107 學年度四技二專第四次聯合模擬考試
共同科目　數學(C)卷　詳解

數學(C)卷 107-4-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
D	D	C	C	B	D	A	B	C	B	D	A	C	C	C	A	A	A	B	B	B	D	D	B	A

1. $\begin{vmatrix} a & b \\ 2c+3m & 2d+3n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ 3m & 3n \end{vmatrix}$

$= 2\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix} = 2\times 2 + 3\times 3 = 13$

2. 所求＝全部分法－甲得 0 件的分法 $= 4^5 - 3^5 = 781$

3. $4^x - 6\times 2^{x+1} + 32 < 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 12\times 2^x + 32 < 0$

$\Rightarrow (2^x - 4)(2^x - 8) < 0 \Rightarrow 4 < 2^x < 8 \Rightarrow 2 < x < 3$

4. (A) L_1：$y-(-2) = \dfrac{-4-(-2)}{9-6}(x-6) \Rightarrow 2x+3y=6$

(B) L_2：$y-4 = -\dfrac{2}{3}\cdot[x-(-3)] \Rightarrow 2x+3y=6$

(C) x 截距爲 2，故直線過點 $(2,0)$

L_3：$y-0 = -\dfrac{2}{3}(x-2) \Rightarrow 2x+3y=4$

(D) x 截距爲 3，y 截距爲 2

L_4：$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=1 \Rightarrow 2x+3y=6$

故選(C)

5. $\sin^2 10° + \sin^2 20° + \cdots + \sin^2 80° + \sin^2 90° + \sin^2 100°$

$+ \cdots + \sin^2 180°$

$= \sin^2 10° + \sin^2 20° + \cdots + \sin^2 80° + \sin^2 90° + \cos^2 10°$

$+ \cos^2 20° + \cdots + \cos^2 80° + \sin^2 180°$

$= (\sin^2 10° + \cos^2 10°) + \cdots + (\sin^2 80° + \cos^2 80°)$

$+ \sin^2 90° + \sin^2 180° = 1\times 8 + 1^2 + 0^2 = 9$，故 $k=9$

6. $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y-2)^2}{16} = 1$，其正焦弦長爲 $\dfrac{2\times 9}{4} = \dfrac{9}{2}$

(A) 爲一橢圓方程式

(B) 其正焦弦長爲 $\dfrac{2\times 16}{3} = \dfrac{32}{3}$

(C) 其正焦弦長爲 $\dfrac{2\times 18}{4\sqrt{2}} = \dfrac{9}{2}\sqrt{2}$

(D) 其正焦弦長爲 $\dfrac{2\times 18}{8} = \dfrac{9}{2}$，故選(D)

7. $f(x) = (x^2+2x-1)^3 \Rightarrow f'(x) = 3(x^2+2x-1)^2\cdot(2x+2)$

則 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = f'(1) = 3\times 2^2\times 4 = 48$

8. 由題意得 $\begin{cases} 12 = a\times 10 \\ 70 = a\times 50 + b \end{cases} \Rightarrow a = 1.2$，$b=10$

即 $y = 1.2x + 10$，$x = 60$ 代入，得 $y = 82$

9. 設 $z = 1+bi$，$b\in R$

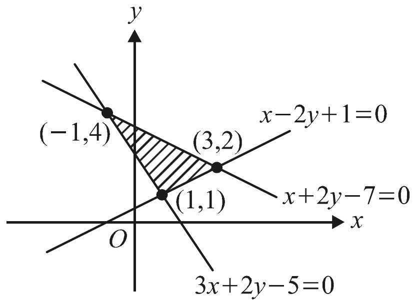
則 $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{1+bi} = \dfrac{1-bi}{1+b^2}$

得 $\dfrac{-b}{1+b^2} = -\dfrac{2}{5} \Rightarrow 5b = 2+2b^2 \Rightarrow 2b^2 - 5b + 2 = 0$

$\Rightarrow (2b-1)(b-2) = 0 \Rightarrow b = \dfrac{1}{2}$ 或 2

$\therefore z = 1+\dfrac{1}{2}i$ 或 $1+2i$

10. 由限制條件，可得



頂點	$(1,1)$	$(3,2)$	$(-1,4)$
$f(x,y)$	$k+3$	$2k+7$	$4k-1$

則 $\begin{cases} k+3 > 2k+7 \\ k+3 > 4k-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k < -4 \\ k < \dfrac{4}{3} \end{cases}$，$\therefore k < -4$

11. 抽中「幸運球」機率爲 $\dfrac{1}{13}$，與順序無關

$\therefore$ 所求機率爲 $\dfrac{1}{13}\times\dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{65}$

12. 將 $P(2,3)$ 代入圓 C 方程式

得 $2^2 + 3^2 - 2\times 2 + 4\times 3 + k = 0 \Rightarrow k = -21$

所求切線：$2x + 3y - 2\times\dfrac{x+2}{2} + 4\times\dfrac{y+3}{2} - 21 = 0$

$\Rightarrow x + 5y - 17 = 0$

13. $y = 2x^2 - 6x - 3 \Rightarrow y = 2(x-\dfrac{3}{2})^2 - \dfrac{15}{2}$，得 $V(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{15}{2})$

解 $2x^2 - 6x - 3 = 0$，得 $x = \dfrac{6\pm\sqrt{60}}{2\times 2} = \dfrac{3\pm\sqrt{15}}{2}$

令 $A(\dfrac{3+\sqrt{15}}{2}, 0)$、$B(\dfrac{3-\sqrt{15}}{2}, 0)$，得 $\overline{AB} = \sqrt{15}$

$\therefore \Delta ABP$ 面積 $= \dfrac{1}{2}\times\sqrt{15}\times\left|-\dfrac{15}{2}\right| = \dfrac{15}{4}\sqrt{15}$

14. $f(7)$ 等於 $f(x)$ 除以 $x-7$ 的餘式

由綜合除法

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} 1 & -5 & -13 & -8 & +5 & +12 & -1 & 7 \\ & +7 & +14 & +7 & -7 & -14 & -14 & \\ \hline 1 & +2 & +1 & -1 & -2 & -2 & \big| -15 & \end{array}$$

$\therefore f(7)=-15$

15. 觀察 1 ~~2~~ 3 ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ 7 ~~8~~ 9 ~~10~~
11 ~~12~~ 13 ~~14~~ ~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~
21 ~~22~~ 23 ~~24~~ ~~25~~ ~~26~~ 27 ~~28~~ 29 ~~30~~
可知每 10 個數會保留 4 個數
則在新數列中，99 爲第 40 項，∴第 39 項爲 97

16. $\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
$(\vec{a}+t\vec{b})\perp(4\vec{a}-\vec{b})\Rightarrow(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(4\vec{a}-\vec{b})=0$
$\Rightarrow 4|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+4t\vec{b}\cdot\vec{a}-t|\vec{b}|^2=0$
$\Rightarrow 4\times3^2-0+0-t\times2^2=0\Rightarrow t=9$

17. $2\cos^2\theta-5\sin\theta+1=0\Rightarrow 2(1-\sin^2\theta)-5\sin\theta+1=0$
$\Rightarrow 2\sin^2\theta+5\sin\theta-3=0$
$\Rightarrow(2\sin\theta-1)(\sin\theta+3)=0\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ 或 -3 (不合)
$\therefore\theta=30^\circ$ 或 150°

18. $x^3+ax^2+bx+3=0$ 可能的有理根爲 ±1 、 ±3
又三根積爲 -3
故 $x^3+ax^2+bx+3=(x+1)(x-1)(x-3)$
$=x^3-3x^2-x+3$
$\therefore 2a+b=2\times(-3)+(-1)=-7$

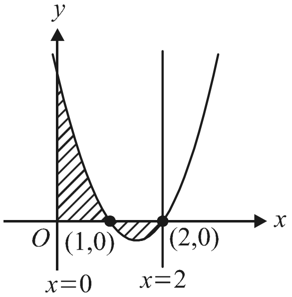
19. $f'(x)=6x^2-30x+24=6(x-1)(x-4)$

x	-1		1		4		5
$f(x)$	-38	↗	14	↘	-13	↗	-2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

得 $a=14$ ， $b=-38$ ，$\therefore a+b=-24$

20. 以甲、乙、丙表示命中的事件，以甲'、乙'、丙'表示不命中事件
P(恰中一發)
$=P(甲\cap乙'\cap丙')+P(甲'\cap乙\cap丙')+P(甲'\cap乙'\cap丙)$
$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{11}{24}$
P(乙命中 | 恰中一發)
$=\dfrac{P(恰中一發\cap乙命中)}{P(恰中一發)}=\dfrac{\frac{3}{24}}{\frac{11}{24}}=\dfrac{3}{11}$

21.



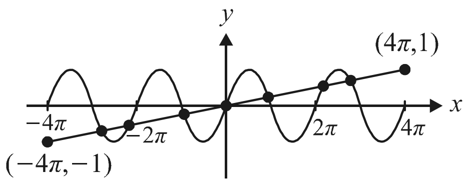
解 $x^2-3x+2=0\Rightarrow(x-1)(x-2)=0\Rightarrow x=1$ 或 2

所求面積爲 $\int_0^1(x^2-3x+2)dx+\int_1^2(-x^2+3x-2)dx$
$=(\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+2x)\Big|_0^1+(-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{3}{2}x^2-2x)\Big|_1^2$
$=[(\dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{2}+2)-0]+[(-\dfrac{8}{3}+6-4)-(-\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{2}-2)]=1$

22. 解 $\begin{cases}x=2\\ y=\log_3 x\end{cases}$ ，得 $A(2,\log_3 2)$
解 $\begin{cases}x=6\\ y=\log_3 x\end{cases}$ ，得 $B(6,\log_3 6)$
則直線 AB 的斜率爲 $\dfrac{\log_3 6-\log_3 2}{6-2}=\dfrac{\log_3 3}{4}=\dfrac{1}{4}$

23. $\int x(x+1)^4dx=\int[(x+1)-1](x+1)^4dx$
$=\int[(x+1)^5-(x+1)^4]dx=\dfrac{1}{6}(x+1)^6-\dfrac{1}{5}(x+1)^5+c$
[另解]利用代換積分
令 $u=x+1\Rightarrow du=dx$
∴原式 $\int(u-1)u^4du=\int(u^5-u^4)du=\dfrac{1}{6}u^6-\dfrac{1}{5}u^5+c$
$=\dfrac{1}{6}(x+1)^6-\dfrac{1}{5}(x+1)^5+c$

24. $y=\dfrac{1}{4\pi}x$ 通過 $(4\pi,1)$ 、 $(0,0)$ 、 $(-4\pi,-1)$ 三點
$y=\sin x$ 與 $y=\dfrac{1}{4\pi}x$ 圖形如下



共有 7 個交點

25. ΔAPR 面積 $=\dfrac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{AR}\times\sin A$
$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{7}\overline{AB}\times\dfrac{4}{7}\overline{AC}\times\sin A=\dfrac{4}{49}(\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A)$
$=\dfrac{4}{49}\Delta ABC$ 面積
同理： ΔBPQ 面積 $=\dfrac{12}{49}\Delta ABC$ 面積
ΔCRQ 面積 $=\dfrac{15}{49}\Delta ABC$ 面積
得 $\Delta PQR=(1-\dfrac{4}{49}-\dfrac{12}{49}-\dfrac{15}{49})\Delta ABC$ 面積
$=\dfrac{18}{49}\Delta ABC$ 面積
$\therefore\Delta PQR$ 面積： ΔABC 面積 $=18：49$