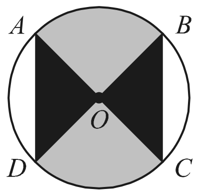
107 學年度四技二專第三次聯合模擬考試
共同科目　數學(C)卷　詳解

數學(C)卷 107-3-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	B	D	C	D	C	C	A	D	A	A	A	B	D	C	C	B	B	A	D	C	A	D	B	B

1. $\overleftrightarrow{OC}$ 的斜率爲 $\dfrac{-1-0}{2-0}=-\dfrac{1}{2}$，所以直線 L 的斜率爲 2，又 L 過點 $B\Rightarrow L$：$y-1=2(x-3)$
$\Rightarrow 2x-y=5$ 且 $\overleftrightarrow{OA}$ 方程式爲
$y-0=\dfrac{1}{3}(x-0)\Rightarrow 3x+y=0$
解 $\begin{cases}2x-y=5\\3x+y=0\end{cases}$ 得 $x=1$，$y=-3$
所以 $D(x\,,y)=(1\,,-3)\Rightarrow 4x+y=1$，答案爲(C)

2. 因爲正方形邊長爲 $4\Rightarrow$ 所以圓半徑爲正方形對角線長之半 $\Rightarrow$ 半徑 $=2\sqrt{2}$
所求區域面積即爲 2 個扇形面積 +2 個三角形面積



$=2[\dfrac{1}{2}\times(2\sqrt{2})^2\times\dfrac{\pi}{2}]+2[\dfrac{1}{2}\times(2\sqrt{2})^2]$
$=4\pi+8$，答案爲(B)

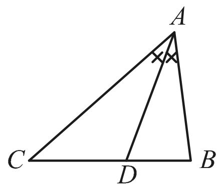
3. $\cos\theta-\sin\theta=-\dfrac{1}{5}\Rightarrow(\cos\theta-\sin\theta)^2=(-\dfrac{1}{5})^2$
$\Rightarrow 1-2\sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{1}{25}\Rightarrow\sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{12}{25}$
又 $\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$
$=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cdot\cos\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta\cdot\cos\theta}=\dfrac{25}{12}$，答案爲(D)

4. 函數 $F(x)=a\tan(bx+c)+d$ 的週期計算公式爲
$\dfrac{\text{原週期}}{|x\text{的係數}|}=\dfrac{\pi}{|b|}\Rightarrow$ 週期爲 $\dfrac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$，答案爲(C)

5. 原式 $\dfrac{1}{\sin10^\circ}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos10^\circ}=\dfrac{\cos10^\circ-\sqrt{3}\sin10^\circ}{\sin10^\circ\cdot\cos10^\circ}$
$=\dfrac{2(\frac{1}{2}\cos10^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin10^\circ)}{\frac{1}{2}(2\sin10^\circ\cdot\cos10^\circ)}$
$=\dfrac{2(\sin30^\circ\cos10^\circ-\cos30^\circ\sin10^\circ)}{\frac{1}{2}\cdot\sin20^\circ}$
$=\dfrac{2[\sin(30^\circ-10^\circ)]}{\frac{1}{2}\sin20^\circ}=4\cdot\dfrac{\sin20^\circ}{\sin20^\circ}=4$，答案爲(D)

6. $2x^2-3x+1=0\Rightarrow(2x-1)(x-1)=0$
可得 $2x^2-3x+1=0$ 之二根爲 $\dfrac{1}{2}$、1，又 $\sin A<\sin B$，
所以 $\sin A=\dfrac{1}{2}$，$\sin B=1$，利用正弦定理可知
$\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=2R\Rightarrow R=\dfrac{\overline{BC}}{2\sin A}=\dfrac{2}{2\times\frac{1}{2}}=2$
所以外接圓面積爲 $\pi\cdot R^2=4\pi$，答案爲(C)

7. 如下圖，$\overline{AD}$ 爲 $\angle A$ 之平分線 $\Rightarrow\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{CD}}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$
又 $\overline{BC}=5$，所以 $\overline{BD}=2$，$\overline{CD}=3$
在 ΔABC 中，$\cos B=\dfrac{5^2+4^2-6^2}{2\cdot5\cdot4}$
在 ΔABD 中，$\cos B=\dfrac{2^2+4^2-\overline{AD}^2}{2\cdot2\cdot4}$
所以 $\cos B=\dfrac{5^2+4^2-6^2}{2\cdot5\cdot4}=\dfrac{2^2+4^2-\overline{AD}^2}{2\cdot2\cdot4}$
$\Rightarrow\overline{AD}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$，答案爲(C)



8. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\Rightarrow|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|$
$\Rightarrow|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+|\overrightarrow{BC}|^2$
所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\dfrac{1}{2}(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2-|\overrightarrow{AC}|^2)$
$=-\dfrac{1}{2}(6^2+7^2-8^2)=-\dfrac{21}{2}$，答案爲(A)
[另解]
$\cos\angle ABC=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{BC}}=\dfrac{6^2+7^2-8^2}{2\times6\times7}=\dfrac{1}{4}$
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos(\pi-\angle ABC)$
$=6\times7\times(-\cos\angle ABC)=42\times(-\dfrac{1}{4})=-\dfrac{21}{2}$

9. 由餘式定理可知，$g(x)=f(f(x))$ 除以 $x-1$ 所得的餘式爲 $g(1)=f(f(1))=f(2)=4$，答案爲(D)

10. 直接使用綜合除法，被除式爲 $4x^3-2x^2+2x-3$，除式爲 $2x-1$

$$\begin{array}{r|l} 4-2+2-3 & \\ +2+0+1 & \frac{1}{2} \\ \hline 2\ \big|\ 4+0+2,-2 & \\ 2+0+1,-2 & \end{array}$$

所以$Q(x)=2x^2+1$ ，$R(x)=-2$

$Q(1)+R(3)=3+(-2)=1$，答案爲(A)

11. $f(x)\times g(x)$ 之展開式中的常數項爲 $f(0)\times g(0)$ 及所有項係數和爲 $f(1)\times g(1)$

又 $f(0)=0^2-0+k=k$ ，$f(1)=1^2-1+k=k$

$g(0)=0^3+k\cdot 0^2-2\cdot 0-1=-1$

$g(1)=1^3+k\cdot 1^2-2\cdot 1-1=k-2$

$\Rightarrow f(0)\cdot g(0)=f(1)\cdot g(1)\Rightarrow k\cdot(-1)=k\cdot(k-2)$

$\Rightarrow k(k-1)=0\Rightarrow k=0$ (不合)或 $k=1$ ，答案爲(A)

12. 設方程式兩根爲 α 、$\alpha+2$

則兩根和爲 $\alpha+(\alpha+2)=k$ ，兩根積爲 $\alpha\cdot(\alpha+2)=15$

$\alpha^2+2\alpha-15=0\Rightarrow(\alpha-3)(\alpha+5)=0$

$\Rightarrow \alpha=3$ 或 -5 (不合)

$\Rightarrow k=3+(3+2)=8$ ，$C_2^8=\dfrac{8!}{2!\cdot(8-2)!}=28$

答案爲(A)

13. 由克拉瑪公式可得 $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$ ，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$ ，$z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}$

(其中 $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=3$)

$\Delta_x=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}=3$，$\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-3$

$\Delta_z=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=9$

$\therefore \Delta_x-\Delta_y-\Delta_z=3-(-3)-9=-3$

[另解]

設所求 $\Delta_x-\Delta_y-\Delta_z=k$

則 $\dfrac{k}{\Delta}=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}-\dfrac{\Delta_y}{\Delta}-\dfrac{\Delta_z}{\Delta}=x-y-z=-1$

$\Rightarrow k=-\Delta=-\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-3$，答案爲(B)

14. 原式爲 $\dfrac{2z-1}{z}=2+i\Rightarrow 2z-1=2z+iz$

$\Rightarrow -1=iz\Rightarrow z=\dfrac{-1}{i}=i$

所以 $|2-z|=|2-i|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$ ，答案爲(D)

15. 一長方體的長爲 a ，寬爲 b ，高爲 c

$a>0$ ，$b>0$ ，$c>0$ 且 $a+b+c=12$

又長方體體積爲 $a\cdot b\cdot c\Rightarrow$ 由算幾不等式可得

$\dfrac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}\Rightarrow\dfrac{12}{3}\geq\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}\Rightarrow a\cdot b\cdot c\leq 64$

所以最大體積爲 64，答案爲(C)

16. $\sum\limits_{n=1}^{10}(2a_n-5b_n+3)=\sum\limits_{n=1}^{10}2a_n-\sum\limits_{n=1}^{10}5b_n+\sum\limits_{n=1}^{10}3$

$=2\sum\limits_{n=1}^{10}a_n-5\sum\limits_{n=1}^{10}b_n+30=2\times 10-5\times 8+30=10$

答案爲(C)

17. (A) $x>0$ 時，$2018^x>107^x$ ；$x<0$ 時，$2018^x<107^x$

所以 $y=2018^x$ 的圖形不會恆在 $y=107^x$ 的上方

(B) $y=\log_a x$ 與 $y=a^x$ 兩函數的圖形對稱於直線 $x-y=0$

(C) $\because y=\log_{\frac{1}{a}}x=\log_{a^{-1}}x=-\log_a x$

$\therefore y=\log_a x$ 與 $y=\log_{\frac{1}{a}}x$ 兩函數的圖形對稱於 x 軸

(D) 對數函數 $y=\log_a x$ 永遠在 y 軸的右邊，且 y 軸爲漸近線

答案爲(B)

18. 芮氏規模公式：$\log E(r)=5.24+1.44r$

此大地震震央所釋放出來的能量約 8×10^{15} 焦耳

$\Rightarrow \log(8\times 10^{15})=5.24+1.44r$

$\Rightarrow \log 8+\log 10^{15}=5.24+1.44r$

$\Rightarrow 3\log 2+15=5.24+1.44r$

$\Rightarrow 3\times 0.3010+15=5.24+1.44r$，$r\doteq 7.405$，答案爲(B)

19. $a=\log_{30}20=\dfrac{\log 20}{\log 30}=\dfrac{\log 10\times 2}{\log 10\times 3}=\dfrac{\log 10+\log 2}{\log 10+\log 3}$

$=\dfrac{1+0.3010}{1+0.4771}\doteq 0.881$

$b=\log_3 2=\dfrac{\log 2}{\log 3}=\dfrac{0.301}{0.4771}\doteq 0.631$

$c=\log_{0.3}0.2=\dfrac{\log 0.2}{\log 0.3}=\dfrac{\log 2\times 10^{-1}}{\log 3\times 10^{-1}}=\dfrac{\log 2+\log 10^{-1}}{\log 3+\log 10^{-1}}$

$=\dfrac{\log 2-\log 10}{\log 3-\log 10}=\dfrac{0.301-1}{0.4771-1}\doteq 1.337$

所以 $c>a>b$ ，答案爲(A)

20. 全部選法 = 含庚選法 + 不含庚選法

$=C_1^1\times C_1^6+C_1^4\times C_1^2=6+8=14$ ，答案爲(D)

21. 先算出組合數，再算排列數

組合數：全 − 不合(4 全男或 4 全女)

$=C_4^9-(C_4^5+C_4^4)=126-6=120$

排列數：四個人作直線排列 $=4!=24$

所以全部方法數爲 $120\times 24=2880$ ，答案爲(C)

22. 設 A 爲選出 3 數爲等差關係的事件，S 爲樣本空間，所以 $n(S)=C_3^{10}=120$

討論 A 事件情形：公差爲 1 $\Rightarrow(1,2,3),(2,3,4),\cdots(8,9,10)$，共 8 個

公差爲 2

$\Rightarrow(1,3,5),(2,4,6),(3,5,7),\cdots(6,8,10)$，共 6 個

公差爲 3
$\Rightarrow (1,4,7),(2,5,8),(3,6,9),(4,7,10)$，共 4 個
公差爲 4 $\Rightarrow (1,5,9),(2,6,10)$，共 2 個
所以

$$n(A)=8+6+4+2=20 \Rightarrow p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$$

答案爲(A)

23. 設 A 爲所選 3 天中任 2 天都不連續的事件，樣本空間 S 爲 7 天中任選 3 天的事件，所以 $n(S)=C_3^7=35$，$n(A)=C_3^5=10$ (從未訓練的 4 天之 5 個間隔中，任選 3 個排入訓練日)
$\Rightarrow p(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{10}{35}=\dfrac{2}{7}$，答案爲(D)

24. 公司獲利期望值 E

$$=0.1\times\underbrace{(-30\times 3)}_{\text{賠3台}}+0.2\times\underbrace{(20-60)}_{\text{賺1台賠2台}}+0.4\times\underbrace{(40-30)}_{\text{賺2台賠1台}}+0.3\times\underbrace{(60)}_{\text{賺3台}}=5$$

答案爲(B)
[另解]
平均每年售出 $0\times 0.1+1\times 0.2+2\times 0.4+3\times 0.3=1.9$ (台)
平均每年沒賣出有 $3-1.9=1.1$ (台)
故所求爲
$1.9\times(50-30)+1.1\times(-30)=38-33=5$ (萬元)

25. 標準差的定義爲討論資料的集中或分散狀況，資料越集中，標準差越小，最小爲 0；資料越分散，標準差越大，所以四組資料中，B 組的資料爲最分散，標準差最大。答案爲(B)