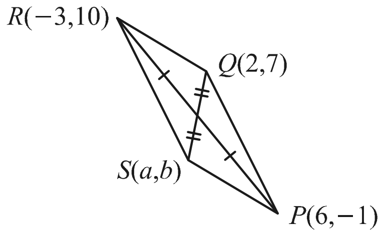
108 學年度四技二專第二次聯合模擬考試
共同科目　數學(C)卷　詳解

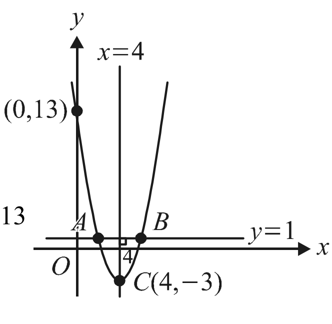
數學(C)卷 108-2-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	D	C	A	C	A	D	B	C	B	B	D	A	A	C	C	B	A	D	C	C	A	B	D	D

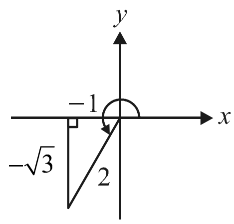
1. 由點斜式可知此直線爲
$y-1=-\frac{1}{3}(x+4)\Rightarrow x+3y+1=0$，故 $a+b=1+3=4$
故選(B)
2. 設 ΔABC 的重心坐標爲 G 點，由重心性質可知
$\overline{AG}:\overline{GD}=2:1$，再由分點公式可得
$G(\frac{2\times(-8)+1\times1}{2+1},\frac{2\times5+1\times2}{2+1})=(-5,4)$，故選(D)
3. 如下圖



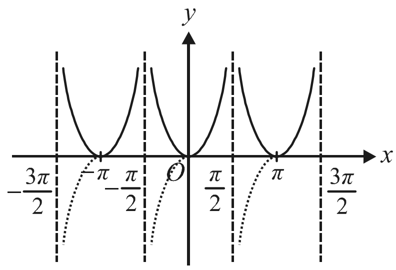
設 $S(a,b)$，由平行四邊形對角線相互平分可知
$(\frac{6+(-3)}{2},\frac{(-1)+10}{2})=(\frac{a+2}{2},\frac{b+7}{2})$
$\Rightarrow a=1$，$b=2$　$\therefore S(1,2)$
故 $\overline{QS}=\sqrt{(2-1)^2+(7-2)^2}=\sqrt{26}$，故選(C)
4. 將 $y=ax^2+4x$ 向左平移 2 單位得
$y=a(x+2)^2+4(x+2)$
再向上平移 1 單位得 $y=a(x+2)^2+4(x+2)+1$
以 $(1,-5)$ 代入上式可得 $-5=9a+13\Rightarrow a=-2$
故選(A)
5. 如下圖，ΔABC 中，以 $\overline{AB}$ 爲底，則高爲 $1-(-3)=4$
其面積爲 $\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times4=8\Rightarrow\overline{AB}=4$
又 A 、 B 兩點對稱於 $x=4$，可知 $A(2,1)$， $B(6,1)$
$\because$ 頂點 $C(4,-3)$
設 Γ：$y=a(x-4)^2-3$
以 $A(2,1)$ 代入得
$1=4a-3\Rightarrow a=1$
即 Γ：$y=(x-4)^2-3$
令 $x=0$ 代入 Γ 可得 $y=13$
即 Γ 與 y 軸交於 $(0,13)$
故選(C)



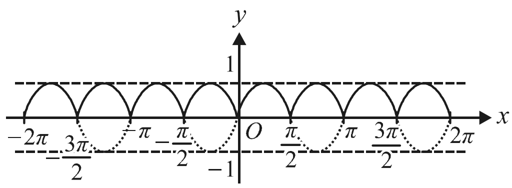
6. $\because 1170°\le\theta\le1350°$
$\Rightarrow 3\times360°+90°\le\theta\le3\times360°+270°$
$\therefore\theta\in$ II 或 III，又 $\tan\theta=\sqrt{3}>0$ 可知 $\theta\in$ III
作 θ 的最小正同界角如下圖



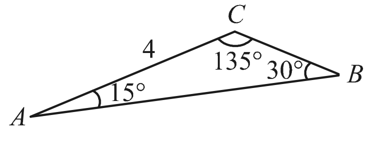
可得 $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 且 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$，故選(A)
7. 各選項之週期爲：
(A) $T_f=2\pi$
(B) $T_g=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$
(C) 作圖如下，可知 $T_h=\pi$



(D) 作圖如下，可知 $T_k=\frac{\pi}{2}$



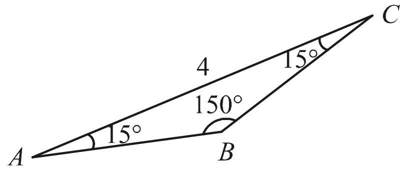
故週期最小爲(D)
8. $\tan\angle DAE=\tan(\angle DAC-\angle EAC)$
$=\frac{\tan\angle DAC-\tan\angle EAC}{1+\tan\angle DAC\times\tan\angle EAC}=\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}}=\frac{2}{11}$，故選(B)
9. 由正弦定理可知
$\because\frac{\overline{AC}}{\sin B}=2R\Rightarrow\frac{4}{\sin B}=8\Rightarrow\sin B=\frac{1}{2}$
$\therefore\angle B=30°$ 或 $150°$
(1) 當 $\angle B=30°$



$\angle C=180^\circ-15^\circ-30^\circ=135^\circ$　　$\therefore \dfrac{\overline{AB}}{\sin 135^\circ}=2R$

$\Rightarrow \overline{AB}=2R\sin 135^\circ=2\times 4\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}$

(2) 當 $\angle B=150^\circ$



$\angle C=180^\circ-15^\circ-150^\circ=15^\circ$

$\therefore \dfrac{\overline{AB}}{\sin 15^\circ}=2R\Rightarrow \overline{AB}=2R\sin 15^\circ=2\times 4\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$=2\sqrt{6}-2\sqrt{2}$

由(1)(2)可知所求為

$4\sqrt{2}+(2\sqrt{6}-2\sqrt{2})=2\sqrt{6}+2\sqrt{2}$，故選(C)

10. $\because (\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x$ ……①

令 $\sin x+\cos x=t$ 代入①

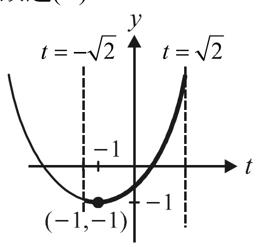
得 $t^2=1+2\sin x\cos x\Rightarrow \sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$

$\therefore f(x)$ 可化為 $t+\dfrac{t^2-1}{2}=\dfrac{1}{2}t^2+t-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}(t+1)^2-1$

又 $-\sqrt{2}\le \sin x+\cos x\le\sqrt{2}\Rightarrow -\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$

則當 $t=\sqrt{2}$ 時，$f(x)$ 有最大值 $\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}+1)^2-1=\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}$

故選(B)



11. $\because \vec{a}\,/\!/\,\vec{b}\Rightarrow \dfrac{k}{2}=\dfrac{1}{k+1}\Rightarrow k^2+k-2=0$

$\Rightarrow (k+2)(k-1)=0\Rightarrow k=-2$ 或 1……①

又 $\vec{a}\perp\vec{c}\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{c}=0$

$\Rightarrow k(k+5)+1\times 6=0\Rightarrow k^2+5k+6=0$

$\Rightarrow (k+2)(k+3)=0\Rightarrow k=-2$ 或 -3 ……②

由①②可知 $k=-2$，故選(B)

12. 分別計算各選項之向量在 $\vec{a}$ 上之正射影可得

(A) $\dfrac{8\times 1+10\times 1}{\sqrt{2}^2}(1\,,1)=(9\,,9)$

(B) $\dfrac{10\times 1+8\times 1}{\sqrt{2}^2}(1\,,1)=(9\,,9)$

(C) $\dfrac{24\times 1+25\times 1}{\sqrt{2}^2}(1\,,1)=(\dfrac{49}{2}\,,\dfrac{49}{2})$

(D) $\dfrac{6\times 1+8\times 1}{\sqrt{2}^2}(1\,,1)=(7\,,7)$

故選(D)

13. $\because |\vec{a}+2\vec{b}|^2=9\Rightarrow |\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=9$

$\Rightarrow 4+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4=9\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{\frac{1}{4}}{2\times 1}=\dfrac{1}{8}$，故選(A)

14. $\because f(99)$ 即 $f(x)$ 除以 $x-99$ 之餘式，由綜合除法

$$\begin{array}{rrrrr|l} -2 & +200 & -199 & +100 & -199 & 99 \\ & -198 & +198 & -99 & +99 & \\ \hline -2 & +2 & -1 & +1 & \vert -100 & \end{array}$$

可得 $f(99)=-100$

又 $g(x)$ 除以 $x+1$ 之餘式 $r(x)$ 為常數多項式

$g(-1)=-3-97+1=-99$　　$\therefore r(99)=-99$

則 $f(99)+r(99)=-100-99=-199$，故選(A)

15. $\because f(1)=f(2)=1$，可設 $f(x)=a(x-1)(x-2)+1$

又 $f(3)=5\Rightarrow a(3-1)(3-2)+1=5\Rightarrow a=2$

$\therefore f(x)=2(x-1)(x-2)+1$

故 $f(4)=2\times 3\times 2+1=13$，故選(C)

16. $\because x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ 原式同乘 $(x+1)(x^2-x+1)$

可得 $3x^2=(x^2-x+1)+(x+1)(Ax+B)$

$\Rightarrow 3x^2=(A+1)x^2+(A+B-1)x+(B+1)$

比較係數得 $\begin{cases} A+1=3 \\ A+B-1=0 \\ B+1=0 \end{cases}$

$\Rightarrow A=2$，$B=-1$，故 $A-B=2-(-1)=3$，故選(C)

17. 原式 $=\begin{vmatrix} 1 & 80-78 & 3 \\ -6 & -8+3 & -4 \\ 7 & 77-69 & 9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -6 & -5 & -4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ (6) (−7)

$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 14 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{降階}]{\text{對第一行}} \begin{vmatrix} 7 & 14 \\ -6 & -12 \end{vmatrix}=0$

成比例

故選(B)

18. $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x+3 & 1 & 2 \\ x+3 & x & 1 \\ x+3 & 2 & x \end{vmatrix}$

(1) (1)

$=(x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ (−1) (−1)

$=(x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & x-1 & -1 \\ 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix}$

$\xlongequal[\text{降階}]{\text{對第一行}} (x+3)\begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix}$

$=(x+3)[(x-1)(x-2)+1]=(x+3)(x^2-3x+3)=0$

$\therefore x+3=0$ 或 $x^2-3x+3=0$ 得一實根 $x=-3$，並由根與係數關係得 $x^2-3x+3=0$ 之兩共軛虛根之和爲 3
得所求即此三根之和 $-3+3=0$，故選(A)
[另解]

$$\because \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = x^3-6x+9$$

由三次多項方程式的根與係數關係可知，方程式 $x^3-6x+9=0$ 之三根和爲 0，故選(A)

19. 設另一根爲 α，由根與係數關係知

$$\begin{cases} \alpha+(1-i)=-k \cdots\cdots ① \\ \alpha(1-i)=3-i \cdots\cdots ② \end{cases}$$

由② $\Rightarrow \alpha=\dfrac{3-i}{1-i}=2+i$ 代入①

得 $(2+i)+(1-i)=-k \Rightarrow k=-3$，故選(D)

20. 設實根 α 代入方程式得 $\alpha^2+(i-1)\alpha+2i-k=0$

$\Rightarrow (\alpha^2-\alpha-k)+(\alpha+2)i=0$

$\because \alpha^2-\alpha-k$ 與 $\alpha+2$ 皆爲實數

$$\therefore \begin{cases} \alpha^2-\alpha-k=0 \cdots\cdots ① \\ \alpha+2=0 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

由② $\Rightarrow \alpha=-2$ 代入① $\Rightarrow 4+2-k=0 \Rightarrow k=6$
故選(C)

21. [法一]

$z_1-z_2=(3\cos 35°-5\cos 155°)+i(3\sin 35°-5\sin 155°)$

$\therefore |z_1-z_2|$

$=\sqrt{(3\cos 35°-5\cos 155°)^2+(3\sin 35°-5\sin 155°)^2}$

$=\sqrt{9\cos^2 35°-30\cos 35°\cos 155°+25\cos^2 155°+9\sin^2 35°-30\sin 35°\sin 155°+25\sin^2 155°}$

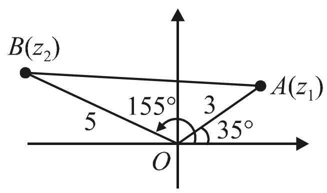
$=\sqrt{9(\cos^2 35°+\sin^2 35°)+25(\cos^2 155°+\sin^2 155°)-30(\cos 35°\cos 155°+\sin 35°\sin 155°)}$

$=\sqrt{9+25-30\cos(35°-155°)}=\sqrt{34-30\cos(-120°)}$

$=\sqrt{34-30(-\dfrac{1}{2})}=\sqrt{34+15}=\sqrt{49}=7$，故選(C)

[法二]

z_1 與 z_2 在複數平面上如圖上 A 、 B 兩點所示



所求 $|z_1-z_2|$ 即複數平面上 $\overline{AB}$ 長
由餘弦定理可知

$\overline{AB}^2=5^2+3^2-2\times5\times3\cos(155°-35°)$

$=34-30(-\dfrac{1}{2})=49 \quad \therefore \overline{AB}=\sqrt{49}=7$，故選(C)

22. 由 $-\dfrac{1}{2}<x<1 \Rightarrow (x+\dfrac{1}{2})(x-1)<0$

$\Rightarrow x^2-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}<0 \Rightarrow 2x^2-x-1<0 \Rightarrow -2x^2+x+1>0$

與 $ax^2+bx+1>0$ 比較係數
得 $a=-2$，$b=1$，故 $a+b=-1$，故選(A)

23. 作圖如下，令目標函數 $f(x,y)=2x+y$
將各頂點代入 $f(x,y)$，分別得到

$f(-2,5)=-4+5=1$

$f(1,5)=2+5=7$

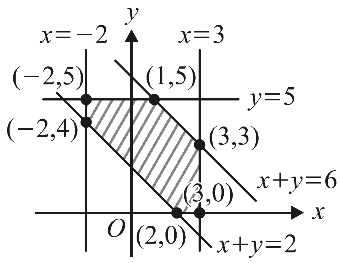
$f(3,3)=6+3=9$ (最大值)

$f(3,0)=6+0=6$

$f(2,0)=4+0=4$

$f(-2,4)=-4+4=0$ (最小值)

得所求爲 $9+0=9$，故選(B)



24. 由算幾不等式可知

$$\frac{2a+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}}{3} \geq \sqrt[3]{2a(\frac{b}{2})(\frac{b}{2})} \Rightarrow \frac{12}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{2}ab^2}$$

$\Rightarrow 64 \geq \dfrac{1}{2}ab^2 \Rightarrow 256 \geq 2ab^2$

得 $2ab^2$ 的最大值爲 256，故選(D)

25. 由柯西不等式可知

$$(\sqrt{a}^2+\sqrt{2b}^2+\sqrt{3c}^2)((\frac{1}{\sqrt{a}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2b}})^2+(\frac{1}{\sqrt{3c}})^2)$$

$$\geq (\sqrt{a}\times\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{2b}\times\frac{1}{\sqrt{2b}}+\sqrt{3c}\times\frac{1}{\sqrt{3c}})^2$$

$$\Rightarrow 3\times(\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{3c}) \geq (1+1+1)^2 \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{3c} \geq \frac{9}{3}=3$$

得最小值爲 3，故選(D)