105 學年度四技二專第四次聯合模擬考試
共同科目　數學(C)卷　詳解

數學(C)卷 105-4-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	A	A	D	B	A	B	C	C	D	B	A	B	D	A	C	D	D	B	C	C	C	D	C	B

1. $\left|x+3\right|<2\Rightarrow -2<x+3<2$
$\Rightarrow -5<x<-1$
故得二次不等式：$(x+5)(x+1)<0$
$\Rightarrow x^2+6x+5<0$
$\Rightarrow -x^2-6x-5>0$
得 $a=-1$，$b=-6$
$\therefore a+b=-7$

2. 正焦弦長 $\overline{AB}=\left|4c\right|=8$
頂點 V 到 $\overline{AB}$ 的距離 $=\left|c\right|=2$
$\therefore \Delta ABV$ 的面積 $=\dfrac{1}{2}\times 8\times 2=8$

3. $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{3}\Rightarrow\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=3$
$\Rightarrow\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=3$
$\Rightarrow 4+2\vec{a}\cdot\vec{b}+1=3$
$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=-1$
$\Rightarrow 2\times1\times\cos\theta=-1$
$\Rightarrow \cos\theta=-\dfrac{1}{2}$
$\therefore \theta=120^\circ$

4. ①先排紅球，方法數：$\dfrac{5!}{5!}=1$
②將白球填入紅球空隙：$\dfrac{p_3^6}{3!}=C_3^6=20$
∴共有 $1\times 20=20$ 種方法

5. 圓 $C: x^2+y^2-2x+2y-2=0$
$\Rightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=4$
得圓心 $O(1,-1)$，半徑 $r=2$
∵ L 與 C 交於兩點
∴圓心 O 到 L 的距離 $<$ 半徑 r
$\dfrac{\left|1-1+k\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}<2\Rightarrow\left|k\right|<2\sqrt{2}$
$\Rightarrow -2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$

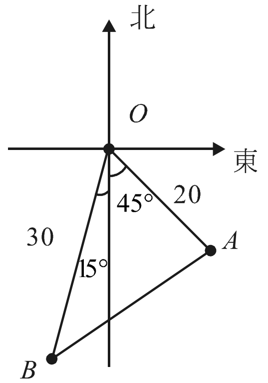
6. $(\cos15^\circ-i\sin15^\circ)^{10}=[\cos(-15^\circ)+i\sin(-15^\circ)]^{10}$
$=\cos(-150^\circ)+i\sin(-150^\circ)$
$=\cos150^\circ-i\sin150^\circ=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$

7. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-16}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$
又 $f(x)=(2x-1)^3(x-5)^2$
$\Rightarrow f'(x)=3\cdot(2x-1)^2\cdot2\cdot(x-5)^2+(2x-1)^3\cdot2\cdot(x-5)\cdot1$
$\therefore f'(1)=3\times1\times2\times16+1\times2\times(-4)\times1=88$

8. $\overline{PA}=\overline{PB}\Rightarrow P$ 在 $\overline{AB}$ 的中垂線 L 上
$\overline{AB}$ 的斜率爲 $\dfrac{7-(-1)}{3-1}=4\Rightarrow L$ 的斜率爲 $-\dfrac{1}{4}$
又 $\overline{AB}$ 中點爲 $(2,3)$
$\therefore L: y-3=-\dfrac{1}{4}(x-2)\Rightarrow x+4y=14$
解 $\begin{cases}x-3y=0\\x+4y=14\end{cases}$，得 $P(6,2)$
故 $a+b=8$

9. $60=65-5=\mu-\sigma$，$75=65+2\times5=\mu+2\sigma$
依照 68-95-99.7 法則
約有 68% 的人在 60~70 公斤之間
約有 $\dfrac{95-68}{2}\%=13.5\%$ 的人在 70~75 公斤之間
∴約有 $200\times(68\%+13.5\%)=163$ 人在 60~75 公斤之間

10. 設海軍基地爲 O 點，可得相關位置如圖



由餘弦定理：
$\overline{AB}^2=20^2+30^2-2\times20\times30\times\cos60^\circ=700$
∴所求 $=\overline{AB}=10\sqrt{7}$

11. 由餘式定理，所求相當於
$f(x)=2x^5-11x^4+3x^3+9x^2+2x-3$ 除以 $x-5$ 的餘式
由綜合除法
$$\begin{array}{rrrrrr|l}2&-11&+3&+9&+2&-3&5\\&+10&-5&-10&-5&-15&\\\hline 2&-1&-2&-1&-3&-18&\end{array}$$
所求 $=-18$

12. 令 $\Delta=\begin{vmatrix}a&b\\d&e\end{vmatrix}$，$\Delta x=\begin{vmatrix}c&b\\f&e\end{vmatrix}$，$\Delta y=\begin{vmatrix}a&c\\d&f\end{vmatrix}$
由克拉瑪公式

$x=\dfrac{\Delta x}{\Delta}\Rightarrow 2=\dfrac{\Delta x}{2}\Rightarrow \Delta x=4$

$y=\dfrac{\Delta y}{\Delta}\Rightarrow 3=\dfrac{\Delta y}{2}\Rightarrow \Delta y=6$

所求$\begin{vmatrix} a+4b & c \\ d+4e & f \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 4b & c \\ 4e & f \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}=\Delta y-4\Delta x=6-4\times 4=-10$

13. $a_1=1\Rightarrow b_1=2\times a_1+1=3$

$\therefore b_5=b_1\times 2^4=3\times 2^4=48$

又$b_5=2a_5+1\Rightarrow a_5=\dfrac{b_5-1}{2}=\dfrac{47}{2}$

14. $\log 10^{2.3}=2.3=2+0.3\fallingdotseq \log 100+\log 2=\log 200$

15. $f''(x)$的反導函數$=f'(x)+c=3x^2+4x-1+c$

$\therefore \int_{-1}^{2} f''(x)\,dx=(3x^2+4x-1)\Big|_{-1}^{2}$

$=(12+8-1)-(3-4-1)=21$

16. (A) $\sin 310^\circ=\sin(360^\circ-50^\circ)=-\sin 50^\circ$

(B) $\cos\dfrac{23}{12}\pi=\cos(\dfrac{3}{2}\pi+\dfrac{5}{12}\pi)=\sin\dfrac{5}{12}\pi$

(C) 取$\angle A=160^\circ$、$\angle B=\angle C=10^\circ$

則$\sin A,\sin B,\sin C$皆小於$\dfrac{1}{2}$

(D) 若$\sin A>\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow 60^\circ<\angle A<120^\circ$

同理：$60^\circ<\angle B<120^\circ$，$60^\circ<\angle C<120^\circ$

則$\angle A+\angle B+\angle C>180^\circ$不合

故選(C)

17. 由柯西不等式

$(x^2+y^2)[2^2+(-1)^2]\ge(2x-y)^2$

$\Rightarrow(x^2+y^2)\times 5\ge 10^2\Rightarrow x^2+y^2\ge 20$

18. $p(甲|白)=\dfrac{p(甲\cap白)}{p(白)}=\dfrac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}}$

$=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{19}{12}}=\dfrac{4}{19}$

19. 令$2^x=t\Rightarrow 4^x=(2^2)^x=(2^x)^2=t^2$

原式：$2t^2-5t+2<0\Rightarrow(2t-1)(t-2)<0$

$\Rightarrow\dfrac{1}{2}<t<2$

$\therefore\dfrac{1}{2}<2^x<2\Rightarrow -1<x<1$

20. 由正弦定理：

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

由行列式運算性質，得$\begin{vmatrix} 1 & a & \sin A \\ 1 & b & \sin B \\ 1 & c & \sin C \end{vmatrix}=0$

21. $\tan\theta=\dfrac{2}{3}$，則θ爲第一象限角或第三象限角

得$\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{13}}\\ \cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{13}}\end{cases}$或$\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{-2}{\sqrt{13}}\\ \cos\theta=\dfrac{-3}{\sqrt{13}}\end{cases}$

得$\sin\theta\times\cos\theta=\dfrac{6}{13}$，$\cos^2\theta=\dfrac{9}{13}$

所求$\sin 2\theta+\cos 2\theta=2\sin\theta\cos\theta+(2\cos^2\theta-1)$

$=2\times\dfrac{6}{13}+2\times\dfrac{9}{13}-1$

$=\dfrac{12}{13}+\dfrac{18}{13}-1=\dfrac{17}{13}$

22. 設$f(x)=x^3+2x^2-5x+2$

由整係數一次因式檢驗法

可能的整係數一次因式爲$x\pm1$、$x\pm2$

又$f(1)=1^3+2\times1^2-5\times1+2=0$

$\therefore x-1$爲$f(x)$的一次因式

得$f(x)=(x-1)\cdot(x^2+3x-2)$

$\therefore\alpha=1$，$\beta+\gamma=-3$

所求$2\alpha+\beta+\gamma=2+(-3)=-1$

23. $\overrightarrow{OA}=(1,2)$、$\overrightarrow{OB}=(2k,k+1)$、$\overrightarrow{OC}=(3,4)$

則$\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|^2}\times\overrightarrow{OC}=\dfrac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|^2}\times\overrightarrow{OC}$

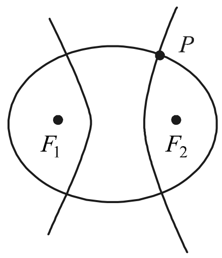
$\Rightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$

$\Rightarrow(1,2)\cdot(3,4)=(2k,k+1)\cdot(3,4)$

$\Rightarrow 3+8=6k+4k+4$

$\Rightarrow k=\dfrac{7}{10}$

24. 由橢圓標準式：$\dfrac{x^2}{A^2}+\dfrac{y^2}{B^2}=1$



得$A=5$，$B=4$

由$A^2=B^2+C^2$

得$C=3$

$\because\Gamma_2$和Γ_1共焦點

$\therefore\Gamma_2$和Γ_1共中心，且得$c=3$

由$c^2=a^2+5$，得$a=2$

P在Γ_2圖形上$\Rightarrow\overline{PF_1}-\overline{PF_2}=2a=4$

25. (A) 由圖可知，正確

(B) 當$1<x<3$時，$f'(x)<0$，故$f(x)$在區間$(1,3)$爲遞減函數

(C) 由圖可知，$f''(1)=0$，且$f''(x)$在$x=1$兩側正負值改變，故$(1,f(1))$爲$y=f(x)$圖形的反曲點

(D) $f'(-1)=0$，且$f'(x)$在$x=-1$兩側正負值改變，故$f(x)$在$x=-1$處有相對極值，選(B)