108 學年度四技二專第三次聯合模擬考試
共同科目　數學(C)卷　詳解

數學(C)卷 108-3-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	B	D	A	B	A	D	D	B	A	B	C	D	A	C	B	C	C	A	D	C	B	D	A	C

1. L 斜率爲 $\dfrac{\log_2 24-\log_2 3}{6-3}=\dfrac{\log_2\dfrac{24}{3}}{3}=\dfrac{\log_2 8}{3}=\dfrac{3}{3}=1$
故選(C)

2. $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{25}{12}\Rightarrow\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{25}{12}$
$\Rightarrow\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{25}{12}\Rightarrow\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{25}{12}$
$\Rightarrow\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{25}{12}\Rightarrow\sin\theta\cos\theta=\dfrac{12}{25}$
$\therefore(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=1+2\times\dfrac{12}{25}=\dfrac{49}{25}$
故選(B)

3. $\dfrac{\sin 324^\circ}{\sin 108^\circ}-\dfrac{\cos 324^\circ}{\cos 108^\circ}$
$=\dfrac{\sin 324^\circ\cos 108^\circ-\cos 324^\circ\sin 108^\circ}{\sin 108^\circ\cos 108^\circ}$
$=\dfrac{\sin(324^\circ-108^\circ)}{\dfrac{1}{2}\times 2\sin 108^\circ\cos 108^\circ}=\dfrac{\cancel{\sin 216^\circ}}{\dfrac{1}{2}\cancel{\sin 216^\circ}}=2$，故選(D)

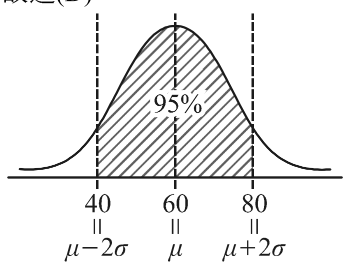
4. $(5x^4+4x^3+3x^2+2x+1)^2$
$=(5x^4+4x^3+3x^2+2x+1)(5x^4+4x^3+3x^2+2x+1)$
$\therefore x^3$ 項係數爲 $4\times1+3\times2+2\times3+1\times4=20$，故選(A)

5. 由根與係數知，$\begin{cases}\text{二根和}\alpha+\beta=3\\ \text{二根積}\alpha\beta=-5\end{cases}$
所求 $\begin{vmatrix}0&\beta&\alpha\\1&3&1\\\beta&\alpha&0\end{vmatrix}=\alpha^2+\beta^2-3\alpha\beta$
又 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2\times(-5)=19$
$\begin{vmatrix}0&\beta&\alpha\\1&3&1\\\beta&\alpha&0\end{vmatrix}=\alpha^2+\beta^2-3\alpha\beta=19-3\times(-5)=34$
故選(B)

6. $(\dfrac{1}{3})^{-x^2+2x}<27\Rightarrow(3^{-1})^{-x^2+2x}<3^3\Rightarrow3^{x^2-2x}<3^3$
$\therefore x^2-2x<3\Rightarrow x^2-2x-3<0\Rightarrow(x-3)(x+1)<0$
$\therefore -1<x<3$，故選(A)

7. 由二項式定理 $(x+y)^m=\sum\limits_{k=0}^{m}C_k^m x^k y^{m-k}$
取 $m=5$，$x=\dfrac{19}{4}$，$y=-\dfrac{3}{4}$
所求 $C_0^5(-\dfrac{3}{4})^5+C_1^5(\dfrac{19}{4})(-\dfrac{3}{4})^4+C_2^5(\dfrac{19}{4})^2(-\dfrac{3}{4})^3$
$+C_3^5(\dfrac{19}{4})^3(-\dfrac{3}{4})^2+C_4^5(\dfrac{19}{4})^4(-\dfrac{3}{4})+C_5^5(\dfrac{19}{4})^5$
$=[\dfrac{19}{4}+(-\dfrac{3}{4})]^5=4^5=2^{10}$
$\therefore n=10$，故選(D)

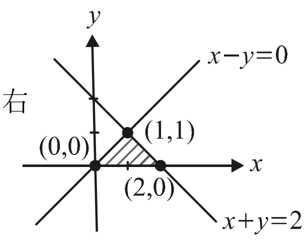
8. 已知平均分數 $\mu=60$，標準差 $\sigma=10$
$40=60-2\times10=\mu-2\sigma$
又 $\mu+2\sigma=60+2\times10=80$
$\Rightarrow$ 40~80 分佔 95%
$\Rightarrow$ 40~60 分佔 $\dfrac{95\%}{2}=47.5\%$
$\therefore$40~60 分參加補考的人約 $1000\times47.5\%=475$ 人
故選(D)



9. $z_1^{\,3}=z_2^{\,3}=z_3^{\,3}=1+i$
$\therefore z_1$、z_2、z_3 爲 $1+i$ 的 3 次方根，主幅角分別爲 θ_1、θ_2、θ_3，假設 $\theta_1<\theta_2<\theta_3$
$1+i=\sqrt{2}(\cos45^\circ+i\sin45^\circ)$
$\therefore\theta_1=\dfrac{45^\circ}{3}=15^\circ$，各根之主幅角相差 $\dfrac{360^\circ}{3}=120^\circ$
$\therefore\theta_2=15^\circ+120^\circ=135^\circ$，$\theta_3=135^\circ+120^\circ=255^\circ$
$\therefore\theta_1+\theta_2+\theta_3=15^\circ+135^\circ+255^\circ=405^\circ$，故選(B)

10. 公比 $r=4$，等比數列前 60 項和 $S_{60}=4^{60}-1$，設首項爲 x_1
$\therefore\dfrac{x_1(4^{60}-1)}{4-1}=4^{60}-1\Rightarrow\dfrac{x_1}{3}=1$　$\therefore x_1=3$
$\therefore x_5=x_1r^4=3\times4^4=3\times256=768$，故選(A)

11. 圖解 $\begin{cases}x-y\ge0 & \begin{array}{c|c|c}x&0&1\\\hline y&0&1\end{array}\\ x+y\le2 & \begin{array}{c|c|c}x&0&2\\\hline y&2&0\end{array}\\ y\ge0\end{cases}$ 如右



$(x\,,y)$	$f(x\,,y)=ax+y$
$(0\,,0)$	0
$(2\,,0)$	$2a$
$(1\,,1)$	$a+1$

$\because f(x\,,y)=ax+y$，最大值為 4

①若 $2a=4$，$a=2$，則 $a+1=3$　$\therefore$最大值為 4

②若 $a+1=4$，$a=3$，則 $2a=6$　$\therefore$最大值為 6 矛盾

$\therefore a=2$，故選(B)

12. 由正弦定理知 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & \cos(90^\circ-\angle A) \\ b & 1 & \cos(90^\circ-\angle B) \\ c & 1 & \cos(90^\circ-\angle C)\end{vmatrix}=\underset{\text{(第1行和第3行成比例)}}{\begin{vmatrix} a & 1 & \sin\angle A \\ b & 1 & \sin\angle B \\ c & 1 & \sin\angle C\end{vmatrix}}=0$$

故選(C)

13. $\because f(x)$ 可被 $x-2$ 整除　$\therefore f(2)=0$，由餘式定理知 $g(x)$ 除以 $x-2$ 的餘式為 $g(2)$

將 $x=2$ 代入 $2019\times f(x)-2\times g(x)=x^3-3x+2$

得 $\cancel{2019\times \underset{\underset{0}{\|}}{f(2)}}-2g(2)=8-6+2$

$\Rightarrow -2g(2)=4$　$\therefore g(2)=-2$，故選(D)

14. $\alpha=\sqrt{3+\sqrt{5}}$，$\beta=\sqrt{3-\sqrt{5}}$

$\alpha^2+\beta^2=3+\cancel{\sqrt{5}}+3-\cancel{\sqrt{5}}=6$

$\alpha\beta=\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}=\sqrt{9-5}=2$

$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=6-2\times2=2$

$\therefore \alpha-\beta=\pm\sqrt{2}$

又 $\alpha>\beta$　$\therefore \alpha-\beta=\sqrt{2}$，故選(A)

[另解] $\sqrt{3+\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{6+2\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}$

同理 $\sqrt{3-\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$所求 $=\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，故選(A)

15. $f(x)=\dfrac{1}{1-\sin x}+\dfrac{1}{1+\sin x}=\dfrac{1+\sin x+1-\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$

$=\dfrac{2}{1-\sin^2 x}=\dfrac{2}{\cos^2 x}=2\sec^2 x$

$\therefore f(x)$ 的週期為 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，故選(C)

16. $f(\tan\dfrac{\pi}{8})=\dfrac{2\tan\dfrac{\pi}{8}}{1-\tan^2\dfrac{\pi}{8}}=\tan(2\times\dfrac{\pi}{8})=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$

故選(B)

17. $\log_2 3=a$，$\log_3 5=b \Rightarrow ab=\log_2 3\times\log_3 5=\log_2 5$

$\therefore \log_{45}x=\dfrac{ab+a+2}{ab+2a}=\dfrac{\log_2 5+\log_2 3+\log_2 4}{\log_2 5+2\log_2 3}$

$\therefore \log_{45}x=\dfrac{\log_2(5\times3\times4)}{\log_2 5+\log_2 9}$

$\Rightarrow \log_{45}x=\dfrac{\log_2 60}{\log_2 45}=\log_{45}60$　$\therefore x=60$，故選(C)

18. $y=3x^2$ 的頂點坐標為$(0\,,0)$

新函數 $y=3x^2+12x+13=3(x^2+4x+4)-12+13$

$\Rightarrow y=3(x+2)^2+1 \Rightarrow$ 頂點坐標為 $(-2\,,1)$

由頂點坐標$(0\,,0)$平移至新頂點坐標 $(-2,1)$ 知 $y=3x^2$ 經左移 2 單位再上移 1 單位得到新函數 $y=3x^2+12x+13$，所以 $y=3x^2$ 上一點 $(a\,,b)$ 經左移 2 單位再上移 1 單位得 $(a-2\,,b+1)$ 必在新函數 $y=3x^2+12x+13$ 上，故選(C)

19. 依字數分類：3 個「立」，2 個「以、為、學」，「身、先、讀、書、本」各 1 個

先排「身以學為先學以讀書為本」11 個字：

$\dfrac{11!}{2!\,2!\,2!}=\dfrac{11!}{(2!)^3}$

以上每種排法均有 12 個空隙讓 3 個「立」字排：

$\dfrac{P_3^{12}}{3!}=C_3^{12}$

利用乘法原理共有 $\dfrac{11!}{(2!)^3}\times C_3^{12}$ 種排法，故選(A)

20. 自袋中任取一球，取出紅球的機率是 $\dfrac{2}{7}$

$\therefore$紅球有 $21\times\dfrac{2}{7}=6$ 個

假設白球有 x 個，則黑球有 $21-6-x=15-x$ 個

從袋中任意取二球，則二球顏色相異的機率為 $\dfrac{2}{3}$

即 $\dfrac{C_1^6C_1^x+C_1^xC_1^{15-x}+C_1^6C_1^{15-x}}{C_2^{21}}=\dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow 6x+x(15-x)+6(15-x)=\dfrac{2}{3}\times C_2^{21}=\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times\dfrac{\overset{7}{\cancel{21}}\times20}{\cancel{2}}$

$\Rightarrow \cancel{6x}+15x-x^2+90-\cancel{6x}=140$

$\Rightarrow x^2-15x+50=0 \Rightarrow (x-10)(x-5)=0$

$\Rightarrow x=10$ or 5，又白球個數多於黑球，故選(D)

21. (A) 贊成恢復核能發電的民眾比例為

$\dfrac{816}{1200}\times100\%=68\%$ →正確

(B) 95%的信賴區間為 $[0.68-0.03\,,0.68+0.03]$

$=[0.65\,,0.71]$ →正確

(C) 區間$[0.65\,,0.71]$包含真正贊成恢復核能發電的民眾比例的機率不是 0 就是 1→錯誤

(D) 95%信心水準的意思：抽樣多次，每一次都得到一個信賴區間，約有 95%的區間會涵蓋真正的比例，所以抽樣 100 次，大概會有 95 個區間包含真正的比例→正確

故選(C)

22. $\cos A=\dfrac{5^2+3^2-(\sqrt{19})^2}{2\cdot 5\cdot 3}=\dfrac{25+9-19}{30}=\dfrac{15}{30}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \angle A=60°=\dfrac{\pi}{3}$，又扇形 ADC 的半徑為 3

斜線面積 $=\Delta ABC$面積 $-$扇形 ADC 面積

$=\dfrac{1}{2}\times 5\times 3\times \sin 60°-\dfrac{1}{2}\times 3^2\times\dfrac{\pi}{3}$

$=\dfrac{15}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{2}\pi=\dfrac{15}{4}\sqrt{3}-\dfrac{3}{2}\pi$，故選(B)

23. 設三個球中數字最大為 x，則 x 的可能值為 3、4、5、6，所求之期望值

$$Ex=3\times\frac{\overset{(1\sim2\text{號任取}2\text{個})}{C_2^2}}{C_3^6}+4\times\frac{\overset{(1\sim3\text{號任取}2\text{個})}{C_2^3}}{C_3^6}$$

$$+5\times\frac{\overset{(1\sim4\text{號任取}2\text{個})}{C_2^4}}{C_3^6}+6\times\frac{\overset{(1\sim5\text{號任取}2\text{個})}{C_2^5}}{C_3^6}$$

$$=\frac{3\times C_2^2+4\times C_2^3+5\times C_2^4+6\times C_2^5}{C_3^6}$$

$$=\frac{3\times1+4\times3+5\times\frac{4\times3}{2}+6\times\frac{5\times4}{2}}{\frac{\cancel{6}\times5\times4}{\cancel{3\times2\times1}}}$$

$$=\frac{3+12+30+60}{20}=\frac{105}{20}=\frac{21}{4}$$，故選(D)

24. $\vec{a}$和$\vec{b}$的內積為 10，即$\vec{a}\cdot\vec{b}=10$

又$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\sqrt{7^2+2^2})^2\Rightarrow|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=53$

$\Rightarrow 9-2\times10+|\vec{b}|^2=53\Rightarrow|\vec{b}|^2=64\Rightarrow|\vec{b}|=8$

故選(A)

25. $\vec{a}\cdot\vec{b}=4\times(3\sin x+2)+5\times\cos x$

$\Rightarrow\ \vec{a}\cdot\vec{b}=12\sin x+5\cos x+8$

由正餘弦的疊合知

$-\sqrt{12^2+5^2}\le 12\sin x+5\cos x\le\sqrt{12^2+5^2}$

$\Rightarrow -13\le 12\sin x+5\cos x\le 13$ (同加 8)

$\Rightarrow -13+8\le 12\sin x+5\cos x+8\le 13+8$

$\Rightarrow -5\le\ \vec{a}\cdot\vec{b}\le 21$，故選(C)