106 學年度四技二專第四次聯合模擬考試
共同科目　數學(C)卷　詳解

數學(C)卷 106-4-C

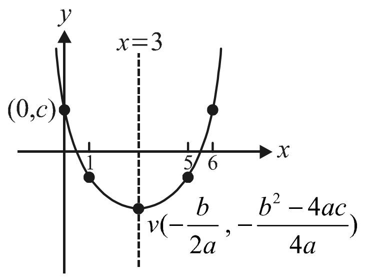
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
D	A	D	B	D	C	C	B	A	C	D	B	A	C	B	D	A	B	C	C	A	B	C	D	A

1. $\dfrac{2x^2-3x+1}{(x-1)^3}=\dfrac{A}{(x-1)^3}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{(x-1)}$
$\Rightarrow 2x^2-3x+1=A+B(x-1)+C(x-1)^2$
令 $x=2$ 代入，得 $A+B+C=2\times2^2-3\times2+1=3$
故選(D)

2. $a^{12}=(2^{\frac{1}{2}})^{12}=2^6=64$
$b^{12}=(4^{\frac{1}{4}})^{12}=4^3=64$
$c^{12}=(3^{\frac{1}{3}})^{12}=3^4=81$
$\because c^{12}>a^{12}=b^{12}$，且 $a>1$，$b>1$，$c>1$
$\therefore c>a=b$，故選(A)

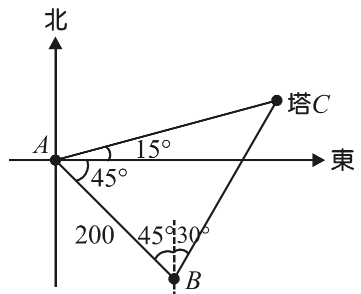
3. $(x^3+\dfrac{2}{x^2})^7$ 的展開式中，x^6 項為 $C^7_3(x^3)^4\cdot(\dfrac{2}{x^2})^3$
$\therefore$所求係數為 $C^7_3\times2^3=35\times8=280$，故選(D)

4. 由題意可知函數圖形如下



故 $a>0$；又 $-\dfrac{b}{2a}=3>0$，得 $b<0$
$c=f(0)=f(6)>0$；圖形與 x 軸有 2 交點
得 $b^2-4ac>0$，故選(B)

5. 由題意得圖形如下



得 $\angle BAC=60°$，$\angle ABC=75°$，$\angle ACB=45°$
由正弦定理，$\dfrac{\overline{BC}}{\sin60°}=\dfrac{200}{\sin45°}$
$\Rightarrow \overline{BC}=\dfrac{200}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=100\sqrt{6}$，故選(D)

6. 方程組有異於 $(x,y,z)=(0,0,0)$ 的解
即此方程組有無限多組解
$\therefore \Delta=\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&1&3\\4&5&k\end{vmatrix}=0$
$\Rightarrow k+24+(-10)-(-4)-15-4k=0\Rightarrow k=1$
故選(C)

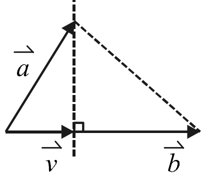
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{30}i^{3k-2}=i+i^4+i^7+i^{10}+i^{13}+\cdots+i^{88}$
$=(i+1+i^3+i^2)+(i+1+i^3+i^2)+\cdots+(i+1+i^3+i^2)+i+1$
$=0\times7+i+1=1+i$，故選(C)

8. C：$x^2+y^2-2x+6y+5=0\Rightarrow(x-1)^2+(y+3)^2=5$
得圓心 $(1,-3)$，半徑為 $\sqrt{5}$
$\because C$ 與 L 交於相異兩點
$\therefore$圓心到 L 的距離 $<$ 半徑
$\Rightarrow \dfrac{|1+6+k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}<\sqrt{5}\Rightarrow|k+7|<5$
$\Rightarrow -5<k+7<5\Rightarrow-12<k<-2$，故選(B)

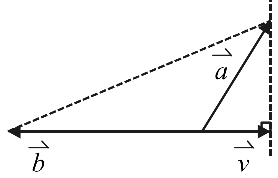
9. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\frac{n^2-n}{2n+1}-\frac{n^2+1}{2n-1})$
$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-n)(2n-1)-(n^2+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)}$
$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n^3-3n^2+n)-(2n^3+n^2+2n+1)}{4n^2-1}$
$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{-4n^2-n-1}{4n^2-1}=-1$，故選(A)

10. $\sin23°\cos323°-\sin113°\sin217°$
$=\sin23°\cos(360°-37°)-\sin(90°+23°)\sin(180°+37°)$
$=\sin23°\cos37°-\cos23°\cdot(-\sin37°)$
$=\sin23°\cos37°+\cos23°\sin37°$
$=\sin(23°+37°)=\sin60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故選(C)

11. 令 $\vec{v}=(1,1)$，$|\vec{v}|=\sqrt{2}$
$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{v}$ 的關係如下圖



或

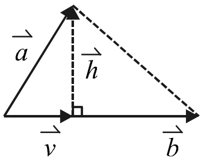


則$\vec{a}$、$\vec{v}$所張成的三角形面積爲$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right| = 4$

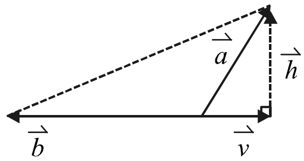
$\because \vec{b} // \vec{v}$，且$|\vec{b}| = 4 = 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}\,|\vec{v}|$

$\therefore$所求$= 4 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$，故選(D)

[另解]



或



$\vec{h} = \vec{a} - \vec{v} = (4\,,-4)$，$|\vec{h}| = 4\sqrt{2}$

故所求$= \frac{1}{2} \times |\vec{b}| \times |\vec{h}| = \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

12. 新數值資料的平均數、眾數、中位數皆會比舊數值資料增加 10，但是標準差及全距不變，因此不變的有④和⑤，故選(B)

13. 由題意知雙曲線中心亦爲$(1\,,-2)$，且爲上下型

$c^2 = 25$，$a^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow b^2 = 9$

方程式爲：$\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$，故選(A)

14. $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + 5$

$\Rightarrow f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 12x + 24$

$= 12(x+1)(x-1)(x-2)$

當$f(x)$爲遞減時，$f'(x) < 0$

解$f'(x) = 12(x+1)(x-1)(x-2) < 0$

$\Rightarrow x < -1$或$1 < x < 2$，故選(C)

15. 令$f(x) = x^5 + ax^2 + bx - 1$

$\because f(x) = 0$有二個相異的有理根

$\therefore f(x)$有二個一次有理因式(整係數一次因式)

由整係數一次因式檢驗法，得$f(x)$的一次因式爲$x \pm 1$，即有理根爲 1 或-1

$\therefore \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + a + b - 1 = 0 \\ -1 + a - b - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

得$2a + b = 2 \times 1 + (-1) = 1$，故選(B)

16. 設另一根爲β，由根與係數關係

$\begin{cases} (1+i) + \beta = -k \cdots\cdots ① \\ (1+i) \times \beta = -2 \cdots\cdots ② \end{cases}$

由②，得$\beta = \frac{-2}{1+i} = -(1-i) = -1 + i \cdots\cdots$ 代入①

得$k = -2i$，故選(D)

17. $f(x\,,y) = kx - y$

可行解區域頂點爲$(1\,,1)$、$(2\,,3)$、$(-1\,,4)$

則$f(1\,,1) = k - 1$，$f(2\,,3) = 2k - 3$，$f(-1\,,4) = -k - 4$

由題意得：$\begin{cases} 2k - 3 > k - 1 \\ 2k - 3 > -k - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > 2 \\ k > -\frac{1}{3} \end{cases}$，故得$k > 2$

故選(A)

18. $\log_2(-x) < \log_4(2x+3) \Rightarrow \log_4 x^2 < \log_4(2x+3)$

$\Rightarrow x^2 < 2x + 3$(底數大於 1)

$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Rightarrow (x+1)(x-3) < 0 \Rightarrow -1 < x < 3$

又眞數$-x > 0 \Rightarrow x < 0$，眞數$2x + 3 > 0 \Rightarrow x > -\frac{3}{2}$

由$\begin{cases} -1 < x < 3 \\ x < 0 \\ x > -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 0$，故選(B)

19. a^{50}爲 15 位數$\Rightarrow \log a^{50} = 14 + b$，其中$0 < b < 1$

則$\log a^{-25} = \log(a^{50})^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\log a^{50} = -\frac{1}{2} \times (14 + b)$

$= -7 + (-\frac{1}{2}b)$，其中$-\frac{1}{2} < -\frac{1}{2}b < 0$

$= -8 + (1 - \frac{1}{2}b)$，其中$\frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{2}b < 1$

得$\log a^{-25}$首數爲-8

$\therefore a^{-25}$在小數點後第 8 位開始不爲 0，故選(C)

20. 設擲出x次偶數點，y次奇數點，由題意得：

$\begin{cases} x + y = 6 \\ 1 \cdot x + (-1) \cdot y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$

即點數出現爲 5 奇 1 偶，則依此奇、偶的排列有$\frac{6!}{5! \times 1!} = 6$種情形，又奇數點每次有 3 種可能，偶數點也是 3 種可能，共有$6 \times 3^5 \times 3 = 4374$種情形，故選(C)

21. 令$x - 1 = t \Rightarrow x = t + 1$，$dx = dt$

則$\int_1^2 x(x-1)^4 dx = \int_0^1 (t+1) \times t^4 dt$

$= \int_0^1 (t^5 + t^4) dt = (\frac{1}{6}t^6 + \frac{1}{5}t^5)\Big|_0^1$

$= (\frac{1}{6} + \frac{1}{5}) - (0 + 0) = \frac{11}{30}$，故選(A)

22. 黑隊勝利的取球情形爲(黑 , 黑)、(黑 , 黃 , 黑)、(黃 , 黑 , 黑)

所求$= \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} + \frac{4}{12} \times \frac{8}{11} \times \frac{3}{10} + \frac{8}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{3}{10} = \frac{13}{55}$

故選(B)

23. 設$b = ar$，$c = ar^2$，$d = ar^3$，其中$r > 0$爲公比

則可知

(A) 爲首項$\frac{1}{a}$，公比$\frac{1}{r}$的等比數列

(B) 爲首項a^2，公比r^2的等比數列

在(C)中，將後項除以前項，得：

$\frac{2^b}{2^a} = 2^{b-a}$，$\frac{2^c}{2^b} = 2^{c-b}$

$\because c-b=ar(r-1)$ 與 $b-a=a(r-1)$ 未必相等

$\therefore 2^a, 2^b, 2^c, 2^d$ 未必爲等比數列

在(D)中， $\log b=\log ar=\log a+\log r$

$\log c=\log br=\log b+\log r$

$\log d=\log cr=\log c+\log r$

$\therefore \log a, \log b, \log c, \log d$ 爲公差是 $\log r$ 的等差數列，故選(C)

24. 令 $\angle BAD=\theta$ ，則 $\angle CAD=\theta$ ， $\angle BAC=2\theta$

由 ΔABC 面積 $=\Delta ABD$ 面積 $+\Delta ACD$ 面積

$\Rightarrow \frac{1}{2}\times 5\times 13\times \sin 2\theta$

$=\frac{1}{2}\times 5\times \overline{AD}\times \sin\theta+\frac{1}{2}\times \overline{AD}\times 13\times \sin\theta$

$\Rightarrow 5\times 13\times 2\sin\theta\cos\theta=5\times \overline{AD}\times \sin\theta+\overline{AD}\times 13\times \sin\theta$

$\Rightarrow 5\times 13\times 2\cos\theta=5\overline{AD}+13\overline{AD}$

$\Rightarrow 18\overline{AD}=26\Rightarrow \overline{AD}=\frac{13}{9}$ ，故選(D)

25. $S_{101}=\frac{a_1+a_{101}}{2}\times 101>0\Rightarrow a_{51}\times 101>0$

$\Rightarrow a_{51}>0$ (a_{51} 爲 a_1 和 a_{51} 的等差中項)

$S_{102}<0\Rightarrow S_{103}<0\Rightarrow \frac{a_1+a_{103}}{2}\times 103<0\Rightarrow a_{52}<0$

$\therefore$該數列由第 52 項開始爲負值，故選(A)