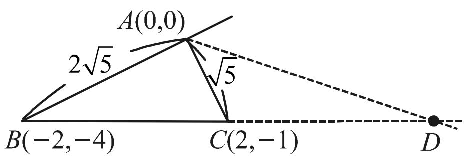
106 學年度四技二專第三次聯合模擬考試
共同科目　數學(C)卷　詳解

數學(C)卷 106-3-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	D	C	C	D	B	A	B	B	A	D	A	C	D	B	C	B	C	B	A	C	A	D	D	B

1.



$\because \overline{AB}=\sqrt{(0+2)^2+(0+4)^2}=2\sqrt{5}$

$\overline{AC}=\sqrt{(0-2)^2+(0+1)^2}=\sqrt{5}$

由外分比性質可知 $\overline{BD}：\overline{DC}=\overline{AB}：\overline{AC}$

$=2\sqrt{5}：\sqrt{5}=2：1 \Rightarrow \overline{BC}：\overline{CD}=1：1$

設 $D(x,y)$，由內分點公式可知 $\dfrac{x+(-2)}{2}=2$

且 $\dfrac{-4+y}{2}=-1$，得 $x=6$，$y=2$，故 $D(6,2)$

2. $\because y=x^2-2x+1=(x-1)^2$，$\therefore$頂點 $A(1,0)$

求拋物線與直線的交點，即 $\begin{cases} y=x^2-2x+1 \cdots\cdots ① \\ x-y+5=0 \cdots\cdots ② \end{cases}$

由 ② $\Rightarrow$ 得到 $y=x+5 \cdots\cdots ③$，再代入 ①

$\Rightarrow x+5=x^2-2x+1$

$\Rightarrow x^2-3x-4=0 \Rightarrow (x-4)(x+1)$

$\Rightarrow x=4$ 或 -1 代入③，得 $\begin{cases} x=4 \\ y=9 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases}$

不失一般性可令 $B(4,9)$，$C(-1,4)$

$\therefore \overrightarrow{AB}=(3,9)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,4)$

$\Delta ABC=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}\right|=15$

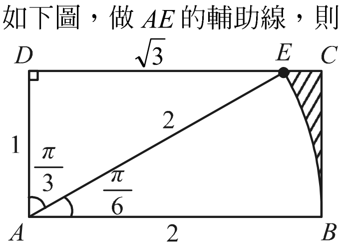
3. $\because f(x)=4(x+\dfrac{1}{2})^2+2$，$-100 \le x \le 100$

(1) 當 $x=-\dfrac{1}{2}$ 時，$f(x)$ 有最小值 2

(2) 當 $x=100$ 時，$f(x)$ 有最大值 $f(100)=40403$

故 $a-b=40403-2=40401$

4. 如下圖，做 AE 的輔助線，則



$\because \Delta ADE$ 中 $\overline{AE}=2$ ($\because \overline{AE}$ 為半徑)，$\overline{AD}=1$ 且 $\angle D=90^\circ$，$\therefore \overline{DE}=\sqrt{3}$ 且 $\angle DAE=\dfrac{\pi}{3}$

($\because \Delta ADE$ 之三邊長為 $1：\sqrt{3}：2$)

可得 $\angle BAE=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$

故所求 = (長方形 $ABCD$ 面積) − (三角形 ADE 面積) − (扇形 ABE 面積)

$=2\times1-\dfrac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\times2^2\times\dfrac{\pi}{6}=2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{3}$

5. 由圖(二)可知，$\overline{AB}=\dfrac{\overline{AB}}{1}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{OA}}=\sin\theta$ 且

$\overline{OC}=\dfrac{\overline{OC}}{1}=\dfrac{\overline{OC}}{\overline{OD}}=\sec\theta$

$\therefore \overline{AB}\times\overline{OC}=\sin\theta\times\sec\theta=\tan\theta=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{OD}}=\dfrac{\overline{CD}}{1}=\overline{CD}$

6. $f(x)=\tan x+\cot x=\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\sin x}$

$=\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\dfrac{1}{\sin x\cos x}$

$=\dfrac{2}{2\sin x\cos x}=\dfrac{2}{\sin 2x}=2\csc 2x$

$\because \csc x$ 週期為 2π，故 $f(x)=2\csc 2x$，週期為 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

7. $\overline{AB}^2=(5\sin125^\circ-3\sin35^\circ)^2+(5\cos125^\circ-3\cos35^\circ)^2$

$=25\sin^2 125^\circ-30\sin125^\circ\sin35^\circ+9\sin^2 35^\circ$

$+25\cos^2 125^\circ-30\cos125^\circ\cos35^\circ+9\cos^2 35^\circ$

$=25+9-30(\cos125^\circ\cos35^\circ+\sin125^\circ\sin35^\circ)$

$=34-30\cos(125^\circ-35^\circ)=34-30\cos90^\circ=34$

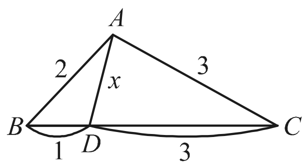
$\therefore \overline{AB}=\sqrt{34}$

8. 由正弦定理可知 $\dfrac{\overline{BC}}{\sin30^\circ}=2\times5 \Rightarrow \overline{BC}=5$

9. 設 $\overline{AD}=x$

ΔABD 中

$\cos B=\dfrac{2^2+1^2-x^2}{2\times2\times1} \cdots\cdots ①$



又 ΔABC 中

$\cos B=\dfrac{2^2+4^2-3^2}{2\times2\times4} \cdots\cdots ②$

由 ① = ② $\Rightarrow \dfrac{2^2+1^2-x^2}{2\times2\times1}=\dfrac{2^2+4^2-3^2}{2\times2\times4} \Rightarrow 5-x^2=\dfrac{11}{4}$

$\Rightarrow x^2=\dfrac{9}{4} \Rightarrow x=\pm\dfrac{3}{2}$(負不合)

10. $\because \overrightarrow{AB}=(3,-4)$，$\overrightarrow{CD}=(8,6)$

$\therefore |\overrightarrow{AB}|=5$ ，$|\overrightarrow{CD}|=10$

所求正射影為 $\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|^2}\overrightarrow{CD}$

$=\dfrac{3\times 8+(-4)\times 6}{10^2}(8\,,6)=(0\,,0)$

11. 原式同乘 $x+2$ 可得

$2x^3+x^2+3=(ax^2+bx+c)(x+2)-d$

由綜合除法可知
$$\begin{array}{l|l} 2+1+0+3 & -2 \\ \ \ -4+6-12 & \\ \hline 2-3+6\ \ \boxed{-9} & \end{array}$$

即 $2x^3+x^2+3=(2x^2-3x+6)(x+2)-9$

由除法原理中，商式與餘式的唯一性可知

$a=2$ ，$b=-3$ ，$c=6$ ，$d=9$

故 $a+b+c+d=14$

12. 設 $f(x)=(2x^2+x-6)Q_1(x)+x+1$

與 $f(x)=(x^2-3x+2)Q_2(x)+x+1$

可得 $f(x)=(2x-3)(x+2)Q_1(x)+x+1\Rightarrow f(-2)=-1$

與 $f(x)=(x-1)(x-2)Q_2(x)+x+1\Rightarrow f(2)=3$

設所求餘式為 $ax+b$ ，即 $f(x)=(x^2-4)Q(x)+ax+b$

其中 $Q(x)$ 為商式

則 $f(-2)=-2a+b=-1\cdots\cdots$①

$f(2)=2a+b=3\cdots\cdots$②

解①②得 $a=1$ ，$b=1$ ，故餘式為 $x+1$

13. 令 $f(x)=x^3+2x^2-5x-6$ ，利用一次因式檢驗法

$\because f(-1)=-1+2+5-6=0$

$\therefore x+1\,|\,f(x)$ ，利用綜合除法
$$\begin{array}{l|l} 1+2-5-6 & -1 \\ \ \ -1-1+6 & \\ \hline 1+1-6\ \ \boxed{+0} & \end{array}$$

得 $f(x)=(x+1)(x^2+x-6)=(x+1)(x-2)(x+3)$

$\therefore f(x)=0$ 之三根為 $x=-1\,,2\,,-3$

故 $p-q=2-(-3)=5$

14. 原式 $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ x & x & x+1 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}=(x^3+x^2)+(x+1)-x-x^2$

$=x^3+1=(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6})^3+1=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}+1=1+i$

15. $\because \dfrac{2-i}{a+bi}=-3+4i$ ，$\therefore a+bi=\dfrac{2-i}{-3+4i}$

$\Rightarrow |a+bi|=\left|\dfrac{2-i}{-3+4i}\right|=\dfrac{|2-i|}{|-3+4i|}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

16. $\because -|\vec{a}||\vec{b}|\le\vec{a}\cdot\vec{b}\le|\vec{a}||\vec{b}|$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}$ 最大值為 $|\vec{a}||\vec{b}|=\sqrt{3^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{13}=13$

17. 由算幾不等式知 $\dfrac{x+y+z}{3}\ge\sqrt[3]{xyz}\Rightarrow\dfrac{6}{3}\ge\sqrt[3]{xyz}$

$\Rightarrow 2^3\ge xyz\Rightarrow 8\ge xyz$ ，故最大體積為 8

18. $\because a_1=S_1=1-1+1=1$

又 $a_5=S_5-S_4=(5^2-5+1)-(4^2-4+1)=8$

故所求為 $a_1+a_5=1+8=9$

19. 求式 $=\sum\limits_{k=21}^{167}[\log_2 k-\log_2(k+1)]$

$=(\log_2 21-\log_2 22)+(\log_2 22-\log_2 23)+\cdots\cdots$

$+(\log_2 167-\log_2 168)]=\log_2 21-\log_2 168=\log_2\dfrac{21}{168}$

$=\log_2\dfrac{1}{8}=-3$

20. 原式 $\Rightarrow \log_2(2^x+8)=\log_2 2^{1+\frac{x}{2}}+\log_2 3$

$\Rightarrow \log_2(2^x+8)=\log_2 3\times 2^{1+\frac{x}{2}}$

$\Rightarrow 2^x+8=6\times 2^{\frac{x}{2}}\Rightarrow(2^{\frac{x}{2}})^2-6(2^{\frac{x}{2}})+8=0$

$\Rightarrow(2^{\frac{x}{2}}-4)(2^{\frac{x}{2}}-2)=0\Rightarrow 2^{\frac{x}{2}}=4$ 或 $2^{\frac{x}{2}}=2$

$\Rightarrow\dfrac{x}{2}=2$ 或 $\dfrac{x}{2}=1\Rightarrow x=4$ 或 2，故所求為 $4+2=6$

21. 設縱向道路共有 x 條，則由 A 地到 B 地走捷徑的方法

有 $\dfrac{(x-1+2)!}{(x-1)!2!}=45\Rightarrow\dfrac{(x+1)!}{(x-1)!}=90$

$\Rightarrow x(x+1)=90\Rightarrow x^2+x-90=0$

$\Rightarrow(x-9)(x+10)=0\Rightarrow x=9$ 或 -10 (不合)

故由 A 地到 C 地走捷徑共有 $\dfrac{(7+2)!}{7!2!}=36$ 種方法

22.

字母	s	e	a	f	o	d
個數	1	1	1	1	2	1

(1) 取出三個相異字母：$\overset{\text{選法}}{C_3^6}\times\overset{\text{排法}}{3!}=120$

(2) 取出二個相同一個相異字母：$\overset{\text{選法}}{C_1^1\times C_1^5}\times\overset{\text{排法}}{\dfrac{3!}{2!}}=15$

故共有 $120+15=135$ 種方法

23. $\because A\cap B=\{c\,,d\}$ ，$A\cup B=\{a\,,b\,,c\,,d\,,e\,,f\}$

$\therefore$ 集中 X 中的元素除了 c 、d 之外，尚可在 a 、b 、e 、f 中任意選取組成集合(可全選或全不選)，故共有 $2^4=16$ 種可能集合

24. 設投擲不公正硬幣出現正面機率為 P

則 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times P=\log 1.6$

$\Rightarrow P=4\log 1.6=4\log\dfrac{16}{10}=4(\log 2^4-\log 10)$

$=4(4\log 2-1)=4(4\times 0.3010-1)=0.816$

25. 依常態分配的 $68-95-99.7$ 經驗法則知

不及格約有 $1000\times\dfrac{1}{2}(1-95\%)=25$ 人