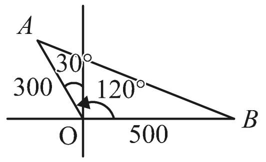



又 $2\cos^2 x-4\sin x-1$
$=2(1-\sin^2 x)-4\sin x-1$
$=-2\sin^2 x-4\sin x+1$
$=-2(\sin^2 x+2\sin x+1^2)+2+1$
$=-2(\sin x+1)^2+3$
但 $\frac{1}{2}\le\sin x\le 1$，故當 $\sin x$ 越接近 $-1$ 時，即 $\sin x=\frac{1}{2}$ 時，所求之最大值為 $-2(\frac{1}{2}+1)^2+3=-\frac{3}{2}$，選(A)

5. 設耳機發出之函數為 $g(x)$
則 $(2\sin\frac{x}{2}+1)+g(x)=0\Rightarrow g(x)=-2\sin\frac{x}{2}-1$
其圖形為將 $y=\sin x$ 的圖形作
(1) 週期 2 倍(變成 $4\pi$) $\Rightarrow y=\sin\frac{x}{2}$
(2) 振幅 2 倍($-2\le y\le 2$) $\Rightarrow y=2\sin\frac{x}{2}$
(3) 對 $x$ 軸作對稱 $\Rightarrow y=-2\sin\frac{x}{2}$
(4) 向下平移 1 單位 $\Rightarrow y=-2\sin\frac{x}{2}-1$
故圖形最接近(B)選項

6. (A) $\vec{a}\cdot\vec{a}=\sin^2 A+\cos^2 B$
(B) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\sin A\sin B+\cos B\cos A$
$=\cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C$
(C) $\vec{a}\cdot\vec{c}=\sin A\cos B-\cos B\sin A=0$
(D) $\vec{a}\cdot\vec{d}=\sin A\sin B-\cos A\cos B$
$=-\cos(A+B)=-\cos(\pi-C)=\cos C$
故選(D)

7. 設觀測站為 O 點，颱風上午八點位於 $A$ 點，下午三點位於 $B$ 點，作圖如下




由餘弦定理可知
$\overline{AB}^2=300^2+500^2-2\times300\times500\times\cos120^\circ=490000$
$\therefore \overline{AB}=\sqrt{490000}=700$ 公里
又兩次觀測時間隔 $15-8=7$ 小時
故平均時速為 $\frac{700}{7}=100$ 公里/小時，選(A)

8. 由題意可知 $\frac{8x^3-4x^2-4x+2}{(2x-1)^4}$
$=\frac{a}{(2x-1)^4}+\frac{b}{(2x-1)^3}+\frac{c}{(2x-1)^2}+\frac{d}{2x-1}$
上式同乘以 $(2x-1)^4$ 可得
$8x^3-4x^2-4x+2=a+b(2x-1)+c(2x-1)^2+d(2x-1)^3$
$=d(2x-1)^3+c(2x-1)^2+b(2x-1)+a$
利用連續綜合除法

$$\begin{array}{l|l}
\quad 8-4-4+2 & \frac{1}{2} \\
\quad\ \ +4+0-2 & 2 \\
\hline
2\ \boxed{8+0-4}+0=a & \\
\quad 4+0-2 & \\
\quad\ \ +2+1 & \\
\hline
2\ \boxed{4+2}-1=b & \\
\quad 2+1 & \\
\quad\ \ +1 & \\
\hline
2\ \boxed{2}+2=c & \\
\quad 1=d &
\end{array}$$

可得 $8x^3-4x^2-4x+2=(2x-1)^3+2(2x-1)^2-(2x-1)$

故 $a+c=0+2=2$，選(C)

9. $\because f(x)$ 爲三次多項式，且 $f(1)=f(2)=f(-1)=3$

$\therefore$ 可設 $f(x)=a(x-1)(x-2)(x+1)+3$

又 $f(x)$ 可被 $x+2$ 整除 $\therefore f(-2)=0$

$\Rightarrow a(-3)(-4)(-1)+3=0 \Rightarrow a=\dfrac{1}{4}$

可得 $f(x)=\dfrac{1}{4}(x-1)(x-2)(x+1)+3$

故常數項爲 $f(0)=\dfrac{1}{4}(-1)(-2)(1)+3=\dfrac{7}{2}$，選(A)

10. 原方程組可化爲 $\begin{cases} tx+y+tz=0 \\ (1-t)x+ty=0 \\ x+(1-t)y+z=0 \end{cases}$

$\because$ 有無限多組解 $\therefore$ 其係數行列式值爲零

即 $\begin{vmatrix} t & 1 & t \\ 1-t & t & 0 \\ 1 & 1-t & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & t \\ 1-t & t & 0 \\ 0 & 1-t & 1 \end{vmatrix}$

$(-1)$

$=t(1-t)^2-(1-t)=(1-t)[t(1-t)-1]$

$=(1-t)(-t^2+t-1)=0$

可得 $1-t=0$ 或 $-t^2+t-1=0$

其中 $-t^2+t-1=0$ 之判別式爲

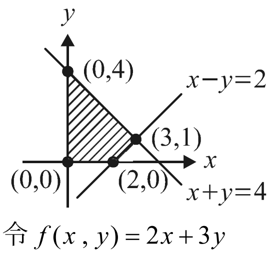
$1^2-4(-1)(-1)=-3<0$，並無實根

故 $1-t=0 \Rightarrow t=1$，選(D)

11. 所求爲 $|z|=\dfrac{|1+3i|\cdot|2-2i|^2}{|1+i|^3\cdot|3-i|}$

$=\dfrac{\sqrt{10}\times\sqrt{8}^2}{\sqrt{2}^3\times\sqrt{10}}=\dfrac{8}{2\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，故選(D)

12. 作圖如下




令 $f(x\,,y)=2x+3y$

分別以可行解區域四個頂點代入 $f(x\,,y)$ 可得

$f(0\,,0)=0$、$f(0\,,4)=12$、$f(3\,,1)=9$、$f(2\,,0)=4$

故 $2x+3y$ 的最大値爲 12，選(C)

13. 利用柯西不等式可得

$(x+2y+3z)\times(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z})$

$=[(\sqrt{x})^2+(\sqrt{2y})^2+(\sqrt{3z})^2]\times[(\sqrt{\dfrac{1}{x}})^2+(\sqrt{\dfrac{2}{y}})^2+(\sqrt{\dfrac{3}{z}})^2]$

$\geq(\sqrt{x}\times\sqrt{\dfrac{1}{x}}+\sqrt{2y}\times\sqrt{\dfrac{2}{y}}+\sqrt{3z}\times\sqrt{\dfrac{3}{z}})^2$

$=(1+2+3)^2=36$

故最小値爲 36，選(C)

14. $\log150=\log(3\times5\times10)=\log3+\log5+\log10$

$=\log3+(1-\log2)+1=2+\log3-\log2$

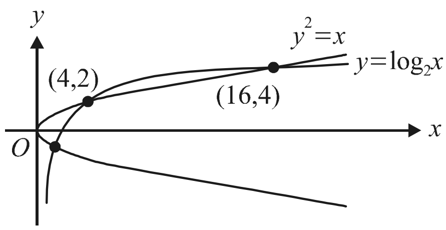
$\fallingdotseq 2+0.4771-0.3010=2.1761$，故選(A)

15. $\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 x)>1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(\log_3 x)>\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow 0<\log_3 x<\dfrac{1}{2} \Rightarrow \log_3 1<\log_3 x<\log_3 3^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow 1<x<\sqrt{3}$，故選(B)

16. 作圖如下




可知有三個交點，故選(C)

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{20}(1-i)^n=\dfrac{(1-i)\times[1-(1-i)^{20}]}{1-(1-i)}=\dfrac{(1-i)[1-(-2i)^{10}]}{i}$

$=\dfrac{(1-i)[1-(1024i^2)]}{i}=\dfrac{1025(1-i)}{i}=\dfrac{1025(1-i)\cdot i}{i^2}$

$=-1025-1025i$

故 $b=-1025$，選(A)

18. 將兩位臺灣人與兩位美國人先視爲四個相同的空位，與三位日本人排成一路縱隊，方法數爲 $\dfrac{7!}{4!}$，再考慮此四個空位前兩個排入兩位臺灣人，後兩個排入兩位美國人，故所求爲 $\dfrac{7!}{4!}\times2!\times2!=840$ 種，選(C)

19. 列表如下

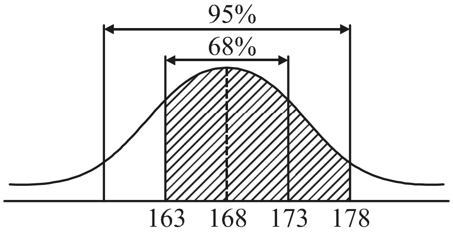
| 硬幣 | 正面 | | | | | | 反面 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 骰子點數 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 獎金 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 機率 | 皆爲 $\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}$ | | | | | | 皆爲 $\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}$ | | | | | |

故所求爲

$\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{2}\times(2+4+6+8+10+12)+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{2}\times(1+2+3+4+5+6)$

$=\dfrac{42}{12}+\dfrac{21}{12}=\dfrac{21}{4}$，選(B)

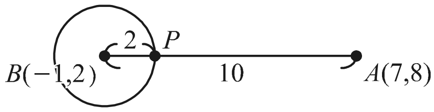
20. 由常態分配的經驗法則可知




所求約為 $2000\times 68\% + 2000\times \frac{1}{2}(95\% - 68\%)$

$= 1360 + 270 = 1630$ 人，故選(B)

21.




圓 $C$ 之圓心為 $B(\frac{2}{-2}, \frac{-4}{-2}) = (-1, 2)$

半徑 $r = \frac{1}{2}\sqrt{4+16-4} = 2$

又 $\overline{AB} = \sqrt{(7+1)^2 + (8-2)^2} = 10$

$\therefore \overline{BP}:\overline{PA} = 2:(10-2) = 1:4$

由分點公式可得

$P(\frac{1\times 7 + 4\times(-1)}{1+4}, \frac{1\times 8 + 4\times 2}{1+4}) = (\frac{3}{5}, \frac{16}{5})$

$\therefore a + b = \frac{3}{5} + \frac{16}{5} = \frac{19}{5}$，故選(D)

22. $\because \Gamma_1$：$\frac{(x-1)^2}{36} + \frac{(y+2)^2}{100} = 1$

$\Rightarrow a^2 = 100$、$b^2 = 36 \Rightarrow a = 10$、$b = 6$

$\therefore c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{100-36} = 8$

$\because \Gamma_1$ 與 $\Gamma_2$ 共焦點

$\therefore \Gamma_1$ 與 $\Gamma_2$ 共中心且兩焦點之距離相等

$\therefore \Gamma_2$ 之中心到一焦點之距 $c' = c = 8$

又 $\Gamma_2$ 的貫軸長 $2a' = \Gamma_1$ 的短軸長 $2b$

即 $2a' = 2b \Rightarrow a' = b = 6$

故所求 $\Gamma_2$ 的共軛軸長 $2b' = 2\sqrt{c'^2 - a'^2} = 2\sqrt{8^2 - 6^2}$

$= 2\sqrt{28} = 4\sqrt{7}$，選(D)

23. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-3)^n + 2^{2n+1}}{4^n} = \lim\limits_{n\to\infty}[(\frac{-3}{4})^n + 2(\frac{2^2}{4})^n]$

$= \lim\limits_{n\to\infty}(-\frac{3}{4})^n + 2\lim\limits_{n\to\infty}1^n = 0 + 2 = 2$

且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n + 2^{n+1}}{4^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-\frac{3}{4})^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty}2\times(\frac{2}{4})^n$

$= \frac{1}{1-(-\frac{3}{4})} + \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{4}{7} + 4 = \frac{32}{7}$

可得所求為 $2 + \frac{32}{7} = \frac{46}{7}$，故選(B)

24. $f'(x) = 3x^2 - 4x$

$f(x)$ 在 $x = 1$ 處之切線斜率為 $f'(1) = 3 - 4 = -1$

又 $f(1) = 1 - 2 + 1 = 0$，可得切點 $(1, f(1)) = (1, 0)$

由點斜式可知切線為 $y - 0 = -(x-1) \Rightarrow y = -x + 1$

故選(A)

25. $\because \int_{-2}^{a} f(x)dx = \int_{-2}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{a} f(x)dx$

所求即為 $\int_{2}^{a} f(x)dx = \int_{-2}^{a} f(x)dx - \int_{-2}^{2} f(x)dx$

$= \frac{64}{3} - \int_{-2}^{2}(\frac{1}{2}x^2 - 2)dx$

$= \frac{64}{3} - (\frac{x^3}{6} - 2x)\Big|_{-2}^{2}$

$= \frac{64}{3} - [(\frac{4}{3} - 4) - (-\frac{4}{3} + 4)]$

$= \frac{64}{3} - \frac{8}{3} + 8 = \frac{80}{3}$，故選(A)