108 學年度四技二專第一次聯合模擬考試
共同科目　數學(C)卷　詳解

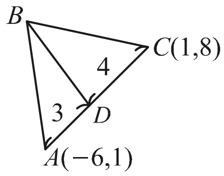
數學(C)卷 108-1-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	D	D	C	A	A	B	A	A	B	C	D	B	C	B	C	B	D	A	B	D	A	D	C	C

1. $y = mx + 3m - 7 \Rightarrow$ 直線 L_1 的斜率 $m_1 = m$
$7y - 21x + 18 = 0 \Rightarrow 7y = 21x - 18 \Rightarrow y = 3x - \frac{18}{7}$
$\Rightarrow$ 直線 L_2 的斜率 $m_2 = 3$
$\because$ 互相垂直
$\therefore m_1 \times m_2 = -1 \Rightarrow m \times 3 = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$，故選(B)

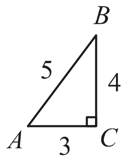
2. 直線通過 $(-1, 3)$ 代入
$\Rightarrow 3 \times (-1) - 2 \times 3 + k = 0 \Rightarrow k = 9$
求 y 截距 $\Rightarrow$ 令 $x = 0 \Rightarrow -2y + 9 = 0 \Rightarrow y = \frac{9}{2}$
$\therefore y$ 截距為 $\frac{9}{2}$，故選(D)

3. $\because \Delta BAD$ 的面積 $= \frac{3}{4} \Delta BCD$ 的面積
$\Rightarrow \frac{\Delta BAD\text{面積}}{\Delta BCD\text{面積}} = \frac{3}{4}$
且兩三角形等高
$\therefore \overline{AD} : \overline{DC} = 3 : 4$，如右圖



利用分點公式可得
$D(\frac{3 \times 1 + 4 \times (-6)}{3+4}, \frac{3 \times 8 + 4 \times 1}{3+4}) = (-3, 4)$
$\therefore 2m + 3n = 2 \times (-3) + 3 \times 4 = 6$，故選(D)

4. 由右圖知



$\cot A + \sec B = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = 2$
故選(C)

5. $\because -2019° = -360° \times 6 + 141°$
$\therefore \csc(-2019°) = \csc 141° > 0$
$\because 2020° = 360° \times 5 + 220°$
$\therefore \cot 2020° = \cot 220° > 0$
即 $(\csc(-2019°), \cot 2020°)$ 在第一象限，故選(A)

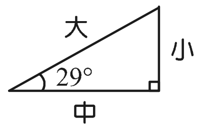
6. $2\vec{a} + \vec{b} = (4, 2) + (1, m) = (5, m+2)$
$\vec{a} - 3\vec{b} = (2, 1) - (3, 3m) = (-1, 1-3m)$
$\because (2\vec{a} + \vec{b})$ 平行 $(\vec{a} - 3\vec{b})$
$\therefore \frac{5}{-1} = \frac{m+2}{1-3m} \Rightarrow 5 - 15m = -m - 2 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$，故選(A)

7. $\overrightarrow{BC} = (-3, -6)$，$\overrightarrow{BA} = (-5, -5)$
$|\overrightarrow{BD}| = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}|}{|\overrightarrow{BA}|} = \frac{|(-3) \times (-5) + (-6) \times (-5)|}{\sqrt{(-5)^2 + (-5)^2}}$
$= \frac{45}{5\sqrt{2}} = \frac{9}{\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$，故選(B)

8. $L_1 : 3x - 2y + k = 0 \Rightarrow 6x - 4y + 2k = 0$
L_1 與 L_2 的距離 $d = \frac{|2k+7|}{\sqrt{6^2 + (-4)^2}} = 3$
$\Rightarrow |2k + 7| = 6\sqrt{13} \Rightarrow 2k + 7 = \pm 6\sqrt{13}$
$\Rightarrow k = -\frac{7}{2} \pm 3\sqrt{13}$
$\therefore$ 所有 k 之和為 $(-\frac{7}{2} + 3\sqrt{13}) + (-\frac{7}{2} - 3\sqrt{13}) = -7$
故選(A)

9. L_1、L_2 交點為 $(2, 4)$
L_2、L_3 交點為 $(4, 3)$
L_1、L_3 交點為 $(5, 7)$
$\therefore$ 三角形重心為 $(\frac{2+5+4}{3}, \frac{4+7+3}{3}) = (\frac{11}{3}, \frac{14}{3})$
故選(A)

10. $a = \sin 749° = \sin(360° \times 2 + 29°) = \sin 29°$
$b = \sec(-691°) = \sec(-360° \times 2 + 29°) = \sec 29°$
$c = \tan 1469° = \tan(360° \times 4 + 29°) = \tan 29°$
如下圖



$\sin 29° = \frac{\text{小}}{\text{大}}$，$\sec 29° = \frac{\text{大}}{\text{中}}$，$\tan 29° = \frac{\text{小}}{\text{中}}$
$\therefore \sec 29° > \tan 29° > \sin 29°$
即 $b > c > a$，故選(B)

11. (A) $\because (-7, 5)$、$(2, 5)$、$(10, 5)$ 三點在水平線 $y = 5$ 上，二次函數的圖形為拋物線，故此選項不對
(B) $\because$ 兩個二次函數 $y = 3x^2$ 與 $y = 2x^2 - 8x + 8$ 的開口大小不同，故不可能經過平移後完全重疊
(C) 將 $y = 0$ 代入 $y = 5(x+3)(x-7)$
得 $0 = 5(x+3)(x-7) \Rightarrow x = -3$ 或 7
故與 x 軸交於 $(-3, 0)$ 與 $(7, 0)$ 兩點
(D) 判別式 $D = 2^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 8 > 0$，所以圖形與 x 軸交於相異兩點，故選(C)

12. 圓心角為圓周角的 2 倍
$\therefore \angle COB = 2\angle CAB = 2 \times 30° = 60° \Rightarrow \angle COB = \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ 半徑 $\overline{OB}=r=\dfrac{S}{\theta}=\dfrac{20}{\frac{\pi}{3}}=\dfrac{60}{\pi}$，故選(D)

13. $(4\cos\theta+7)(3\csc\theta-1)(5\sin\theta+4)=0$

$\Rightarrow \cos\theta=-\dfrac{7}{4}$ (不合)或 $\csc\theta=\dfrac{1}{3}$ (不合)

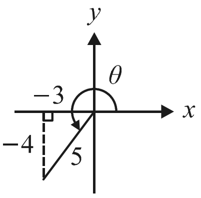
或 $\sin\theta=-\dfrac{4}{5}$

($\because -1\le\cos\theta\le1$

$\csc\theta\le-1$ or $\csc\theta\ge1$)

又 $\cot\theta>0$，故 θ 在第三象限

如右圖



$\therefore \dfrac{\sec\theta+1}{\tan\theta-1}=\dfrac{-\frac{5}{3}+1}{\frac{4}{3}-1}=-2$，故選(B)

14. 4 月份水量 $f(x)$ 與天數 x 的函數關係爲

$f(x)=(260-320)x+18000=-60x+18000$

$f(30)=-60\times30+18000=16200$

5 月份水量 $g(x)$ 與天數 x 的函數關係爲

$g(x)=(240-320)x+16200=-80x+16200$

$\therefore -80x+16200\le15000 \Rightarrow 80x\ge1200\Rightarrow x\ge15$

$\therefore 30+15=45$ 天，故選(C)

15. $2\vec{a}-\vec{b}=(2\sin\theta+\sqrt{3}\,,2\cos\theta-1)$

$\therefore |2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(2\sin\theta+\sqrt{3})^2+(2\cos\theta-1)^2}$

$=\sqrt{4\sqrt{3}\sin\theta-4\cos\theta+8}=\sqrt{8(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta)+8}$

$=\sqrt{8(\sin\theta\cos30^\circ-\cos\theta\sin30^\circ)+8}$

$=\sqrt{8\sin(\theta-30^\circ)+8}$

$\because -1\le\sin(\theta-30^\circ)\le1$

$\therefore$ 當 $\sin(\theta-30^\circ)=1$ 時，$M=\sqrt{8+8}=4$

當 $\sin(\theta-30^\circ)=-1$ 時，$m=\sqrt{-8+8}=0$

$\therefore M+m=4+0=4$，故選(B)

16. $\because$ 正六邊形每一個內角爲 $\dfrac{(6-2)\times180^\circ}{6}=120^\circ$

又 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AF}$

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{AF}|\times\cos120^\circ$

$=10\times10\times(-\dfrac{1}{2})=-50$，故選(C)

17. $\because$ 三點共線　$\therefore m_{\overline{AB}}=m_{\overline{AC}}$

$\Rightarrow \dfrac{y-7}{x-2}=\dfrac{1-7}{6-2}\Rightarrow 3x+2y=20$

則

x	1	2	3	4	5	6
y	$\frac{17}{2}$	7	$\frac{11}{2}$	4	$\frac{5}{2}$	1

又 $x\,,y$ 爲自然數且 A 、 B 、 C 爲相異三點

故 $x=4$， $y=4$　$\therefore 5x-2y=12$，故選(B)

18. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\times|\vec{b}|\times\cos60^\circ=1\times1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=1-4\times\dfrac{1}{2}+4=3$

$\Rightarrow |\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{3}$

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1+2\times\dfrac{1}{2}+1=3$

$\Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3}$

$(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2=1-\dfrac{1}{2}-2=-\dfrac{3}{2}$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})}{|\vec{a}-2\vec{b}|\cdot|\vec{a}+\vec{b}|}=\dfrac{-\frac{3}{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \theta=120^\circ$，故選(D)

19. 設每個車位租金增加 x 個 100 元，則有 $60-x$ 個停車位租出去，可得阿土伯的收入爲

$f(x)=(2000+100x)(60-x)-200(60-x)$

$=(1800+100x)(60-x)=100(18+x)(60-x)$

$=100(-x^2+42x+1080)=100[-(x-21)^2+1521]$

$\therefore$ 當 $x=21$ 時，會有最大收入 152100。此時每個停車位的租金爲 $2000+100\times21=4100$ 元，故選(A)

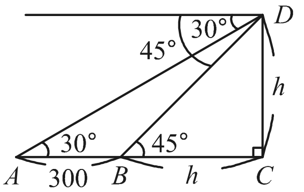
20. $\because \cot\alpha+\cot\beta=3\Rightarrow\dfrac{1}{\tan\alpha}+\dfrac{1}{\tan\beta}=3$

$\Rightarrow \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha\cdot\tan\beta}=3\Rightarrow \tan\alpha+\tan\beta=3\tan\alpha\cdot\tan\beta$

$\Rightarrow 6=3\tan\alpha\cdot\tan\beta\Rightarrow\tan\alpha\cdot\tan\beta=2$

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\dfrac{6}{1-2}=-6$，故選(B)

21. 依題意畫圖，D 爲志明所在大樓樓頂，A 爲春嬌初位置，B 爲春嬌末位置，如下圖



設志明所在高度 $\overline{CD}$ 爲 $h\Rightarrow\overline{BC}=h$ ($\because \Delta BCD$ 爲 $45^\circ-45^\circ-90^\circ$)

ΔACD 中，$\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}}=\tan30^\circ\Rightarrow\dfrac{h}{300+h}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \sqrt{3}h=300+h\Rightarrow h=\dfrac{300}{\sqrt{3}-1}=150(\sqrt{3}+1)$

故選(D)

22. $\Delta ABC=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2\times|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{3^2\times2^2-(3\sqrt{3})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{9\times4-27}=\dfrac{3}{2}$，故選(A)

23. 由圖知，$a=2$，週期爲 $\dfrac{9}{4}\pi-(-\dfrac{3}{4}\pi)=3\pi$

$\Rightarrow \dfrac{2\pi}{|b|}=3\pi\Rightarrow b=\dfrac{2}{3}$，故 $2a+3b=2\times2+3\times\dfrac{2}{3}=6$

故選(D)

24. ΔABC 面積 $=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin 60^\circ$

$\Rightarrow 2\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}\times 2\times\overline{BC}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\overline{BC}=4$

由餘弦定理可得

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cos B}$

$=\sqrt{2^2+4^2-2\times 2\times 4\times\cos 60^\circ}=2\sqrt{3}$

由正弦定理

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=\dfrac{\overline{CA}}{\sin B}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}=2R$

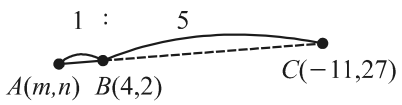
可得 $\overline{BC}=2R\sin A$，$\overline{CA}=2R\sin B$，$\overline{AB}=2R\sin C$

$\therefore\dfrac{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}}{\sin A+\sin B+\sin C}=\dfrac{2R\sin C+2R\sin A+2R\sin B}{\sin A+\sin B+\sin C}$

$=\dfrac{2R(\sin A+\sin B+\sin C)}{\sin A+\sin B+\sin C}=2R$

又 $2R=\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4$，故選(C)

25. 設天璇爲 $A(m,n)$，天樞爲 $B(4,2)$，北極星爲 $C(-11,27)$，依題意作圖如下



$\overrightarrow{AB}=(4-m,2-n)$，$\overrightarrow{BC}=(-15,25)$

$\overrightarrow{BC}=5\overrightarrow{AB}\Rightarrow(-15,25)=5(4-m,2-n)$

$\Rightarrow(-3,5)=(4-m,2-n)\Rightarrow m=7$，$n=-3$

$\therefore 2m+n=14-3=11$，故選(C)