107 學年度四技二專第二次聯合模擬考試
共同科目　數學(C)卷　詳解

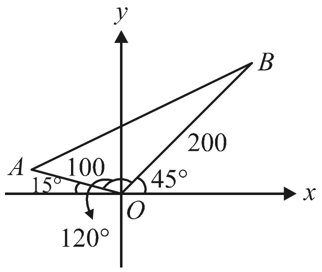
數學(C)卷　　107-2-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
D	B	D	C	A	D	C	A	B	B	D	B	D	C	C	A	B	D	A	C	A	C	A	C	B

1. $\because$ $f(x)=a(x+1)^2+2$ 的圖形為拋物線且頂點為 $(-1,2)$
$\therefore$只要是開口向下且和 y 軸交點在原點或原點下方均符合題目要求
$\Rightarrow a<0$ 且 $f(0)=a+2\le 0 \Rightarrow a\le -2$，故選(D)

2. 設 L：$4x-3y+k=0$
點 $A(1,2)$ 代入得 $4-6+k=0\Rightarrow k=2$
$\therefore$點 $B(-3,0)$ 到 L：$4x-3y+2=0$ 的距離為
$\dfrac{|4\times(-3)-0+2|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{10}{5}=2$，故選(B)

3.



設小明家位於 O 點處，由上圖可知
$\overline{AB}^2=100^2+200^2-2\times100\times200\times\cos120°$
$=10000+40000-40000\times(-\dfrac{1}{2})$
$=70000\Rightarrow \overline{AB}=100\sqrt{7}$ (公尺)，故選(D)

4. $(\sin^2 40°+\sin^2 50°)+(\cot^2 40°-\sec^2 50°)+\sin^2 270°$
$=(\sin^2 40°+\cos^2 40°)+(\tan^2 50°-\sec^2 50°)+(-1)^2$
$=1+(-1)+1=1$，故選(C)

5. $\tan(\theta-\dfrac{\pi}{2})=\tan(\dfrac{3\pi}{2}+\theta)=-\cot\theta=-\dfrac{1}{\tan\theta}=-3$
故選(A)

6. $\cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C$
$=-(\dfrac{5^2+3^2-7^2}{2\times5\times3})=-(\dfrac{25+9-49}{30})=\dfrac{1}{2}$
故選(D)

7. $f(i)=-i+1+ai+b=0$，其中 a 、 b 均為實數
$\therefore (b+1)+(a-1)i=0+0i\Rightarrow b=-1$， $a=1$
$\therefore f(x)=x^3-x^2+ax+b=0$
$\Rightarrow x^3-x^2+x-1=0 \Rightarrow x^2(x-1)+(x-1)=0$
$\Rightarrow (x^2+1)(x-1)=0\Rightarrow x=i\,,-i\,,1$
$\therefore$三根乘積為 $i\times(-i)\times1=1$，故選(C)

8. $\because f(x)=(x+2)^2Q(x)+(x-2)$
$=(x+2)^2Q(x)+(x+2)-4$
$=(x+2)[(x+2)Q(x)+1]-4$
$\therefore f(x)$ 除以 $x+2$ 的餘式為 $f(-2)=-4$，故選(A)

9. ΔABC 面積 $=\dfrac{1}{2}\times4\times3\times\sin60°=3\sqrt{3}$，故選(B)

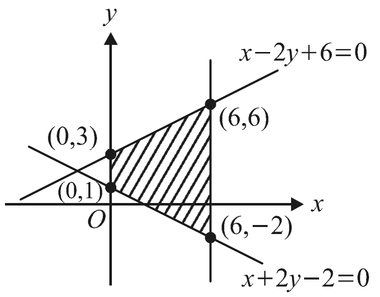
10. $\because x^2-1=(x+1)(x-1)$
$\therefore f(x)=x^5+2ax^2-bx+4$ 可被 $x-1$ 及 $x+1$ 整除
$f(1)=1+2a-b+4=0$
$f(-1)=-1+2a+b+4=0$
$\Rightarrow\begin{cases}2a-b=-5\\2a+b=-3\end{cases}\Rightarrow a=-2$， $b=1$，$\therefore a+b=-1$
故選(B)

11. $\sqrt{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}+\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\dfrac{4-2\sqrt{3}}{4}}+\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{4}}$
$=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}=\sqrt{3}$，故選(D)

12. $\dfrac{2x^2-3x+1}{(x+1)(x-2)^2}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{(x-2)^2}$
同乘 $(x+1)(x-2)^2$ 得
$2x^2-3x+1=A(x-2)^2+B(x+1)(x-2)+C(x+1)$
令 $x=-1$ 代入得 $6=A\times9\Rightarrow A=\dfrac{2}{3}$
令 $x=2$ 代入得 $3=C\times3\Rightarrow C=1$
比較 x^2 項係數得 $2=A+B\Rightarrow 2=\dfrac{2}{3}+B\Rightarrow B=\dfrac{4}{3}$
$\therefore A+B+C=\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{3}+1=3$，故選(B)

13. $\because \omega=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}=\cos60°+i\sin60°$
$\therefore \omega^5=\cos300°+i\sin300°=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$
$\dfrac{1}{\omega^5}=\omega^{-5}=\cos(-300°)+i\sin(-300°)$
$=\cos60°+i\sin60°=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$
所求 $=1+\omega^5+\dfrac{1}{\omega^5}=1+\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}=2$
故選(D)

14. 如下圖



此梯形區域面積為 $\dfrac{(2+8)\times 6}{2}=30$，故選(C)

15. $-2\le x\le 4\Rightarrow (x+2)(x-4)\le 0$

$\Rightarrow x^2-2x-8\le 0\Rightarrow -x^2+2x+8\ge 0$

比較係數得 $a=-1$，$b=2$

$|ax+b|\le 3\Rightarrow |-x+2|\le 3\Rightarrow |x-2|\le 3$

$\Rightarrow -3\le x-2\le 3\Rightarrow -1\le x\le 5$

$\therefore x=-1,0,1,2,3,4,5$ 共有 7 個整數解，故選(C)

16. 設另一根為 β

由根與係數關係知，兩根積 $(1-i)\beta=3-i$

$\Rightarrow \beta=\dfrac{3-i}{1-i}=\dfrac{(3-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{4+2i}{2}=2+i$

$\because$ 兩根和為 $1-i+2+i=3=-a$，$\therefore a=-3$，故選(A)

17. 由算幾不等式 $\dfrac{a+a+b}{3}\ge\sqrt[3]{a\cdot a\cdot b}$

$\Rightarrow 2\ge\sqrt[3]{a^2b}\Rightarrow 8\ge a^2b$

$\therefore a^2b$ 之最大值為 8，故選(B)

18. $\begin{vmatrix}2&3&4\\4&9&16\\8&27&64\end{vmatrix}=\begin{matrix}\\(-2)\\(-4)\end{matrix}\begin{vmatrix}2&3&4\\4&9&16\\8&27&64\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3&4\\0&3&8\\0&15&48\end{vmatrix}$

$=2\begin{vmatrix}3&8\\15&48\end{vmatrix}=48\begin{vmatrix}1&1\\5&6\end{vmatrix}=48$，故選(D)

$\quad\;\;\downarrow\;\;\downarrow$

$\quad\;\;3\;\;\;8$

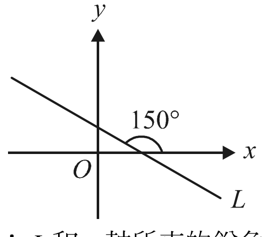
19. $\left|\dfrac{(1+2i)^2}{(4-3i)(1+i)^2}\right|=\dfrac{|1+2i|^2}{|4-3i||1+i|^2}$

$=\dfrac{(\sqrt{1^2+2^2})^2}{\sqrt{4^2+(-3)^2}(\sqrt{1^2+1^2})^2}=\dfrac{5}{5\times 2}=\dfrac{1}{2}=\sqrt{a^2+b^2}$

$\therefore a^2+b^2=\dfrac{1}{4}$，故選(A)

20. $\because x+\sqrt{3}y-1=0$ 的斜率 $m=\tan\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

其中斜角 $\alpha=150^\circ$，如下圖所示



$\therefore L$ 和 y 軸所夾的銳角 $\theta=150^\circ-90^\circ=60^\circ$

$\therefore \sin\theta=\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故選(C)

21. 化簡 $\begin{vmatrix}a+c&b+d\\a-c&b-d\end{vmatrix}\times(1)$

$=\begin{vmatrix}a+c&b+d\\2a&2b\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a+c&b+d\\a&b\end{vmatrix}$

$=(-2)\times\begin{vmatrix}a&b\\a+c&b+d\end{vmatrix}\times(-1)$ (上式兩列對調)

$=(-2)\times\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$

$\therefore\begin{vmatrix}a+c&b+d\\a-c&b-d\end{vmatrix}=(-2)\times\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=-4\Rightarrow\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=2$

$\begin{vmatrix}3a+2c&3b+2d\\2a-3c&2b-3d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3a+2c&3b+2d\\2a-3c&2b-3d\end{vmatrix}\times(\dfrac{3}{2})$

$=\begin{vmatrix}3a+2c&3b+2d\\\dfrac{13}{2}a&\dfrac{13}{2}b\end{vmatrix}$

$=(-\dfrac{13}{2})\times\begin{vmatrix}a&b\\3a+2c&3b+2d\end{vmatrix}\times(-3)$

$=(-\dfrac{13}{2})\times\begin{vmatrix}a&b\\2c&2d\end{vmatrix}=(-13)\times\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=(-13)\times 2=-26$

故選(A)

22. $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=1\times 2\times\cos\dfrac{2\pi}{3}=-1$

$\because(\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b})$ 和 $(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})$ 兩個向量互相垂直

$\therefore(\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})=0$

$\Rightarrow|\overrightarrow{a}|^2-\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+t(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})-t|\overrightarrow{b}|^2=0$

$\Rightarrow 1+1-t-4t=0\Rightarrow t=\dfrac{2}{5}$，故選(C)

23. 設 $x^4=16i=16(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2})$ 的四個根為 x_1、x_2、x_3、x_4

則 $x_i=2(\cos\dfrac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}+i\sin\dfrac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4})$，$k=0,1,2,3$

當 $k=0$ 時，$x_1=2(\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8})$

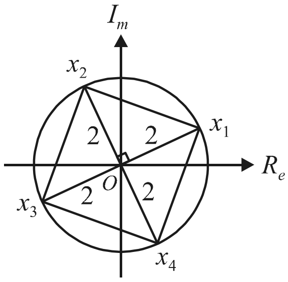
當 $k=1$ 時，$x_2=2(\cos\dfrac{5\pi}{8}+i\sin\dfrac{5\pi}{8})$

當 $k=2$ 時，$x_3=2(\cos\dfrac{9\pi}{8}+i\sin\dfrac{9\pi}{8})$

當 $k=3$ 時，$x_4=2(\cos\dfrac{13\pi}{8}+i\sin\dfrac{13\pi}{8})$

$\because|x_1|=|x_2|=|x_3|=|x_4|=2$

$\therefore x_1$、x_2、x_3、x_4 四個根在複數平面上所成的四邊形為正方形



如上圖所示，所求正方形面積爲 $4\times4\times\frac{1}{2}=8$，故選(A)

24. $|2\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{13}\Rightarrow|2\vec{a}+3\vec{b}|^2=(\sqrt{13})^2$

$\Rightarrow 4|\vec{a}|^2+12(\vec{a}\cdot\vec{b})+9|\vec{b}|^2=13$

$\Rightarrow 16+12\times(2\times1\times\cos\theta)+9=13$

$\Rightarrow 24\cos\theta=-12\Rightarrow\cos\theta=-\frac{1}{2}$

$\therefore\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夾角 $\theta=\frac{2}{3}\pi$ ，故選(C)

25. 設 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}=(-4,-2)$ ， $\overrightarrow{AC}=\vec{b}=(1,1)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-4)\times1+(-2)\times1=-6$

$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AH}=(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2})\vec{b}=(\frac{-6}{2})(1,1)=(-3,-3)$

$\because$已知 $A(2,5)$ ，$\therefore H(-3+2,-3+5)=(-1,2)$

故選(B)